

Занимательная математика для начинающих

ISBN

Иллюстратор: @@@

Введение



Уважаемые читатели! Если вы держите в руках данную книгу, значит, вы только начинаете ваш путь в олимпиадной математике.

Мы предполагаем, что

1. Вы умеете читать!
2. Счёт в пределах 20 у вас не вызывает никаких затруднений, но, на самом деле, вы хорошо умеете считать и до 100.
3. Вы знаете, что от перемены мест слагаемых сумма не меняется.
4. Вы умеете решать простые задачи в одно и два действия.
5. Вы умеете думать!

Мы перечислили основные навыки, которые ожидаются от начинающего олимпиадника, то есть, по сути, набор пластилина, из которого после прочтения данной книги мы слепим что-то новое и прекрасное.



Оглавление

Посвящение	iii
Введение	v
1 Продолжите ряд	1
2 12 стульев	19
3 Что пропущено?	33
4 Логика. Отрицания	45
5 Шахматы в математике	53
6 Расстановка знаков	69
7 Домино, тримино, тетрамино	77
8 Брёвна и брёвнышки	89
9 Логика. Рыцари и лжецы	101
10 Сколько треугольников на рисунке?	111
11 Братья и сёстры	129
12 Что тяжелее?	137
13 Найдите все числа от 1 до ... на рисунке	149
14 Обратный ход	155
15 Морской бой	163
16 Чётные числа	185
17 Судоку	191

18 Комбинаторика	213
19 Лабиринты	223
20 Операции	245
21 Сапёр	257
22 Поедание конфет — это тоже работа	275
23 Переправы	283
24 Быки и коровы	303
25 Закономерности в рисунках	315
26 Возраст	337
27 Крестики-нолики	345
28 Лапы и хвосты	363
29 Разрезания	371
30 Задачи на логику	395
31 Обойдите ходом шахматного коня	403
32 Раз ступенька, два ступенька	411
33 Переливания	421
34 Примеры и конструкции	431
35 Спички детям не игрушки!	447
36 Числовые ребусы	461
Заключение	471

Продолжите ряд



Материал для разбора на занятии

Наша жизнь полна **закономерностей**, то есть каких-то правил. Ещё до школы вы научились считать и теперь наверняка знаете, как продолжить многие ряды. Например, решим следующую задачу.

Задача 1.1. Продолжите ряд: 1, 2, 3, 4...

Решение. Данный ряд является последовательностью натуральных чисел, в которой каждый член этого ряда больше предыдущего на единицу. То есть мы просто должны называть следующие по порядку числа.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...



Сколько новых и непонятных слов, верно?

Что же такое **последовательность**? На самом деле это почти то же самое, что и ряд. Это ряд, который обладает каким-то правилом. Например, в предложенном ряду правило очень простое — числа просто следуют по порядку.

Кстати, число в последовательности можно называть и по-другому: «элемент последовательности», «член последова-

тельности», «член ряда» и не только. Надеемся, что вы не запутаетесь со всеми этими словами.

Что такое **натуральные** числа? Скорее всего, вы ещё не проходили другие виды чисел. Натуральные числа — это такие числа, с помощью которых можно посчитать количество детей в классе, то есть это числа 1, 2, 3 . . . Другими словами, это целые числа, которые больше, чем ноль. Ноль — число целое, но не натуральное.

Ещё бывают так называемые «**отрицательные**» числа. Это числа, которые меньше нуля. Например, температура зимой, когда выпадает снег, часто становится отрицательной. Но так бывает не во всех странах.

Также вы наверняка слышали про «**дробные**» числа. Например, это такое число, как «половина». Вместе дробные и целые числа составляют числа **рациональные**, вы ещё услышите это слово в восьмом классе.

Правила, по которым строятся последовательности, бывают очень разнообразными. Давайте решим, например, такую задачу.

Задача 1.2. Найдите закономерность (правило, по которому записываются числа).

Пользуясь этим правилом, продолжите ряд:

15, 14, 13, 12, 11 . . .

Решение. В этом ряду каждое число меньше предыдущего на единицу, то есть это будет «счёт с конца». Тогда ряд надо продолжать вот так:

Ответ: 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8 . . .

□

Правила могут требовать и каких-то знаний математики. Например, важно уметь складывать и вычитать. Решим, например, вот такую задачу.

Задача 1.3. Продолжите ряд: 1, 4, 7, 10 . . .

Решение. В данном ряду разность между соседними членами равна 3. Проверим это: $4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$. Значит каждый следующий член ряда больше предыдущего на 3. Тогда, после 10 нужно поставить число $10 + 3 = 13$, потом будут идти $13 + 3 = 16$, $16 + 3 = 19$ и так далее.

Ответ: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 21, 24, 27, 30 . . .

□

А если попробовать ещё хитрее? Например, действия могут чередоваться.

Задача 1.4. Продолжите ряд: 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7 . . .

Решение. Что же тут происходит? Вначале, мы прибавили 3, потом вычли 1, потом опять прибавили 3, потом опять вычли 1 и так далее. Кажется, мы нашли закономерность! Продолжая эти же действия, мы получаем ответ:

Ответ: 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, 12, 11 . . .

□

Иногда закономерность бывает ещё более сложной: мы должны не только понимать, что же мы прибавляем или вычитаем каждый раз, но ещё и смотреть на предыдущие числа последовательности.

Рассмотрим, наверное, одну из самых знаменитых последовательностей. Она называется «**числа Фибоначчи**».

Задача 1.5. Продолжите ряд: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

Решение. Как можно решать такую закономерность? Проще всего будет между каждыми двумя числами написать что между ними происходит.

$$\begin{array}{cccccccc} & +0 & +1 & +1 & +2 & +3 & +5 & \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \end{array}$$

Что же мы заметили? Что числа, записанные сверху, по сути повторяют числа, написанные снизу. Если, разумеется, не обращать внимания на ноль. А что же тогда будет дальше? Для начала продолжим верхний ряд так, чтобы он больше повторял нижний.

$$\begin{array}{cccccccccc} & +0 & +1 & +1 & +2 & +3 & +5 & +8 & +13 & \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & & & \end{array}$$

А теперь, зная, что должно происходить с числами, мы можем продолжить и нижний ряд.

$$\begin{array}{cccccccccc} & +0 & +1 & +1 & +2 & +3 & +5 & +8 & +13 & \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & \end{array}$$

Ответ: 1,1,2,3,5,8,13, 21, 34...

□

Хорошо, мы придумали интересную закономерность и решили эту задачу. Но почему же числа Фибоначчи настолько знамениты?

Потому что мы могли бы рассуждать и по-другому:

- $1+1=2$
- $1+2=3$
- $2+3=5$
- $3+5=8$
- $5+8=13$

Мы видим, что каждое новое число нашей последовательности — это сумма двух предыдущих чисел. Это уже гораздо более изящно, не правда ли?

Говоря более «математически», числа Фибоначчи — это такая последовательность, которая начинается с чисел 0 и 1, а каждый следующий элемент — это сумма двух предыдущих. То есть это последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5...

Кстати, Фибоначчи на самом деле звали совсем не так. Его звали Леона́рдо Пиза́нский, и он жил примерно в 1170—1250 годах, то есть в средние века. Как можно догадаться, он проживал в городе Пиза. Тогда этот город находился в Пизанской республике, но такой страны больше не существует, а сейчас Пиза находится в Италии.

Кстати, Леона́рдо Пиза́нский ещё и один из тех учёных, кто принёс в Европу популярность так называемых арабских цифр — цифр, которыми мы пользуемся сейчас. До этого в основном все пользовались римскими цифрами, про которые мы вам ещё расскажем.

Вернёмся к нашим закономерностям. Иногда требуется не продолжить последовательность, а найти пропущенные числа.

Задача 1.6. В цепочке чисел найдите закономерность и вставьте пропущенные числа: 18, 16, 14, ..., 10, 8, ..., 4, 2.

Решение. В данном ряду разность между соседними членами равна 2. И правда:

$$18 - 16 = 16 - 14 = 10 - 8 = 4 - 2 = 2.$$

Это значит, что каждый следующий член ряда меньше предыдущего на 2. Тогда нашей последовательностью будет: 18, 16, 14, **12**, 10, 8, **6**, 4, 2.

Не забудьте проверить, чтобы вставленные числа не нарушали закономерность! Тут всё хорошо: $14 - 12 = 12 - 10 = 8 - 6 = 6 - 4 = 2$. Но на олимпиадах, особенно через несколько лет, вас могут попытаться перехитрить. \square

Мы с вами рассмотрели одну последовательность, которая имеет своё название, но на самом деле таких последовательностей много.

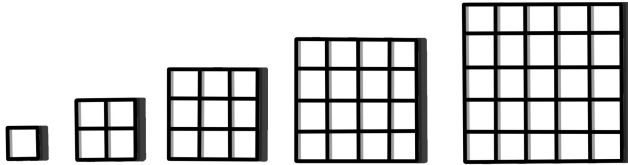
Задача 1.7. Продолжите ряд: 1, 4, 9, 16, 25...

Решение. Как и раньше, напомним, что же происходит между каждыми двумя числами.

$$\begin{array}{ccccccc} & +3 & +5 & +7 & +9 & & \\ & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & & \end{array}$$

Что мы можем заметить? Что числа сверху — сами по себе последовательность. В верхней последовательности каждое следующее число на 2 больше, чем предыдущее. Значит, потом мы должны прибавлять $9 + 2 = 11$, $11 + 2 = 13$ и так далее. Тогда следующими членами нашей последовательности будут $25 + 11 = 36$, $36 + 13 = 49$. \square

Мы нашли решение задачи. Но, как и с числами Фибоначчи, не всё так просто. Найденные нами числа имеют своё название: это **квадратные числа**. Почему же они квадратные?



Нарисуем квадраты. В первом квадрате у нас одна клетка, во втором — четыре клетки, в третьем — девять клеток, в четвертом — шестнадцать клеток, в пятом их двадцать пять. Знакомые числа, не правда ли? Так вот поэтому эти числа и называются квадратными: это количество клеток в последовательных квадратах.

Задача 1.8. Продолжите ряд: 1, 3, 6, 10, 15...

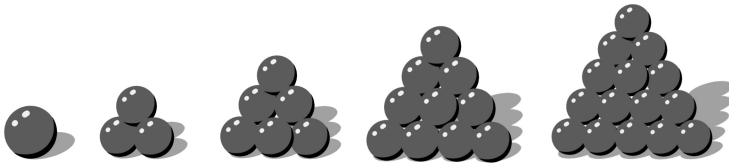
Решение. Как и раньше, напишем, что же происходит между каждыми двумя числами.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & +2 & +3 & +4 & +5 & & \\
 & \frown & \frown & \frown & \frown & & \\
 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & &
 \end{array}$$

Что мы можем заметить? Что числа сверху — тоже последовательность, причём самая простая. В ней каждое следующее число на 1 больше, чем предыдущее. Значит, потом мы должны прибавлять $5 + 1 = 6$, $6 + 1 = 7$ и так далее. Тогда следующими членами нашей последовательности будут числа $15 + 6 = 21$, $21 + 7 = 28$. \square

И эти числа тоже имеют своё название: это **треугольные числа**. Почему же они треугольные?

Представим, что мы складываем пушечные ядра в пирамидки, а точнее — в треугольники. Получим следующую закономерность:



В первой кучке у нас одно ядро, во второй кучке три ядра, в третьей кучке — шесть и так далее. И да, мы точно видим, что это ровно та же самая последовательность, которую мы только что рассмотрели.

Решим напоследок одну хитрую задачку, которая, казалось бы, совсем не имеет отношения к математике.

Задача 1.9. Продолжите последовательность: О, Д, Т, Ч, П...

Решение. Тут мы могли бы постараться вспомнить алфавит, найти для каждой из букв её порядковый номер в алфавите и так далее. Но у нас так ничего не получится.

Что же на самом деле значат эти буквы? Вспомним счёт по порядку. Один, два, три, четыре, пять... Какие же у нас первые буквы в этом счёте? **Один, Два, Три, Четыре, Пять.** Это и есть наша последовательность! Посчитаем дальше: **Шесть, Семь, Восемь, Девять...**

Мы получили ответ: О, Д, Т, Ч, П, Ш, С, В, Д...



Мы с вами рассмотрели много разных последовательностей. Надеемся, теперь вы совсем не боитесь этой темы. Дома вы можете потренироваться, сделав ещё несколько упражнений.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите закономерность (правило, по которому записываются числа).

Пользуясь этим правилом, продолжите предложенные последовательности.

Задача 1. 17, 19, 21, 23, 25 ...

Задача 2. 1, 2, 4, 8, 16 ...

Задача 3. 1, 2, 4, 7, 11 ...

Задача 4. 10, 6, 8, 4, 6 ...

Задача 5. 23, 23, 21, 25, 19, 27 ...

Задача 6. 1, 3, 5, 9, 15, 25 ...

В каждой цепочке найдите закономерность и вставьте пропущенные числа:

Задача 7. 3, 6, ..., 12, 15, 18.

Задача 8. 65, 60, 55, ..., 45, 40, 35.

Задача 9. 20, ..., 21, 15, 22, 14, 23, 13.

Задача 10. 45, 50, 40, ..., 35, 70, 30, 80.

Задача 11. 2, 1, 3, 2, 4, 3, ..., 4, 6.

Задача 12. 45, 36, 28, 21, ..., 10, 6.

Разбор задач для самостоятельного решения

Задача 1. 17, 19, 21, 23, 25 ...

Решение. Какая у нас закономерность? Мы всё время прибавляем 2. Тогда последовательность будет такой:

17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 ...

Задача 2. 1, 2, 4, 8, 16 ...

Решение. Что происходит тут? $1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 8 = 16$...

Каждое следующее число — это сложенное два раза предыдущее. Тогда дальше будут такие числа: $16 + 16 = 32$, $32 + 32 = 64$, $64 + 64 = 128$.

Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 ...

Задача 3. 1, 2, 4, 7, 11 ...

Решение. Нарисуем, что же происходит между соседними числами:

$$\begin{array}{cccccc}
 & +1 & +2 & +3 & +4 & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\
 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & &
 \end{array}$$

Мы видим, что каждый раз прибавляется число на 1 большее. Тогда дальше мы должны будем прибавлять 5, 6 и так далее. Значит, после 11 будет идти $11 + 5 = 16$, дальше будет $16 + 6 = 22$ и так далее.

Ответ: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29 ...

Задача 4. 10, 6, 8, 4, 6...

Решение. Нарисуем между соседними числами, что же между ними происходит:

$$\begin{array}{cccccc}
 & -4 & +2 & -4 & +2 & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 10 & 6 & 8 & 4 & 6 &
 \end{array}$$

Вначале мы вычли 4, потом прибавили 2, потом опять вычли 4, опять прибавили 2 и так далее. Продолжим эти чередующиеся действия. После 6 будет идти $6 - 4 = 2$, потом $2 + 2 = 4$ и так далее.

Ответ: 10, 6, 8, 4, 6, 2, 4, 0...

□

Задача 5. 23, 23, 21, 25, 19, 27...

Решение. А тут всё гораздо хитрее! Нужно смотреть на числа через одно. Что же тут происходит? Давайте нарисуем:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & -2 & & -2 & & & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\
 23, & 23, & 21, & 25, & 19, & 27, & \dots \\
 & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \\
 & +2 & & +2 & & &
 \end{array}$$

Тогда следующее число будет через одно от 19. Значит, оно будет на 2 меньше, чем 19: $19 - 2 = 17$. Дальше будет $27 + 2 = 29$ и так далее.

Ответ: 23, 23, 21, 25, 19, 27, 17, 29, 15, 31...

□

Задача 6. 1, 3, 5, 9, 15, 25...

Решение. Это самая сложная из предложенных вам последовательностей.

- $1 + 3 = 4$, а если мы прибавим ещё единицу, то будет $4 + 1 = 5$;
- $3 + 5 = 8$, а $8 + 1 = 9$;
- $5 + 9 = 14$, а $14 + 1 = 15$;
- $9 + 15 = 24$, а $24 + 1 = 25$.

То есть мы каждый раз складываем два предыдущих числа, а потом прибавляем ещё единицу. Что же будет дальше?

- $15 + 25 = 40$, а $40 + 1 = 41$;
- $25 + 41 = 66$, а $66 + 1 = 67$.

Ответ: 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67...



Задача 7. 3, 6, ..., 12, 15, 18.

Решение. Здесь каждое число на 3 больше, чем предыдущее. Значит, пропущено число $6 + 3 = 9$.

Ответ: 3, 6, **9**, 12, 15, 18.



Задача 8. 65, 60, 55, ..., 45, 40, 35.

Решение. Здесь каждое число на 5 меньше, чем предыдущее. Значит, пропущено число $55 - 5 = 50$.

Ответ: 65, 60, 55, **50**, 45, 40, 35.



Задача 9. 20, ..., 21, 15, 22, 14, 23, 13.

Решение. Тут опять будет последовательность из чисел через одно:

$$20, \dots, 21, 15, 22, 14, 23, 13$$

Значит, пропущено число на единицу большее, чем 15.

Ответ: 20, **16**, 21, 15, 22, 14, 23, 13.

Задача 10. 45, 50, 40, ..., 35, 70, 30, 80.

Решение. И тут будет последовательность из чисел через одно:

$$45, 50, 40, \dots, 35, 70, 30, 80$$

Значит, пропущено число на десять большее, чем 50, и при этом на 10 меньшее, чем 70. Это число 60.

Ответ: 45, 50, 40, **60**, 35, 70, 30, 80.

Задача 11. 2, 1, 3, 2, 4, 3, ..., 4, 6.

Решение. Здесь снова рассмотрим последовательность чисел через одно:

$$2, 1, 3, 2, 4, 3, \dots, 4, 6$$

Ответ: 2, 1, 3, 2, 4, 3, **5**, 4, 6.

Задача 12. 45, 36, 28, 21, ..., 10, 6.

Решение. А тут снова надо просто отметить, что же происходит между соседними числами.

$$45, \overset{-9}{\curvearrowright} 36, \overset{-8}{\curvearrowright} 28, \overset{-7}{\curvearrowright} 21, \dots, \overset{-4}{\curvearrowright} 10, 6$$

Если мы посмотрим на верхние числа, то увидим, что они уменьшаются на 1. Тогда, после того как мы вычтем 7, надо вычесть 6, а потом вычесть 5. Значит, пропущено было число $21 - 6 = 15$.

Ответ: 45, 36, 28, 21, **15**, 10, 6.



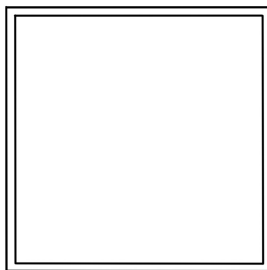
12 стульев



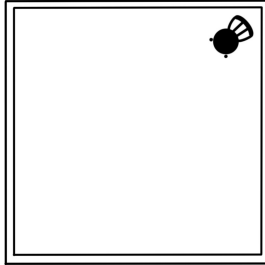
Материал для разбора на занятии

Давайте начнём новую тему сразу с олимпиадной задачи для 3 класса.

Задача 2.1. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 5 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен стояло по 2 стула. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!

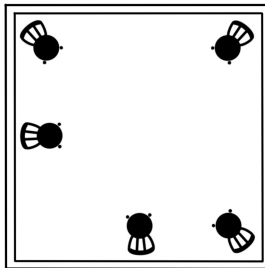


Решение. Казалось бы, это вообще невозможно: разве можно пять поделить на 4 равных части? Да и вообще, четыре раза по 2 будет восемь, а никак не пять. Но на самом деле тут есть подвох: если мы поставим стул в угол, то он будет одновременно стоять у двух стен.



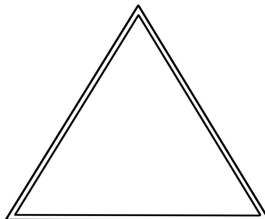
Например, этот стул стоит одновременно у стены, которая сверху, и у стены, которая справа.

Тогда, если мы немного поперебираем разные варианты, мы можем получить такую расстановку:

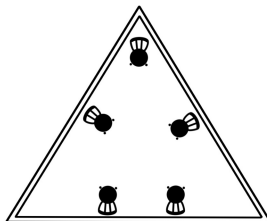


Комнаты могут быть не только квадратными. Например, они бывают и треугольными.

Задача 2.2. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 5 стульев так, чтобы у каждой из трех стен стояло по 2 стула. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



Решение. Попробовав разные варианты, мы можем получить, например, вот такую расстановку:



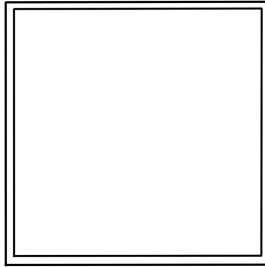
□

В этой главе мы не даём вам много новой теории. Достаточно просто не забывать смотреть в углы и внимательно считать количества стульев у каждой стенки.

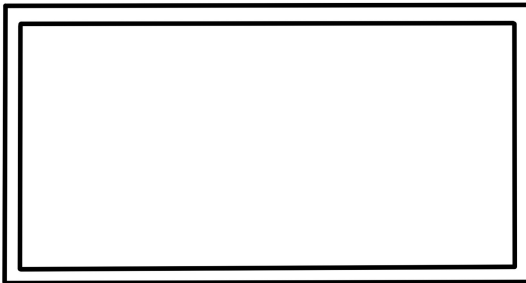
А теперь потренируйтесь на домашних задачах!

Задачи для самостоятельного решения

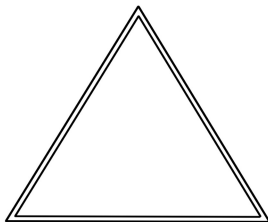
Задача 13. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 6 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен стояло по 2 стула. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



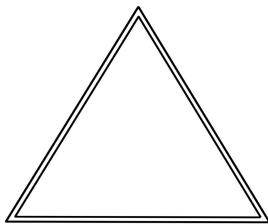
Задача 14. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 14 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



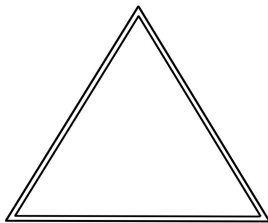
Задача 15. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 10 стульев так, чтобы у каждой из трёх стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



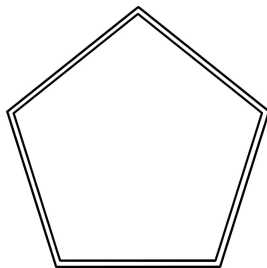
Задача 16. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 11 стульев так, чтобы у каждой из трёх стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



Задача 17. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 9 стульев так, чтобы у каждой из трёх стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!

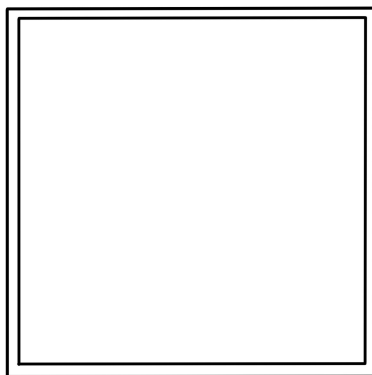


Задача 18. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 9 стульев так, чтобы у каждой из стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!

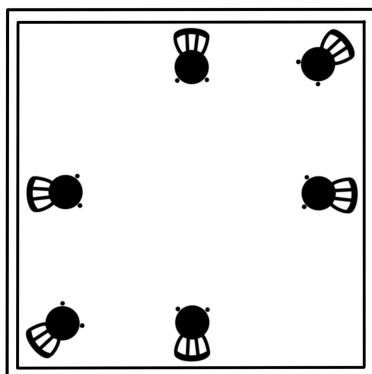


Разбор задач для самостоятельного решения

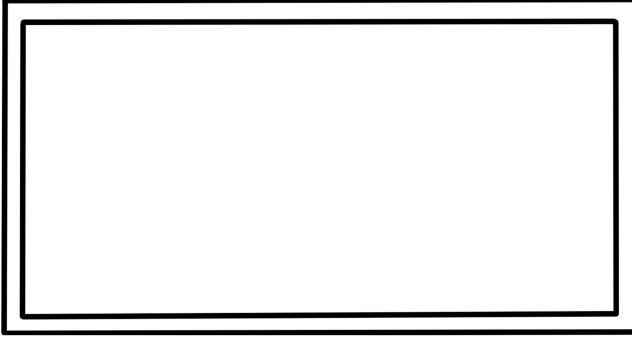
Задача 13. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 6 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен стояло по 2 стула. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



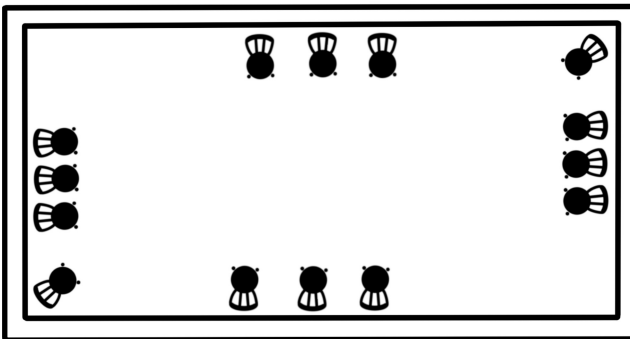
Ответ.



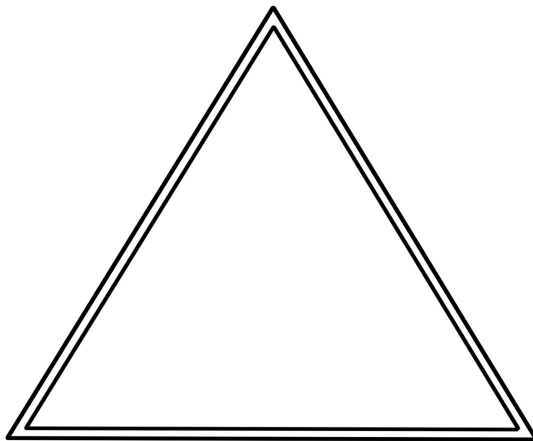
Задача 14. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 14 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



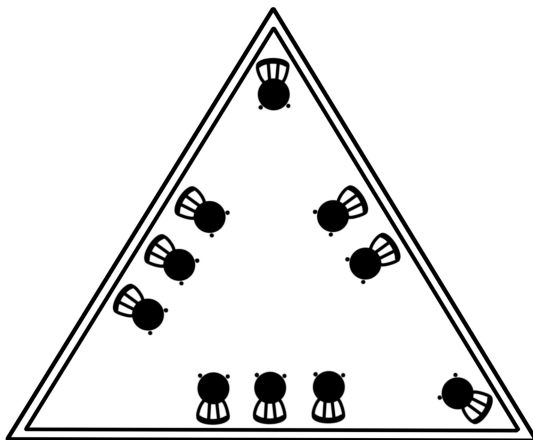
Ответ.



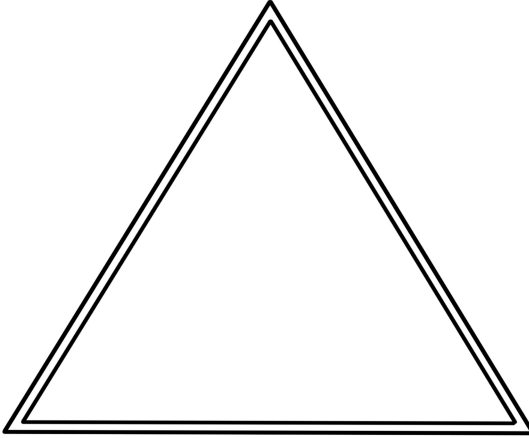
Задача 15. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 10 стульев так, чтобы у каждой из трёх стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



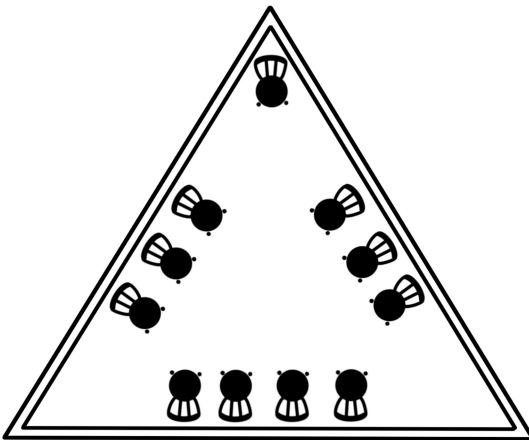
Ответ.



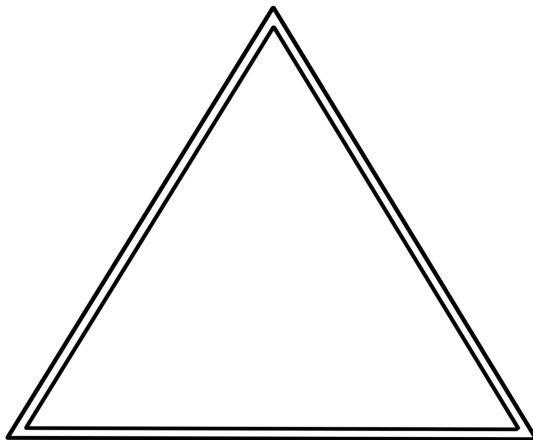
Задача 16. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 11 стульев так, чтобы у каждой из трёх стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



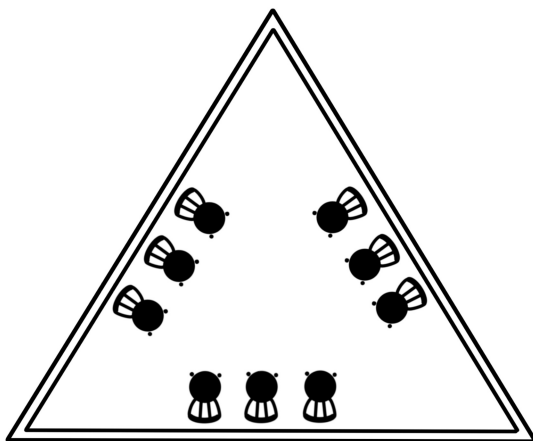
Ответ.



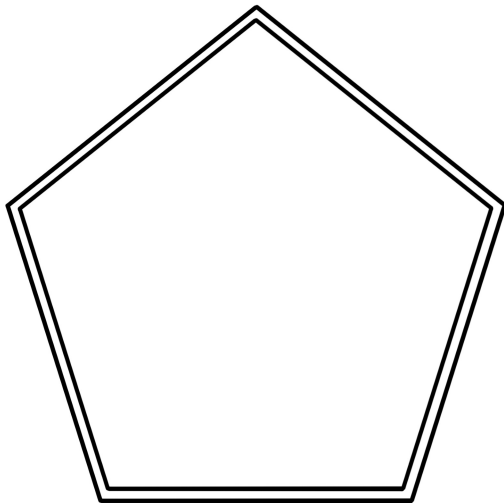
Задача 17. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 9 стульев так, чтобы у каждой из трёх стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



Ответ.



Задача 18. Покажите на рисунке, как расставить в комнате 9 стульев так, чтобы у каждой из стен стульев стояло поровну. Стулья могут стоять только у стен, в центре их ставить нельзя!



Ответ.

