ЦРИТО
Центр Развития
ИТ-Образования

ОЛИМПИАДНЫЕ
ШКОЛЫ МФТИ

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ИТ-ОБРАЗОВАНИЯ

68 УРОКОВ

для подготовки к ЕГЭ и перечневым олимпиадам по математике

Методическое пособие

Бабичева Н.Н., Бабичев С.Л., Бабичев Д.С., Бабичева Т.С.
Под редакцией Бабичевой Н.Н.

Федеральное государственное автономное
образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Центр развития ИТ-образования

68 уроков
для подготовки к ЕГЭ
и перечневым олимпиадам
по математике

Методическое пособие

Бабичева Н.Н., Бабичев Д.С., Бабичев С.Л., Бабичева Т.С.

Под редакцией Бабичевой Н.Н.

ISBN 978-5-97060-843-2

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

Пособие поможет репетиторам, ведущим факультативов и различных курсов подготовить учащихся 10-11 классов к успешной сдаче ЕГЭ и хорошим результатам на перечневых олимпиадах. Также оно будет очень полезно и при самостоятельной подготовке школьников к различным экзаменам и олимпиадам по математике. Книга содержит задачи из открытого банка заданий ЕГЭ, задачи экзаменов, диагностических и тренировочных работ, олимпиадных задач за последние годы. Приведены все основные факты школьной математики, разобраны сложные типы уравнений, неравенств, экономических и олимпиадных задач.

Оглавление

Введение

Часто школьники неверно оценивают глубину пробелов собственных знаний в изучаемом предмете. Что-то было плохо понято, что-то давно забыто. А всё ближе пора олимпиад и экзаменов. В деле успешного контроля и самоконтроля знаний по математике данная книга будет очень полезна. Авторы постарались охватить все факты, входящие в школьный курс, предоставив необходимый теоретический и практический материал. Задания всех уроков в основном ориентированы на ЕГЭ, но для более полного охвата тем приведены дополнительные задания. Чтобы более лёгкие первые уроки не были скучны для продвинутых абитуриентов, добавлено несколько задач повышенной сложности. В более сложных уроках задачи математических олимпиад встречаются чаще. Правильный порядок повторения ранее изученных в школе тем и ввода новых фактов – одно из достоинств данного курса. Если абитуриенту достаточно 80 баллов по ЕГЭ, то можно ограничиться первыми 50 уроками, в которые не входят сложная планиметрия, параметры и последняя задача олимпиадного уровня. Для 60 баллов с запасом хватит 30 уроков (1-23, 25, 27, 31, 33, 35, 45, 46).

Авторы будут благодарны за конструктивную критику, замечания и возможные дополнения, которые можно прислать по адресу babichev.sl@mipt.ru.

Урок №1. Натуральные числа. Делимость. Действия с числовыми дробями. Пропорция. Модуль.

Множество натуральных чисел:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Делимость

Делителем натурального числа a называют натуральное число, на которое a делится без остатка. Число 1 является делителем любого натурального числа.

Кратным натуральному числу a называют натуральное число, которое делится без остатка на a. Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных. Наименьшим из кратных натурального числа является само это число.

Теоремы о делимости

- Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.
- Если только одно из слагаемых не делится на какое-нибудь число, то и сумма не делится на это число.
- Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Признаки и свойства делимости чисел

- Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2.
- Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.
- Натуральное число, содержащее не менее трёх цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа.
- Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

- Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.
- Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только 2 делителя: единицу и само это число.

Натуральное число называют **составным**, если оно имеет более двух делителей.

Число 1 — **ни простое, ни составное.**

Основная теорема арифметики простых чисел. Любое составное натуральное число можно представить единственным образом в виде произведения простых чисел (порядок сомножителей при этом не принимается во внимание).

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b, называют **наибольшим общим делителем (НОД)** этих чисел.

Числа a и b называются **взаимно простыми**, если наибольший общий делитель этих чисел равен 1.

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, которое кратно и a, и b.

Модуль действительного числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля:

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|$$

Пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Обсуждение темы

Примеры на разложение чисел на простые множители.

Примеры на нахождение НОД и НОК.

Нахождение НОД по алгоритму Евклида.

Вывод признаков делимости на 3, 8, 25, 11 и 7.

Действия с числовыми дробями.

Задания

1.1. (Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников 2018 года, задача №1) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

1.2. В портовом городе начинаются три туристских теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй 20 суток и третий 12 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трём маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание?

1.3. Какие из следующих утверждений верны: а) два чётных числа не могут быть взаимно простыми; б) чётное и нечётное числа всегда взаимно простые; в) два различных простых числа всегда взаимно простые; г) простое и составное числа могут быть взаимно простыми; д) последовательные натуральные числа всегда взаимно простые.

1.4. Придумайте число, которое меньше своего обратного в 9 раз.

1.5. Какое из чисел — правильная дробь или дробь ей обратная, — на координатном луче расположено ближе к единице?

1.6. Числа 90 и 100 разделили на одно и то же число. В первом случае получили остаток 18, а во втором случае — остаток 4. Найдите делитель.

1.7. Может ли число, составленное из 13 единиц, 13 двоек и 13 троек, быть полным квадратом?

1.8. Может ли число, составленное из 13 двоек, 13 троек, 13 четвёрок и 13 пятёрок быть полным квадратом?

1.9. Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q — простые числа, большие 3.

1.10. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. Сколькими нулями может оканчиваться число A? Укажите все варианты.

Домашнее задание

1.11. Каким числом, чётным или нечётным, является: а) квадрат чётного числа; б) квадрат нечётного числа; в) куб чётного числа?

1.12. Какую цифру нужно приписать к числу 10 слева и справа, чтобы получилось четырёхзначное число, делящееся на 6?

1.13. Чему равен НОК двух взаимно простых чисел?

1.14. При каких значениях m верно равенство: $m - |m| = 2m$?

1.15. Найдите НОД и НОК чисел 324, 111 и 432.

1.16. Из 35 учащихся 5 класса 22 выписывают журнал, 27 выписывают газету, а 3 ученика не выписывают ни газету, ни журнал. Сколько учащихся выписывают газету и журнал?

1.17. Какую часть часа составляют 45 мин, 12 мин, 15 мин, 35 мин?

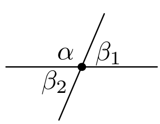
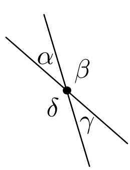
Какую часть развёрнутого угла составляют 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°?

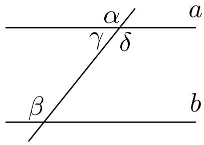
Урок №2. Планиметрия. Основные объекты и аксиомы. Углы. Треугольники: свойства, признаки равенства и подобия.

Обозначения, принятые в данном курсе

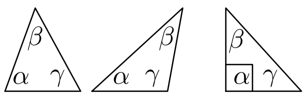
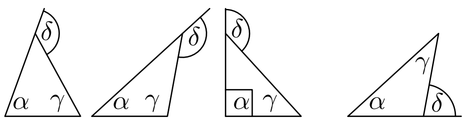
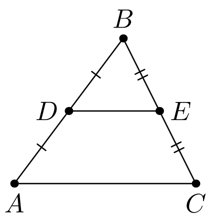
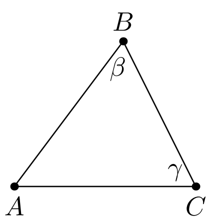
Для треугольника ABC будем использовать следующие обозначения:
$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ — длины сторон (или просто стороны);
$\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$ — величины углов;
h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные соответственно из вершин A, B, C на стороны a, b, c (или их продолжения);
m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые соответственно из вершин A, B, C к сторонам a, b, c;
l_a, l_b, l_c — биссектрисы, проведённые соответственно из вершин A, B, C к сторонам a, b, c;
r — радиус вписанной окружности;
I — точка пересечения биссектрис, являющаяся центром вписанной окружности (инцентр);
R и O — радиус и соответственно центр описанной окружности;
M — точка пересечения медиан (центроид, центр масс);
H — точка пересечения высот или их продолжений (ортоцентр или внешний ортоцентр);
p — полупериметр треугольника $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$;
$p_a = p - a,\ p_b = p - b,\ p_c = p - c$;
$S(S_{\triangle ABC})$ — площадь треугольника.

Свойства углов и параллельных прямых

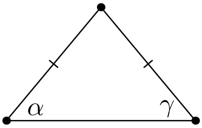
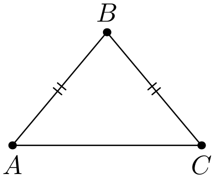
	$\alpha + \beta_1 = 180^\circ$ $\alpha + \beta_2 = 180^\circ$
	$\alpha = \gamma$ $\beta = \delta$

	Если $a \parallel b$, то $\alpha = \beta$ $\beta = \delta$ $\beta + \gamma = 180°$ Обратно: из любого из этих равенств $\Rightarrow a \parallel b$

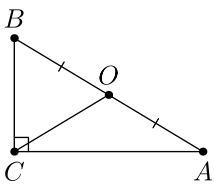
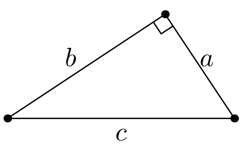
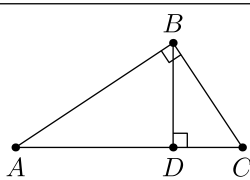
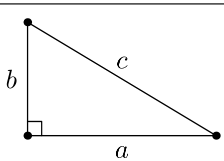
Свойства произвольного треугольника

	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
	Внешний угол треугольника $\delta = \alpha + \gamma$
	Средняя линия $DE \parallel AC$ $DE = \dfrac{1}{2}AC$
	Если $AC > AB$, то $\beta > \gamma$

Свойства равнобедренного треугольника

	$\angle\alpha = \angle\gamma$
	В равнобедренном треугольнике $l_b = m_b = h_b$ **Обратное утверждение:** каждое из трёх указанных равенств означает, что $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB = BC$)

Свойства прямоугольного треугольника

	$m_c = R = \dfrac{1}{2}c = OC$, верно и обратное: **Признак прямоугольного треугольника:** если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник — прямоугольный
	**Теорема Пифагора** $c^2 = a^2 + b^2$
	$\triangle ABD \sim \triangle CBD$ $\quad BD = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$ $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ $\quad BD = \sqrt{AD \cdot DC}$
	$r = \dfrac{a + b - c}{2}$

Неравенство треугольника: длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон.

Равенство и подобие треугольников

- 3 признака равенства треугольников:
  - по трём сторонам;
  - по двум сторонам и углу между ними;
  - по стороне и двум прилежащим к ней углам.
- 3 признака подобия треугольников:
  - по двум углам;
  - по двум пропорциональным сторонам и углу между ними;
  - по трём пропорциональным сторонам.

Обсуждение темы

Основные объекты планиметрии: точка, прямая, луч, отрезок, угол.

Основные аксиомы планиметрии: принадлежности, порядка, мер отрезков и углов, параллельности.

Виды треугольников. Понятие медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Построение высот в разных видах треугольников.

Вывести признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников из признаков равенства и подобия произвольных треугольников.

Доказать признак прямоугольного треугольника.

Вывести свойства высоты, проведённой из вершины прямого угла.

Задания

2.1. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

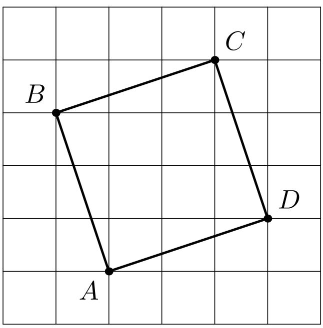
2.2. Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{8}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

2.3. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 40°. Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

Домашнее задание

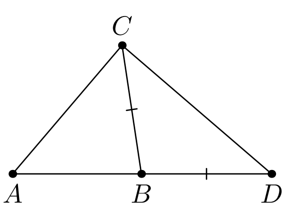
2.4. Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

2.5. Найдите радиус r окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$. В ответе укажите $r\sqrt{10}$.

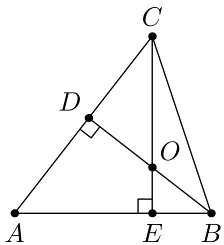


2.6. Один из внешних углов треугольника равен 85°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $2 : 3$. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

2.7. В треугольнике ABC угол A равен 44°, угол C равен 62°. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.

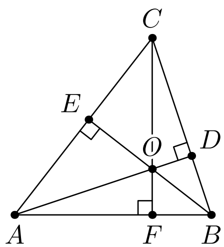


2.8. В треугольнике ABC угол A равен $72°$, а углы B и C — острые. BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE (в градусах).



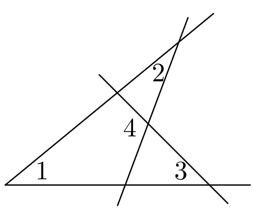
2.9. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$.

2.10. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $82°$. AD, BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.

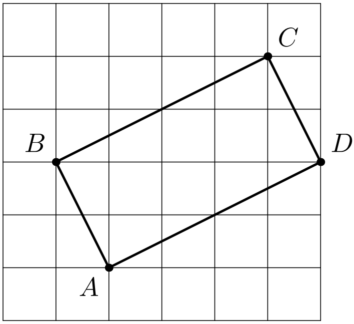


2.11. Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен $60°$. Найдите радиус описанной окружности этого прямоугольника.

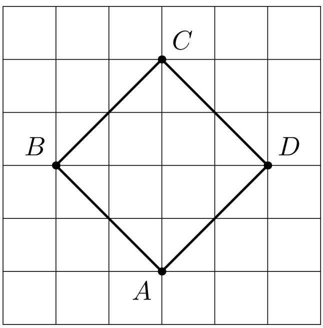
2.12. На рисунке угол 1 равен $46°$, угол 2 равен $30°$, угол 3 равен $44°$. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.



2.13. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



2.14. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.



2.15. В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 7. Найдите периметр этого квадрата.

Урок №3. Числовые множества. Десятичная система счисления. Понятие процента, сложного процента.

Числовые множества

Множество натуральных чисел:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Множество целых чисел:
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Множество рациональных чисел:
$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (рациональных и иррациональных).

Иррациональные числа не могут быть представимы в виде обыкновенной дроби, как рациональные. Примеры: число π,$\sqrt{3}$, и т. д.

Десятичная система счисления

Форма записи десятичного числа:
$3173 = 3 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$.

Приведение к стандартному виду:
$317{,}3 = 3{,}173 \cdot 10^2$; $0{,}00003173 = 3{,}173 \cdot 10^{-5}$.

Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь

Любую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби. При этом просто делят числитель на знаменатель, постепенно получая десятичные знаки. Периодически повторяющиеся группы цифр в десятичной записи числа называют периодом, а бесконечную десятичную дробь, имеющую такой период в своей записи, называют периодической. Для краткости период записывают один раз, заключая его в круглые скобки: $3/14 = 0{,}2142857142857142857\ldots = 0{,}2(142857)$. Если период начинается сразу после запятой, то дробь называют чистой периодической: $5{,}(674)$; если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называют смешанной периодической: $0{,}2(321); 7{,}32(6)$.

Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь

Рассмотрим дробь $3{,}1737373\ldots = 3{,}1(73)$ — смешанная периодическая дробь. Положим $x = 3{,}1(73)$. Умножим это число на 10 и получим чистую периодическую дробь $10x = 31{,}(73)$. Умножим x на 1000 и получим ещё одну чистую периодическую дробь $1000x = 3173{,}(73)$.

$1000x - 10x = 3173{,}(73) - 31{,}(73) \Rightarrow 990x = 3142 \Rightarrow x = 3142/990$.

Процент

Определение: Процентом называется сотая часть от числа, т.е. $1\%A = 0{,}01A$.

Примеры: $1\% = 0{,}01;\ 2\% = 0{,}02;\ 45\% = 0{,}45;\ 350\% = 3{,}5$.

Задача: Сколько процентов составляет число A от числа B?
Решение: $x = (A/B) \cdot 100\%$.

Задача: Число увеличилось на 20%, а затем полученное число уменьшилось на 25%. Как, в итоге, изменилось исходное число?
Решение: 1) $A_1 = 120\%A = 1{,}2A$.
2) $A_2 = 75\%A_1 = 0{,}75A_1 = 0{,}75 \cdot 1{,}2A = 0{,}9A = 90\%A$.
Ответ: число уменьшилось на 10%.

Если число A увеличить на $y\%$, то оно будет равно $A\left(1 + \dfrac{y}{100}\right)$.

Если число A уменьшить на $y\%$, то оно будет равно $A\left(1 - \dfrac{y}{100}\right)$.

Обсуждение темы

Примеры на перевод обыкновенных дробей и смешанных чисел в десятичные дроби и наоборот.

Задания

3.1. В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

3.2. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

3.3. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

3.4. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внёс 14% уставного капитала, Антон — 42 000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внёс Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

3.5. Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

3.6. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

3.7. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

3.8. Клиент **А** сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент **Б**. Ещё ровно через год клиенты **А** и **Б** закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент **А** получил на 847 рублей больше клиента **Б**. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

3.9. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если он, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

3.10. В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

3.11. В мебельный магазин поступили столы и стулья. Количество столов составляет 42% от числа стульев. Когда было продано 78% столов и 62% стульев, то столов осталось менее 300 штук, а стульев более 200. Сколько столов и сколько стульев поступило в магазин?

3.12. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объёма закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

3.13. Докажите, что дробь $\dfrac{1}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби только в том случае, если n в разложении на простые множители содержит только двойки и пятёрки.

Домашнее задание

3.14. Масса гуся на 25% больше массы утки. На сколько процентов масса утки меньше массы гуся?

3.15. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 30%, а ширину на 20%?

3.16. В городе **N** живёт 3000000 жителей. Среди них 20% детей и подростков. Среди взрослых 35% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых работает?

3.17. В сентябре 1 кг винограда стоил 60 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре ещё на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

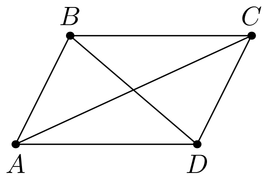
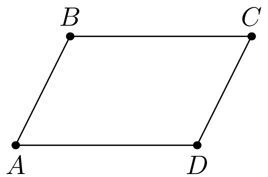
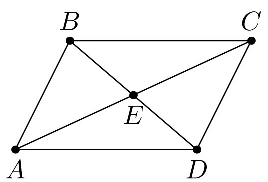
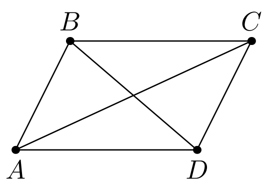
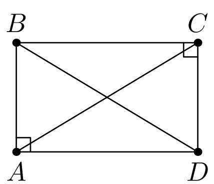
3.18. Из всего собранного зерна пшеница составляла 80%, причём 70% этой пшеницы была пшеница твёрдых сортов. Сколько тонн зерна было собрано, если твёрдой пшеницы было собрано 560 т?

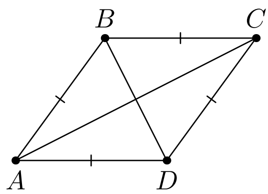
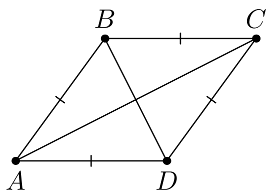
3.19. Выразите в виде десятичной или периодической дроби числа $\frac{5}{9}$, $1\frac{9}{75}$.

3.20 (ОММО 2013, №1). Ученикам 11 класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: химии, информатике или физике. Трое ребят приняли участие в тестировании по химии; более 40%, но менее половины учеников проходили тестирование по информатике и ровно треть — по физике. Сколько ребят участвовало в тестировании по информатике, если в классе присутствовало более 12 учеников?

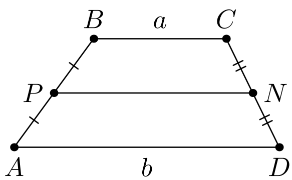
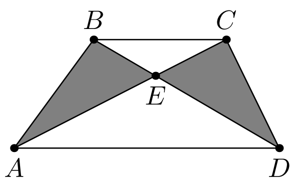
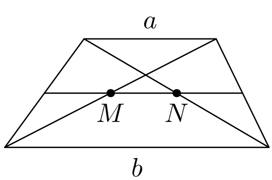
Урок №4. Планиметрия. Параллелограмм. Трапеция.

Параллелограмм

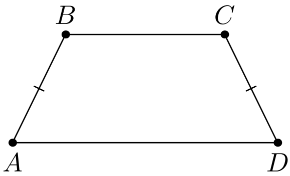
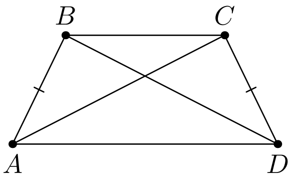
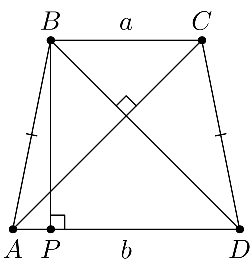
	$\triangle ABD = \triangle CBD$ $\triangle ABC = \triangle ADC$
	$AB = CD$ $BC = AD$ $\angle DAB = \angle BCD$ $\angle ABC = \angle ADC$
	$AE = EC$ $BE = ED$
	$BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$
	$AC = BD \ \Leftrightarrow ABCD$ — прямоугольник

	$AC \perp BD \Leftrightarrow ABCD$ — ромб
	В ромбе $ABCD$ AC и BD — биссектрисы углов

Трапеция

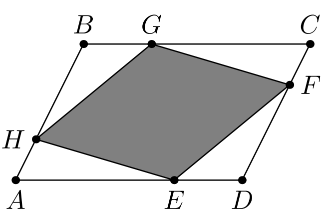
	$PN \parallel a$ $PN = \dfrac{a+b}{2}$
	$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DCE}$
	M и N — середины диагоналей $MN = \dfrac{1}{2}\lvert a-b \rvert$

Равнобочная трапеция

	$\angle BAD = \angle CDA$
	$AC = BD$
	$BD \perp AC \Leftrightarrow$ $BP = \dfrac{a+b}{2}$

Задания

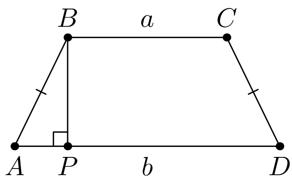
4.1. Доказать, что если в параллелограмме $ABCD$ выполняются соотношения $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{DF}{FC} = \dfrac{CG}{GB} = \dfrac{BH}{HA}$, то $HEFG$ — параллелограмм.



4.2. Доказать, что в трапеции отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей, параллельно основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции, равен среднему гармоническому длин оснований.

4.3. Доказать, что в равнобочной трапеции $ABCD$ (с основаниями a и b) выполняется

$$AP = \frac{b-a}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$

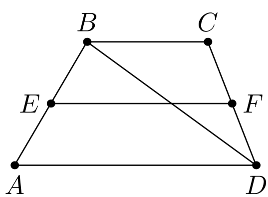


4.4. Доказать, что в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC и диагоналями, пересекающимися в точке E, треугольники BEC и AED подобны, а треугольники ABE и CED равновелики.

4.5. Доказать, что в равнобочной трапеции с перпендикулярными диагоналями высота трапеции равна её средней линии.

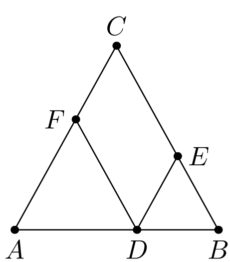
4.6. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.

4.7. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

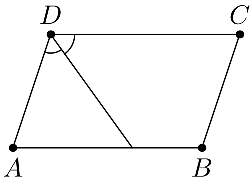


4.8. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, принадлежащих одной стороне. Ответ дайте в градусах.

4.9. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

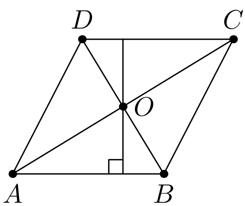


4.10. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

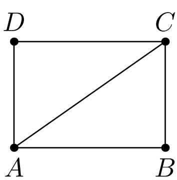


4.11. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.

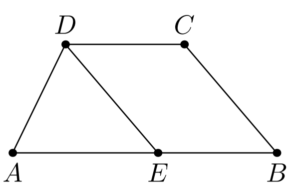
4.12. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



4.13. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24.



4.14. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



Домашнее задание

4.15. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AECB$.

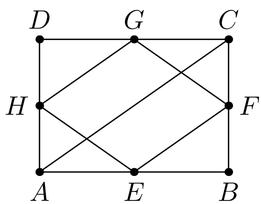
4.16. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Её площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

4.17. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.

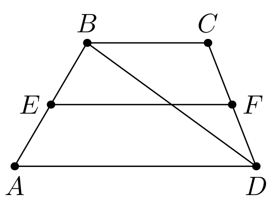
4.18. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.

4.19. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 153. Найдите площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

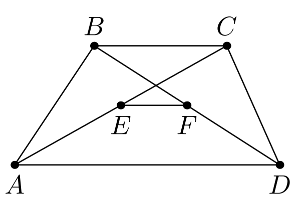
4.20. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.



4.21. Средняя линия трапеции равна 12. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 2. Найдите большее основание трапеции.



4.22. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



4.23. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите её среднюю линию.

4.24. Диагонали четырёхугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

4.25. В ромбе $ABCD$ угол ACD равен $43°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

4.26. Основания трапеции относятся как $2 : 3$, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание.

Урок №5. Одночлены. Многочлены. Формулы сокращённого умножения. Алгебраические дроби.

Одночленом называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведённых в степени с натуральными показателями.

Например, $2^3a^7bc^3$.

Одночленами считают также все числа, любые переменные и степени переменных.

Чтобы привести одночлен к **стандартному виду** нужно:

1) перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место;

2) перемножить все имеющиеся степени с одним буквенным основанием;

3) перемножить все имеющиеся степени с другим буквенным основанием и т.д.

Любой одночлен можно привести к стандартному виду.

Многочленом называют сумму одночленов. Например, $5a^2b-3ab^2-3a^2b+7c$.

Если в многочлене все члены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то говорят, что **многочлен записан в стандартном виде**.

Чтобы **умножить многочлен на одночлен**, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

Чтобы **умножить многочлен на многочлен**, нужно умножить каждый член одного многочлена поочерёдно на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Полученный многочлен надо привести к стандартному виду.

Чтобы **разделить многочлен на одночлен**, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Способы разложения многочлена на множители

В общем случае разложение многочленов на множители не всегда возможно. Но существует несколько случаев, когда это выполнимо.

1) Если все члены многочлена содержат в качестве сомножителя одно и то же выражение, то его можно вынести за скобки.

2) Использовать способ группировки.

   Пример: $ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b)$.

3) Использовать формулы сокращённого умножения.

4) Использовать формулу разложения на множители квадратного трёхчлена.

   $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2- корни квадратного трёхчлена.

Формулы сокращённого умножения

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \text{ — квадрат суммы}$$
$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2 \text{ — квадрат разности}$$
$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2 \text{ — разность квадратов}$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \text{ — куб суммы}$$
$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \text{ — куб разности}$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3 \text{ — сумма кубов}$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3 \text{ — разность кубов}$$

Деление многочленов может быть выполнено по следующей схеме:

$$\begin{array}{rrrr|l}
16a^3 & +8a^2 & -5a & +7 & 4a^2-a+2 \\ \cline{5-5}
16a^3 & -4a^2 & +8a & & 4a+3 \\ \cline{1-3}
 & 12a^2 & -13a & +7 & \\
 & 12a^2 & -3a & +6 & \\ \cline{2-4}
 & & -10a & +1 &
\end{array}$$

Алгебраической дробью называют отношение двух многочленов P и Q. При этом используют запись $\dfrac{P}{Q}$, где P — числитель, Q — знаменатель алгебраической дроби.

Например, $\dfrac{8a^3+6a^2b-b}{2a^2}$.

Для того, чтобы **сократить алгебраическую дробь**, нужно разложить на множители ее числитель и знаменатель, а затем сократить общий множитель.

Обсуждение темы

Треугольник Паскаля.

Примеры на деление многочлена на многочлен: нацело и с выделением целой части.

Задания

5.1. Докажите, что значение выражения $10^6 - 5^7$ кратно 59.

5.2. Разложите на множители $30x^2 + 10c - 25cx - 12x$.

5.3. Докажите, что $51^3 - 26^3$ делится на 25.

5.4. Разложите на множители, использовав метод выделения полного квадрата двучлена: $b^4 - 4b^2 - 5$.

5.5. Разложите на множители, представив один из членов многочлена в виде суммы подобных слагаемых: $b^2 - 3b - 4$.

5.6. Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если это число разделить на разность его цифр, то в частном получится 24, а в остатке 2. Найдите исходное число.

5.7. Какое двузначное число обладает следующим свойством: если между его цифр поместить цифру 0, то число увеличится в 6 раз?

5.8. Пусть $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = -3$. Вычислите:

а) $x_1^4 + x_2^4$;

б) $(x_1 - x_2)^2$;

в) $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$;

г) $x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^2$.

5.9. Найдите $61a - 11b + 50$, если $\dfrac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$.

5.10. Найдите $\dfrac{a + 9b + 16}{a + 3b + 8}$, если $\dfrac{a}{b} = 3$.

5.11. Найдите значение выражения $3p(a) - 6a + 7$, если $p(a) = 2a - 3$.

5.12. Найдите значение выражения $2x + y + 6z$, если $4x + y = 5$, $12z + y = 7$.

5.13. Найдите $\dfrac{p(b)}{p(1/b)}$, если $p(b) = \left(b + \dfrac{3}{b}\right)\left(3b + \dfrac{1}{b}\right)$, при $b \neq 0$.

5.14. Зная, что $\dfrac{x-3y}{y}=12$, найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x}{y}$;

б) $\dfrac{y}{x}$;

в) $\dfrac{2x+y}{y}$;

г) $\dfrac{3x-y}{2x}$.

5.15. Найдите все натуральные значения n, при которых дробь $\dfrac{45-7n}{n}$ принимает значение натурального числа.

5.16. Упростите выражение $\dfrac{125p^3+8q^3}{(5p+2q)^2}:\dfrac{25p^2-10pq+4q^2}{4q^2-25p^2}$.

Домашнее задание

5.17. Докажите, что значение выражения 9^7+3^{12} кратно 90.

5.18. Разложите на множители $18x^2z-10kxy+20k^2y-36kxz$.

5.19. Сократите дробь $\dfrac{32a^4b-80a^3b^2+50a^2b^3}{20ab^3-16a^2b^2}$.

5.20. Известно, что 30% числа a на 20 больше, чем 25% числа b, а 30% числа b на 8 больше, чем 20% числа a. Найдите числа a и b.

5.21. По окружности, длина которой 100 см, движутся равномерно две точки. Они встречаются через каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20 с, двигаясь в одном направлении. Найдите скорости этих точек.

5.22. Найдите значение выражения $\left(-\dfrac{1}{7}+1\dfrac{2}{3}\right)\cdot 131{,}25$.

5.23. Найдите значение выражения $\dfrac{(2\sqrt{7})^2}{14}$.

5.24. Найдите значение выражения $\sqrt{610^2-448^2}$.

5.25. Найдите $p(x)+p(6-x)$, если $p(x)=\dfrac{x(6-x)}{x-3}$ при $x\neq 3$.

5.26. Найдите значение выражения $q(b-2)-q(b+2)$, если $q(b)=3b$.

5.27. Среднее гармоническое трёх чисел a, b и c вычисляется по формуле $h = \left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{3}\right)^{-1}$. Найдите среднее гармоническое чисел $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{8}$ и 1.

5.28. Докажите равенство:

$$(3^2+2^2)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot(3^{16}+2^{16}) = 0{,}2\cdot(3^{32}-2^{32}).$$

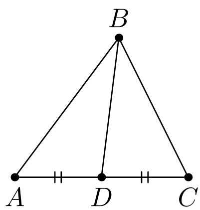
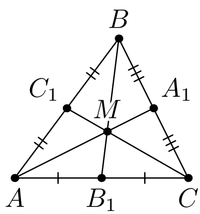
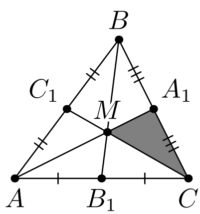
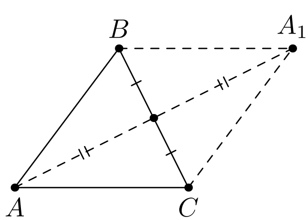
5.29. Докажите, что выражение

$$\frac{12a-4a^2}{2a+3} + \frac{1}{2a-3} : \left(\frac{4}{4a^2-9} - \frac{6a-9}{8a^3+27}\right)$$

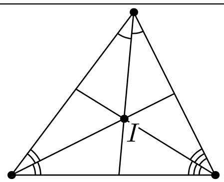
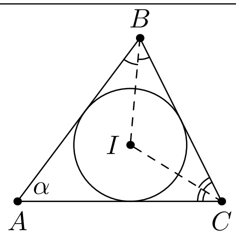
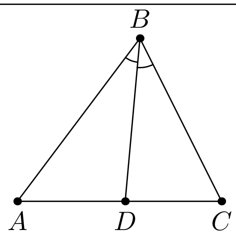
при всех допустимых значениях переменной a принимает одно и то же значение.

Урок №6. Планиметрия. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Пропорциональные отрезки.

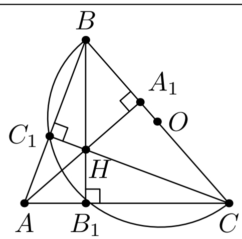
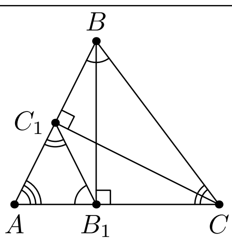
Медианы

	$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$
	Медианы треугольника пересекаются в одной точке $\dfrac{AM}{MA_1} = \dfrac{BM}{MB_1} = \dfrac{CM}{MC_1} = \dfrac{2}{1}$
	Медианы треугольника разбивают его на 6 равновеликих треугольников
	«Удвоение медианы»: ABA_1C — параллелограмм

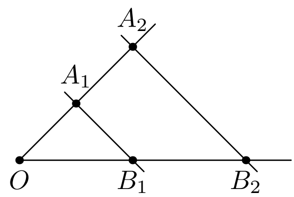
Биссектрисы

	Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке I — центре вписанной в треугольник окружности.
	$\angle CIB = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$
	$\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$ $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \dfrac{AB}{BC}$

Высоты

	Точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности, причём BC — её диаметр. H — ортоцентр треугольника.
	$\triangle ABB_1$ подобен $\triangle ACC_1$. $\triangle AB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $\lvert \cos\angle A \rvert$.

Пропорциональные отрезки



если $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, то

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}; \quad \frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}$$

Обсуждение темы

Доказать, что точка пересечения медиан делит их в отношении $2:1$.

Доказать, что при удвоении медианы треугольника получается параллелограмм.

Доказать свойства высот из теории.

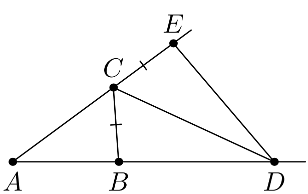
Задания

6.1. В треугольнике ABC угол C равен $116°$, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в т. O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

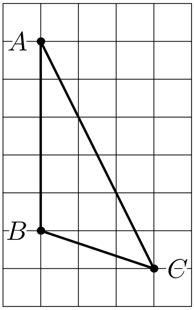
6.2. Острые углы прямоугольного треугольника равны $29°$ и $61°$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

6.3. Острые углы прямоугольного треугольника равны $24°$ и $66°$. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

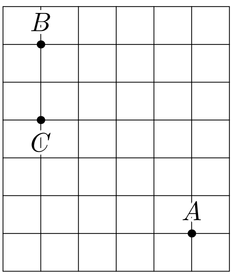
6.4. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, угол B равен $86°$, CD — биссектриса внешнего угла при вершине C, причем точка D лежит на прямой AB. На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E, что $CE = CB$. Найдите угол BDE. Ответ дайте в градусах.



6.5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.



6.6. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

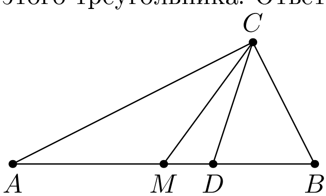


6.7. (ОММО 2012, №4). Длина медианы AD треугольника ABC равна 3, длины сторон AB и AC — 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

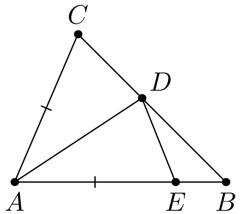
Домашнее задание

6.8. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен $53°$, угол CAD равен $39°$. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

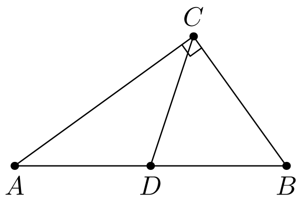
6.9. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен $14°$. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



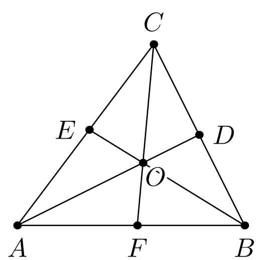
6.10. В треугольнике ABC угол B равен $45°$, угол C равен $85°$, AD — биссектриса, E — такая точка на AB, что $AE = AC$. Найдите угол BDE. Ответ дайте в градусах.



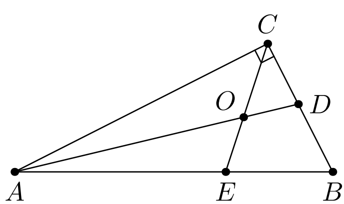
6.11. В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен $90°$, угол B равен $58°$. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



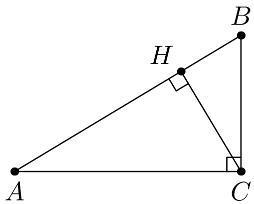
6.12. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $82°$. AD, BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



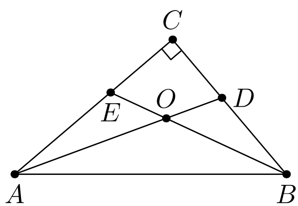
6.13. Острый угол прямоугольного треугольника равен $32°$. Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.



6.14. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB = 4$. Найдите BH.



6.15. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



6.16. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.

Урок №7. Свойства степеней и корней. Графики степенных функций

Свойства степеней

Для $a > 0, b > 0$:

$$a^0 = 1,\ 1^x = 1.$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \ \ (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Свойства корней

Для $x > 0, y > 0, n, m, k \in \mathbb{N}:$

$$\sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{0} = 0.$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \ \text{ — корень из произведения}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \text{ — корень из дроби}$$

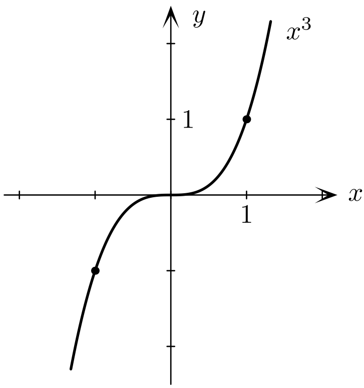
$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k \ \text{ — корень из степени}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x} \ \text{ — корень из корня}$$

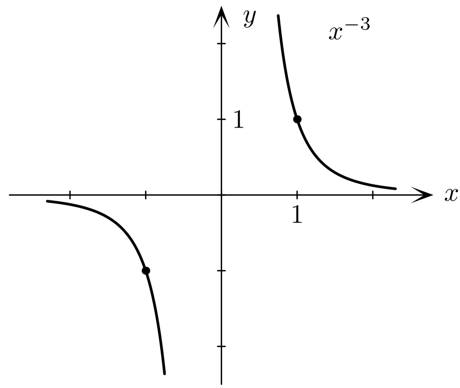
$$\sqrt[nm]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^k} \ \text{ — правило сокращения}$$

$$\text{Для } x \in \mathbb{R}: \ \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{если} \quad n \text{ — чётно} \\ x, & \text{если} \quad n \text{ — нечётно} \end{cases}$$

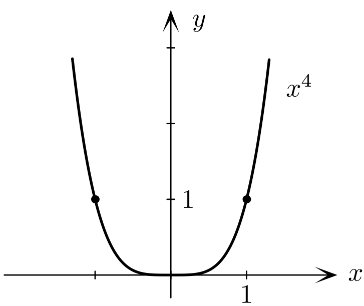
Примеры графиков основных степенных функций



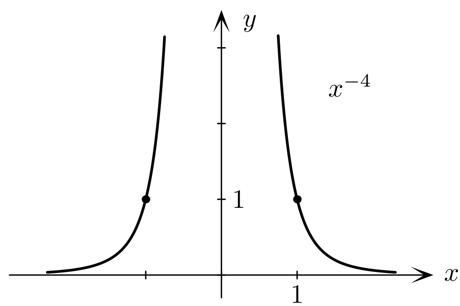
$y = x^3$



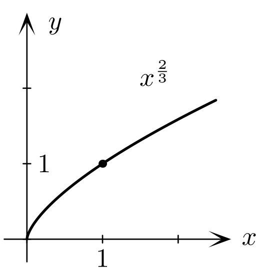
$y = x^{-3}$



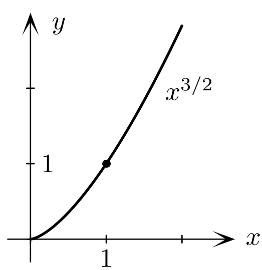
$y = x^4$



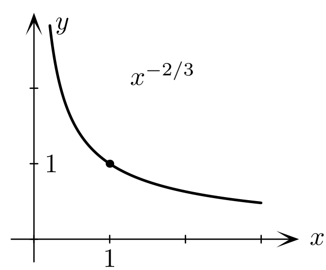
$y = x^{-4}$



$y = x^{\frac{2}{3}}$



$y = x^{\frac{3}{2}}$



$y = x^{-\frac{2}{3}}$

Обсуждение темы

Объяснить различие областей определения степенной функции с дробным показателем и функции соответствующего корня.

Пример: $y = x^{\frac{2}{6}}$.

Задания

7.1. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}}$.

7.2. Найдите значение выражения $\dfrac{12\sqrt[9]{m} \cdot \sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}}$ при $m > 0$.

7.3. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{1/3} \cdot 2^{1/4}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

7.4. Найдите значение выражения $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ при $x \leqslant 2$.

7.5. Найдите значение выражения $0{,}8^{1/7} \cdot 5^{2/7} \cdot 20^{6/7}$.

7.6. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \leqslant a \leqslant 10$.

7.7. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{13} + \sqrt{7})^2}{10 + \sqrt{91}}$.

7.8. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ при $m > 0$.

7.9. Найдите значение выражения $\dfrac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}} - 7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$ при $a > 0$.

7.10. Найдите $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x) = \sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x| \neq 2$.

7.11. Найдите $h(5+x) + h(5-x)$, если $h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-10}$.

7.12. Докажите, что значение квадратного корня $\sqrt{8467}$ не является целым числом.

7.13. Упростите выражение $(6 - \sqrt{2})^2 + 3\sqrt{32}$.

7.14. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1}{14}} + 2\sqrt{\frac{2}{7}} - \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{14}$.

7.15. Докажите равенство $\sqrt{23-4\sqrt{15}}=2\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

7.16. Вычислите значение выражения $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2}$.

7.17. Упростите выражение

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}+2\sqrt{x^2-10x+25},$$

если $2<x<5$.

7.18. Сравните числа a и b, если $a=\sqrt{3}+\sqrt{15}$, а $b=4+\sqrt{2}$.

Домашнее задание

7.19. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{10}\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$.

7.20. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}}$ при $b>0$.

7.21. Найдите значение выражения $121^7\cdot 5^8:605^6$.

7.22. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}}\cdot\dfrac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

7.23. Найдите значение выражения $\dfrac{0{,}5^{\sqrt{10}-1}}{2^{-\sqrt{10}}}$.

7.24. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x>0$.

7.25. Найдите значение выражения $\dfrac{(4a)^{2{,}5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a>0$.

7.26. Найдите значение выражения $3^{\sqrt{5}+10}\cdot 3^{-5-\sqrt{5}}$.

7.27. Найдите значение выражения $2^{3\sqrt{7}-1}\cdot 8^{1-\sqrt{7}}$.

7.28. Постройте график функции: $y=\dfrac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+2x}$.

7.29. Постройте геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $(xy-2)(xy+5)=0$.

7.30. Постройте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ x^2 - 4x + 1, \text{ если } 0 < x \leqslant 2; \\ \dfrac{2}{x}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

7.31. Постройте график функции: $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + x$.

7.32. Постройте график функции: $y = (-1)^x \cdot x,\ x \in \mathbb{N}$.

Урок №8. Планиметрия. Координаты. Векторы.

Общепринятые обозначения:

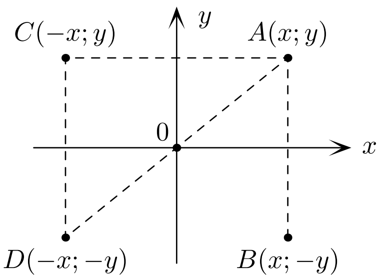
x — абсцисса;

y — ордината.

а) Точка $B(x;-y)$ симметрична с точкой $A(x;y)$ относительно оси OX.

б) Точка $C(-x;y)$ симметрична с точкой $A(x;y)$ относительно оси OY.

в) Точка $D(-x;-y)$ симметрична с точкой $A(x;y)$ относительно начала координат.



Расстояние $|AB|$ **между точками** $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$:

$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Координаты т. O — **середины отрезка** AB: $x_O = \dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y_O = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом: $y = kx+b$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — угол между положительным направлением оси абсцисс и прямой, отсчитываемый против часовой стрелки).

Если у прямых $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны.

Если у прямых $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, то прямые совпадают.

Если у прямых $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются.

Если у прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны.

Уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2+y^2 = R^2$.

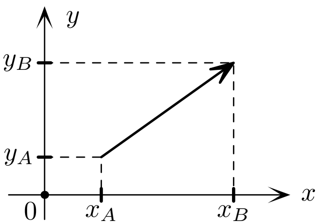
Уравнение окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$.

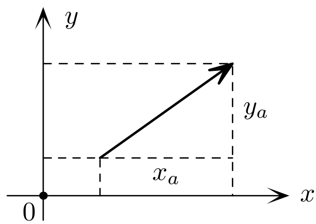
Для нахождения точки пересечения двух прямых решаем систему из двух уравнений прямых.

Частные случаи: уравнение оси $OX: y = 0$; уравнение оси $OY: \ x = 0$.

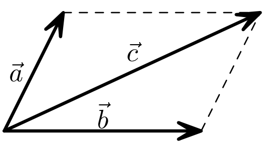
Координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

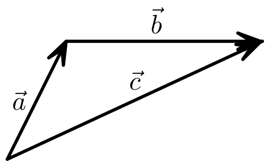
Длина вектора $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.





Сумма векторов по правилу параллелограмма и по правилу треугольника:





Сумма векторов: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}(x_a + x_b; y_a + y_b)$.

Разность векторов: $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}(x_a - x_b; y_a - y_b)$.

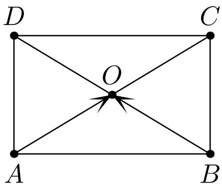
Произведение вектора на число: $k\overrightarrow{a} = \overrightarrow{p}(kx_a; kx_b)$.

Скалярное произведение векторов: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi = x_a x_b + y_a y_b$.

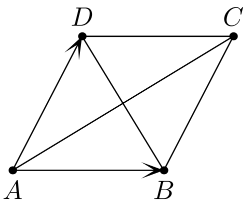
Косинус угла между векторами $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$.

Задания

8.1. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

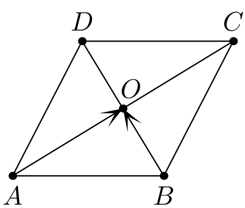


8.2. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

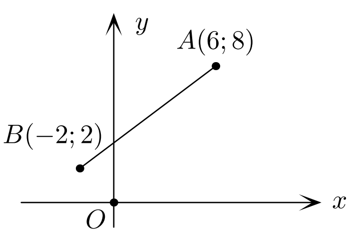


8.3. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(6;8)$ относительно начала координат.

8.4. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$.

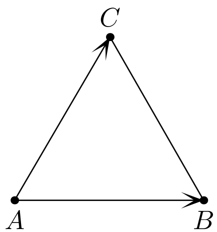


8.5. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(6;8)$ и $B(-2;2)$.

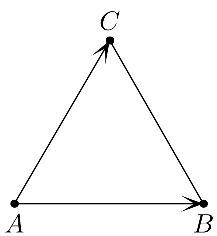


8.6. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

8.7. Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



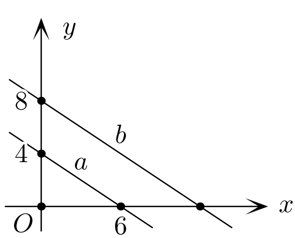
8.8. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.



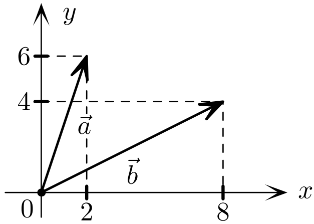
8.9. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(2;0)$ и $(0;2)$.

8.10. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(3;6)$ имеет координаты $(9,3)$. Найдите сумму координат точки B.

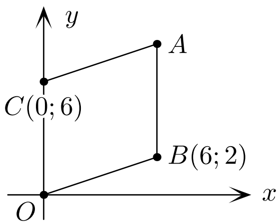
8.11. Прямая a проходит через точки с координатами $(0;4)$ и $(6;0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0;8)$ и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.



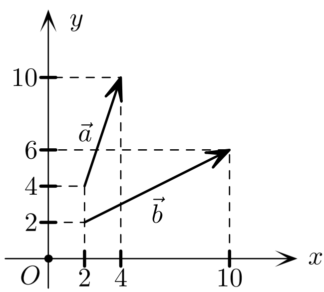
8.12. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



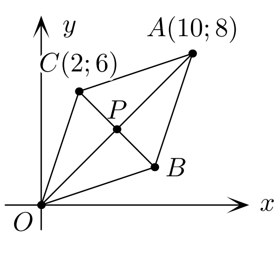
8.13. Точки $O(0;0)$, $B(6;2)$, $C(0;6)$ и A являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки A.



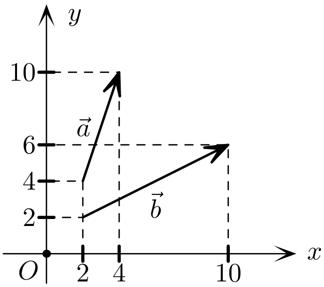
8.14. Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.



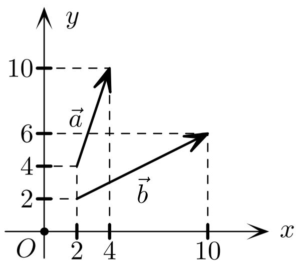
8.15. Точки $O(0;0)$, $A(10;8)$, $C(2;6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки B.



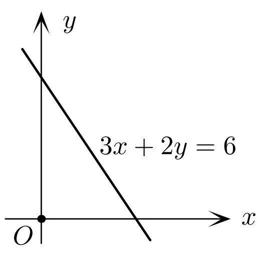
8.16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.



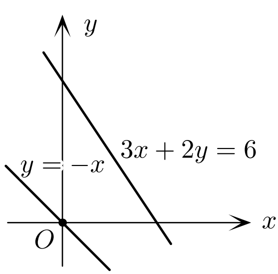
8.17. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Ответ дайте в градусах.



8.18. Найдите ординату точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Oy.

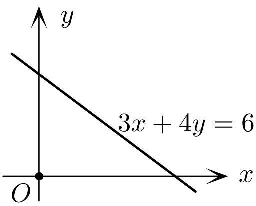


8.19. Найдите ординату точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = -x$.



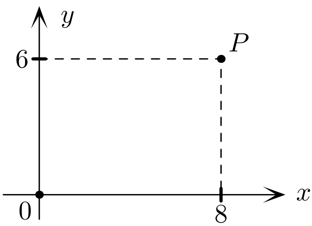
8.20. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением

$3x + 4y = 6$.



Домашнее задание

8.21. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8; 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс?

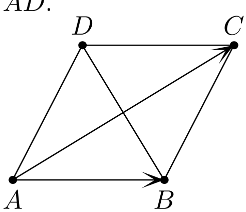


8.22. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2; -2)$, $(6; -2)$, $(6; 4)$, $(-2; 4)$.

8.23. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8; 0)$, $(0; 6)$, $(8; 6)$.

8.24. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

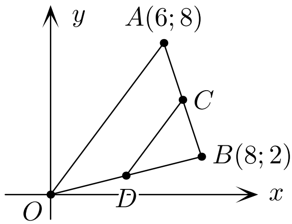
8.25. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.



8.26. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(6; 8)$ относительно оси Ox.

8.27. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(6;8)$ и $B(-2;2)$.

8.28. Точки $O(0;0)$, $A(6;8)$, $B(8;2)$ являются вершинами треугольника. Найдите длину его средней линии CD, параллельной OA.



Урок №9. Простейшие уравнения: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные и модульные. Задачи на составление уравнений.

Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые числа, называется **линейным уравнением**, а числа a и b — **коэффициентами линейного уравнения**. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{a}$. Если $a = 0$, то при $b = 0$ уравнение имеет бесконечное количество корней, а при $b \neq 0$ оно корней не имеет.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называется **квадратным**. Для решения квадратного уравнения находим **дискриминант** $D = b^2 - 4ac$.

1) Если $D < 0$, то действительных корней нет.

2) Если $D = 0$, то имеется кратный действительный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) Если $D > 0$, то имеются два действительных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета. Сумма корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ (приведённого квадратного трёхчлена) равна его второму коэффициенту p с противоположным знаком, а произведение — свободному члену q, то есть

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, называется **рациональным**. Оно называется **целым**, если его обе части являются целыми рациональными выражениями. Если хотя бы одна из частей рационального уравнения содержит несократимое дробное выражение, то такое уравнение называется **дробно-рациональным**.

Для решения дробно-рационального уравнения вида $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ требуется решить уравнение $p(x) = 0$ и для каждого найденного корня x_i проверить, удовлетворяется ли условие $q(x_i) \neq 0$. Если это условие удовлетворяется, то x_i — корень исходного уравнения, если нет, то x_i корнем исходного уравнения не является, он — **посторонний**.

Если в уравнении переменная находится под знаком корня, то такое уравнение называется **иррациональным**. Основной метод решения иррациональных уравнений состоит в переводе уравнений в рациональные, что достигается возведением обеих частей в чётную степень (этот переход неравносильный и после этого нужна проверка) или в нечётную степень (переход равносильный).

Уравнения, в которых переменная находится внутри модульных скобок, называется **модульным**. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ решаются следующим образом:

1 способ — раскрытие модуля по определению (обычно применяется в том случае, когда функция $f(x)$ проще, чем $g(x)$).
2 способ (обычно применяется в том случае, когда функция $g(x)$ проще, чем $f(x)$)

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Задания

Решить уравнения:

9.1. $2(\sqrt{3} - x) + \sqrt{3}(2 - x) = 2\sqrt{3} - 4$

9.2. $2x^2 - 25x + 75 = 0$

9.3. $x^2 + 36 = 0$

9.4. $x^2 - 36 = 0$

9.5. $x^2 - 24 = 0$

9.6. $x^2 - 36x = 0$

9.7. $\dfrac{2}{5}x^2 = 6\dfrac{2}{5}$

9.8. $2x^2 - (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + \sqrt{6} + 2 = 0$

9.9. $(2x + 7)^2 = (2x - 1)^2$

9.10. $(x - 1)^3 = -8$

9.11. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x^2$

9.12. $\dfrac{-4x - 7}{x - 12} = x$

9.13. $\dfrac{x+8}{5x+7}=\dfrac{x+8}{7x+5}$

9.14. $\sqrt{2x+87}=-11$

9.15. $\sqrt{2x+87}=11$

9.16. $\sqrt{-72-17x}=-x$

9.17. $\sqrt{\dfrac{19}{3x-54}}=\dfrac{1}{9}$

9.18. $\sqrt{2x^2+7}=\sqrt{x-4}$

9.19. $(x+5)\sqrt{x-2}=0$

9.20. $\sqrt[3]{2x+87}=-2$

9.21. $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$

9.22. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$

9.23. $|5x-7|=-2$

9.24. $|5x-7|=0$

9.25. $|5x-7|=3$

9.26. $|5x-7|=5x-7$

9.27. $|5x-7|=7-5x$

9.28. $|2x-3|=3x-2$

9.29. $|x^2-3|=|x^2-5|$

9.30. При температуре $0°$C рельс имеет длину $l_0=10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^0)=l_0(1+\alpha\cdot t^0)$, где $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}(°\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t^0 — температура (в $°$C). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

9.31. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

9.32. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20\,\text{м}$ — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

9.33. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30\,\text{см}$. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

9.34. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440\,\text{Гц}$. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315\,\text{м/с}$. Ответ выразите в м/с.

9.35. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 360\,\text{с}^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в с^{-1}.

9.36. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400\,\text{км}$ — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

9.37. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = 5/3$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5\,\text{Па}\cdot\text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не ниже $3{,}2 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

9.38. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где $p\,(\text{Па})$ — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вдвое объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Домашнее задание

9.39. Вода из ведёрка не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\dfrac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в кг, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в м, g — ускорение свободного падения ($g = 10\,\text{м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если $L = 40$ см?

9.40. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ м — начальный уровень воды, $a = \dfrac{1}{100}$ м/мин^2, и $b = -\dfrac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

9.41. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна $300\,000$ руб.

9.42. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ$/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ$/мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

9.43. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{16} \cdot 10^{20}\,\text{м}^2$, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

9.44. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой $m_{\text{в}}$ (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы $m_{\text{др}}$ кг. Он определяется формулой $\eta = \dfrac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_2 - t_1)}{q_{\text{др}} m_{\text{др}}} \cdot 100\%$, где $c_{\text{в}} = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) — теплоёмкость воды, $q_{\text{др}} = 8{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m_{\text{в}} = 83$ кг воды от 10° С до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 21%. Ответ выразите в килограммах.

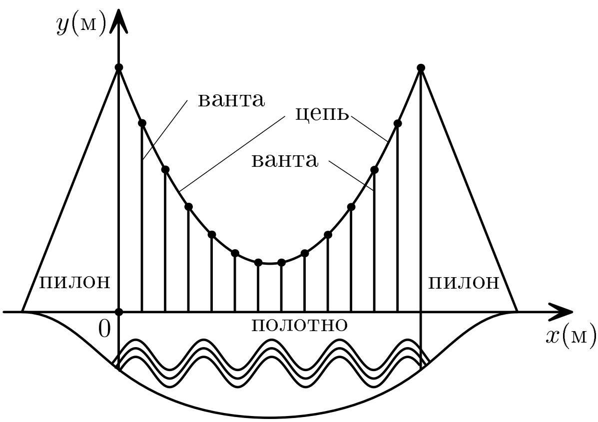
9.45. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 749 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 2 м/с.

9.46. При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

9.47. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,11.

9.48. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{5In + Op + 3Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

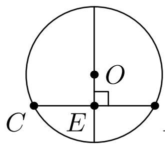
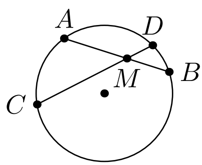
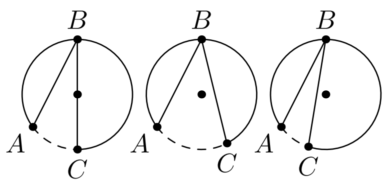
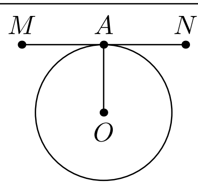
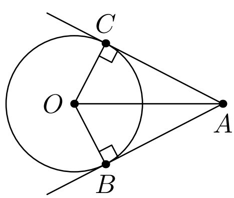
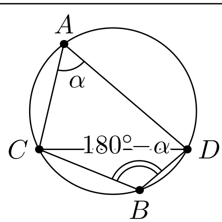
9.49. На рисунке изображена схема вантового моста.

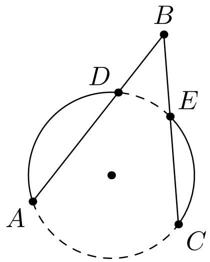
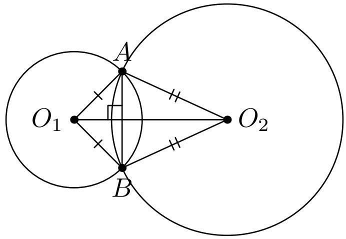
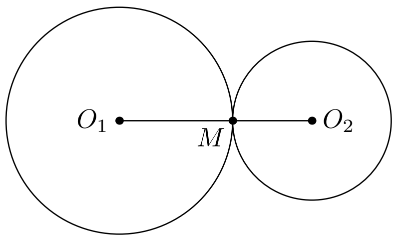
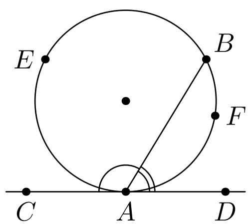


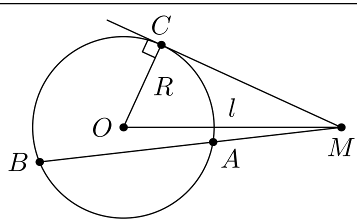
Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}005x^2 - 0{,}74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

Урок №10. Планиметрия. Окружность. Вписанные и описанные четырёхугольники.

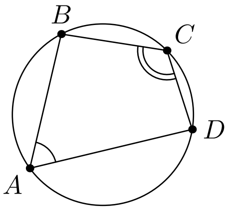
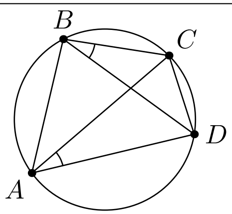
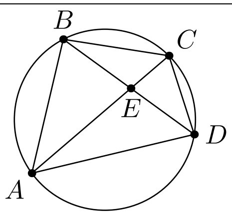
Окружность. Свойства хорд и углов

	$CE = ED$ (O — центр окружности)
	$AM \cdot MB = CM \cdot MD$
	$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$
	MN касается окружности в точке $A \Rightarrow MN \perp OA$; если MN проходит через точку A окружности и $MN \perp OA$ $\Rightarrow MN$ — касательная
	$AC = AB$, $\angle CAO = \angle BAO$
	$\angle CAD + \angle CBD = 180°$

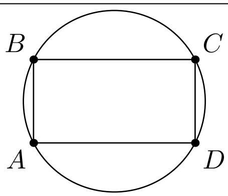
<table>
<tr><td>
</td><td>$\angle ABC = \dfrac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Линия центров двух касающихся окружностей проходит через их точку касания</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\angle BAC = \dfrac{1}{2} \smile AEB$

$\angle BAD = \dfrac{1}{2} \smile AFB$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$MA \cdot MB = MC^2$
$MA \cdot MB = l^2 - R^2$</td></tr>
</table>

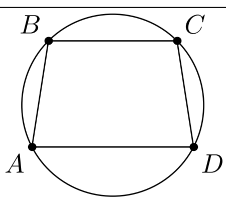
Вписанный четырёхугольник

	$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$
	$\angle DAC = \angle DBC$
	$AE \cdot EC = BE \cdot ED$

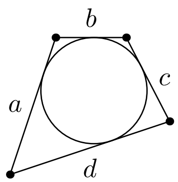
Вписанный параллелограмм

	Вписанный параллелограмм является прямоугольником: $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$

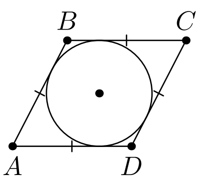
Вписанная трапеция

	Вписанная трапеция является равнобокой: $AB = DC$

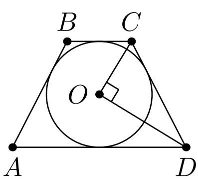
Описанный четырёхугольник

	$a + c = b + d$

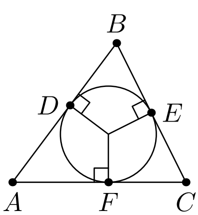
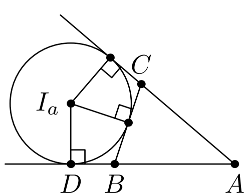
Описанный параллелограмм

	Описанный параллелограмм является ромбом: $AB = BC = CD = DA$

Описанная трапеция

	$\angle DOC = 90^\circ$ (O — центр окружности)

Вписанная и вневписанная окружность

	$AF = AD = p - a$ $BD = BE = p - b$ $CE = CF = p - c$
	$AD = p$, где точка D — точка касания вневписанной окружности, касающейся продолжения AB

Обсуждение темы

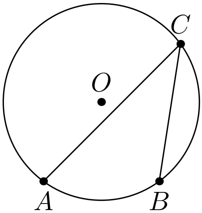
Доказать свойство описанного четырёхугольника.

Доказать свойства вписанного четырёхугольника.

Доказать свойства вписанной и вневписанной окружности.

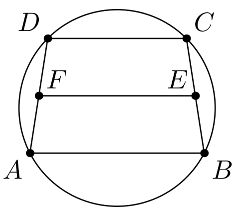
Задания

10.1. Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет $200°$. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет $80°$. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

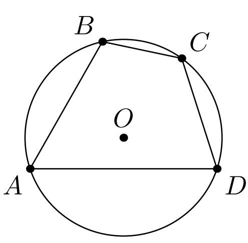


10.2. Сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.

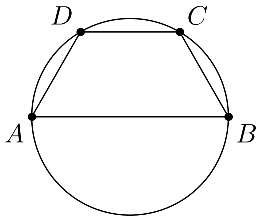
10.3. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.



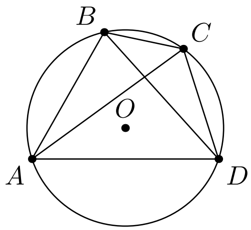
10.4. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся соответственно как $4 : 2 : 3 : 6$. Найдите угол A четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.



10.5. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

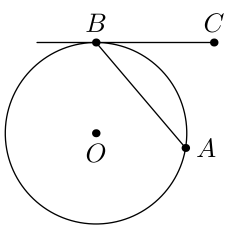


10.6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

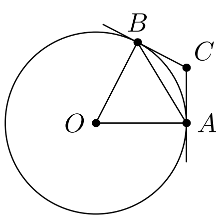


10.7. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.

10.8. Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах.

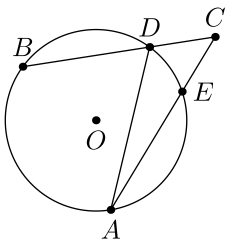


10.9. Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



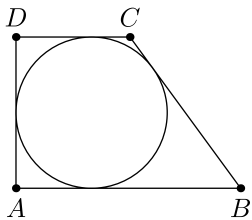
10.10. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.

10.11. Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно $118°$ и $38°$. Ответ дайте в градусах.

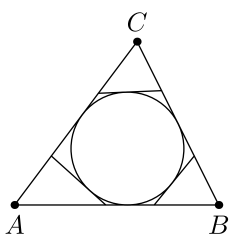


10.12. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

10.13. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



10.14. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсечённых треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.

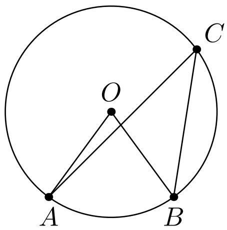


10.15. Сторона ромба равна 1, острый угол равен $30°$. Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.

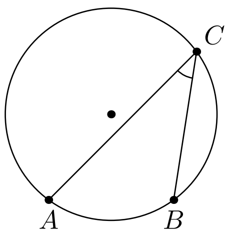
10.16. (ОММО 2010, №4) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Найдите радиус окружности, если $AC = 6$, $\angle AEC = 5\angle BAF$, $\angle ABC = 72°$.

Домашнее задание

10.17. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

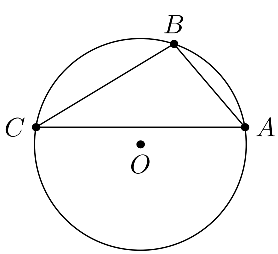


10.18. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

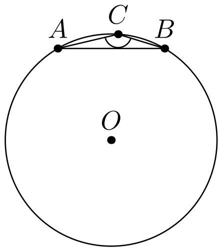


10.19. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 20% окружности. Ответ дайте в градусах.

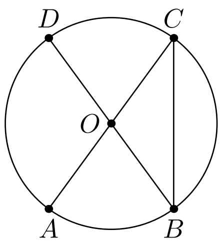
10.20. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят её на три дуги, градусные величины которых относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



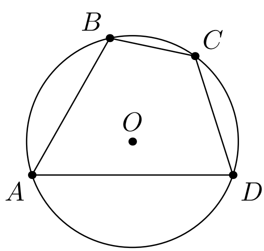
10.21. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



10.22. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



10.23. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

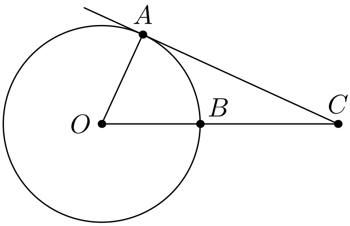


10.24. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

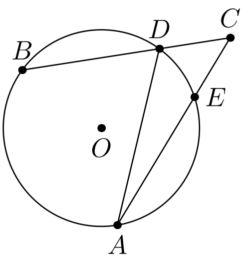
10.25. Углы A, B и C четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1:2:3$. Найдите угол D, если около данного четырёхугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

10.26. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырёхугольника.

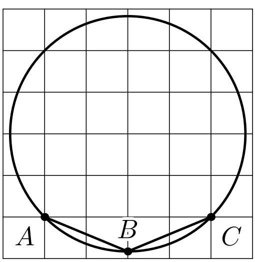
10.27. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а меньшая дуга окружности AB, заключённая внутри этого угла, равна $64°$. Ответ дайте в градусах.



10.28. Угол ACB равен $42°$. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна $124°$. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.

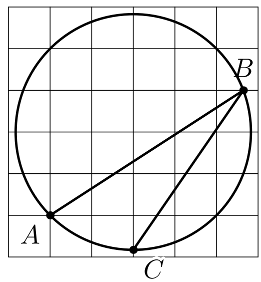


10.29. Найдите величину угла ABC. Ответ дайте в градусах.



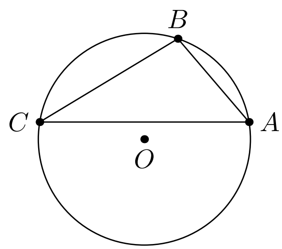
10.30. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

10.31. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC. Ответ дайте в градусах.



10.32. В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен $90°$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

10.33. Хорда AC делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $5 : 7$. Под каким углом (в градусах) видна эта хорда из точки B, принадлежащей меньшей дуге окружности?



10.34. Найдите хорду, на которую опирается угол $120°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.

10.35. Одна сторона треугольника равна $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 1. Надите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.

Урок №11. Свойства числовых неравенств. Простейшие неравенства: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные и модульные. Задачи на составление неравенств.

Свойства числовых неравенств

$$\text{если } a > b,\, b > c, \text{ то } a > c$$

$$\text{если } a > b, \text{ то } a + c > b + c$$

$$\text{если } a > b,\, m > 0, \text{ то } am > bm$$

$$\text{если } a > b,\, m < 0, \text{ то } am < bm$$

$$\text{если } a > b, \text{ то } -a < -b$$

$$\text{если } a > b,\, c > d, \text{ то } a + c > b + d$$

$$\text{если } a > b \geqslant 0,\, n \in \mathbb{N}, \text{ то } a^n > b^n$$

$$\text{если } a > b > 0, \text{ то } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a^{2n} \geqslant b^{2n} \Leftrightarrow |a| \geqslant |b|$$

$$\text{если } a > b \text{ и } n \text{ — нечётное число, то } a^n > b^n$$

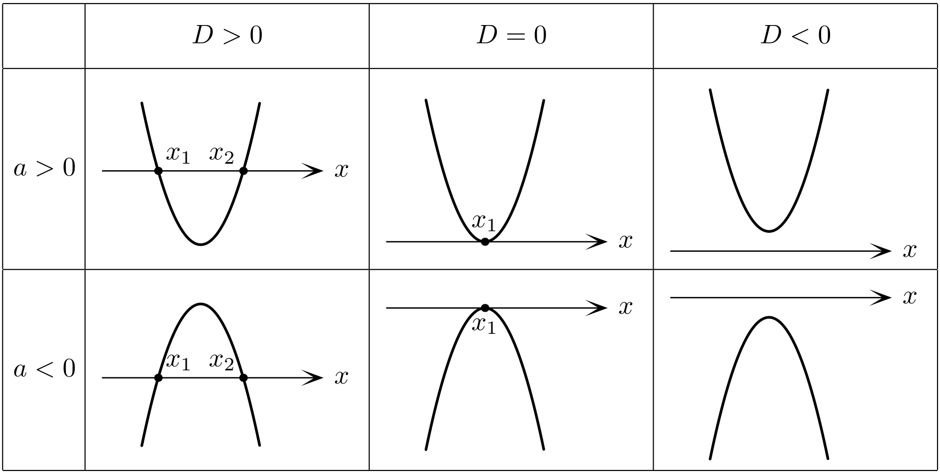
Линейные неравенства

При решении линейного неравенства $ax \bigvee b$, где символ $\bigvee$ заменяет один из знаков: $>, <, \geqslant, \leqslant$, необходимо рассматривать три случая: $a < 0; a = 0; a > 0$.

- Если $a > 0$, то при делении обеих частей неравенства на a знак неравенства не меняется.
- Если $a < 0$, то при делении обеих частей неравенства на a знак неравенства меняется на противоположный.
- Если $a = 0$, то решение неравенства зависит от b.

Графический способ решения квадратного неравенства

В зависимости от знаков D и a возможно одно из шести расположений графика функции $y = ax^2 + bx + c$



Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ больше нуля, то этот числовой промежуток находится там, где парабола лежит выше оси OX. Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ меньше нуля, то это числовой промежуток, где парабола лежит ниже оси OX. Если квадратное неравенство нестрогое, то корни (если они есть) входят в числовой промежуток, если строгое — не входят.

Рациональные неравенства

Для решения неравенства $\dfrac{p(x)}{q(x)} \bigvee 0$ методом интервалов необходимо:

а) Разложить $p(x)$ и $q(x)$ на множители.

б) Отметить на числовой оси корни уравнений $p(x) = 0$ и $q(x) = 0$ в порядке возрастания. Эти числа разбивают числовую ось на интервалы, на каждом из которых выражение сохраняет знак, а, переходя через отмеченные точки меняет знак на противоположный (за исключением корня чётной кратности).

в) Расставить знаки на интервалах.

г) Выписать ответы неравенства в виде интервалов, учитывая, что корни знаменателя не входят в решение («выколотые» точки на оси), а корни числителя не войдут в решение в случае строгого неравенства.

Задания

Решить неравенства:

11.1. $-5\dfrac{2}{3}x \leqslant 1\dfrac{5}{12}$

11.2. $x^2 < 0$

11.3. $x^2 \leqslant 0$

11.4. $x^2 > 0$

11.5. $x^2 \geqslant 0$

11.6. $x^2 < -3$

11.7. $x^2 \leqslant -3$

11.8. $x^2 > -3$

11.9. $x^2 \geqslant -3$

11.10. $x^2 < 5$

11.11. $x^2 \leqslant 5$

11.12. $x^2 > 5$

11.13. $x^2 \geqslant 5$

11.14. $|x| < 0$

11.15. $|x| \leqslant 0$

11.16. $|x| > 0$

11.17. $|x| \geqslant 0$

11.18. $|x| < -3$

11.19. $|x| \leqslant -3$

11.20. $|x| > -3$

11.21. $|x| \geqslant -3$

11.22. $|x| < 5$

11.23. $|x| \leqslant 5$

11.24. $|x| > 5$

11.25. $|x| \geqslant 5$

11.26. $\sqrt{x} < 0$

11.27. $\sqrt{x} \leqslant 0$

11.28. $\sqrt{x} > 0$

11.29. $\sqrt{x} \geqslant 0$

11.30. $\sqrt{x} < -3$

11.31. $\sqrt{x} \leqslant -3$

11.32. $\sqrt{x} > -3$

11.33. $\sqrt{x} \geqslant -3$

11.34. $\sqrt{x} < 5$

11.35. $\sqrt{x} \leqslant 5$

11.36. $\sqrt{x} > 5$

11.37. $\sqrt{x} \geqslant 5$

11.38. $2x^2 - 25x + 75 \leqslant 0$

11.39. $2x^2 - 25x + 75 > 0$

11.40. $2x^2 - 5x + 75 \leqslant 0$

11.41. $2x^2 - 5x + 75 < 0$

11.42. $2x^2 - 5x + 75 > 0$

11.43. $2x^2 - 5x + 75 \geqslant 0$

11.44. $x^2 - 10x + 25 \leqslant 0$

11.45. $x^2 - 10x + 25 < 0$

11.46. $x^2 - 10x + 25 > 0$

11.47. $x^2 - 10x + 25 \geqslant 0$

11.48. $x^2 - 36x > 0$

11.49. $\dfrac{-4x - 7}{x - 12} \geqslant x$

11.50. $\dfrac{x+8}{5x+7} > \dfrac{x+8}{7x+5}$

11.51. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 11t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 м?

11.52. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\dfrac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

11.53. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин^2, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

11.54. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в Омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \dfrac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в Омах.)

Домашнее задание

11.55. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p (в тыс. руб.), при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб.

11.56. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

11.57. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг·см^2, даётся формулой $I = \dfrac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 625 кг·см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

11.58. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_{\text{А}} = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78 400 Н? Ответ выразите в метрах.

11.59. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

11.60. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1260$ тонн представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 18$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \dfrac{mg}{2ls}$, где m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 140 кПа. Ответ выразите в метрах.

11.61. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в Омах.

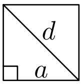
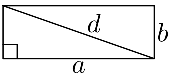
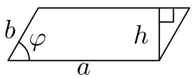
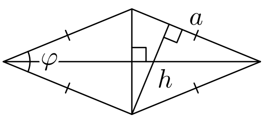
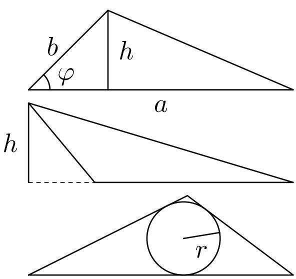
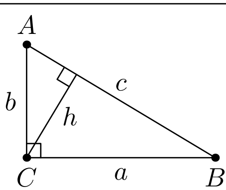
11.62. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?

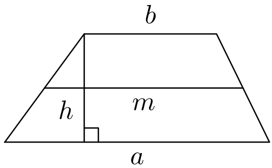
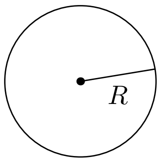
11.63. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в Паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 1200$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па. Ответ выразите в метрах.

11.64. Автомобиль, масса которого равна $m = 2160$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $S = 500$ метров. Значение силы (в Ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \dfrac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 2400 Н. Ответ выразите в секундах.

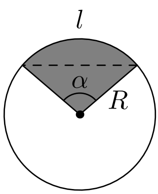
Урок №12. Планиметрия. Площади.

Площади некоторых фигур

 квадрат	$S = a^2$ $P = 4a$ $d = \sqrt{2}a$
 прямоугольник	$S = ab$ $P = 2(a+b)$ $d = \sqrt{a^2+b^2}$
 параллелограмм	$S = ah = ab\sin\varphi$ $P = 2(a+b)$ $d_1 = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$ $d_2 = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}$
 ромб	$S = ah = a^2\sin\varphi = \dfrac{d_1d_2}{2}$, где d_1, d_2 — диагонали ромба
 треугольник	$S = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{1}{2}ab\sin\varphi = pr = \dfrac{abc}{4R} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 прямоугольный треугольник	$S = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{ch}{2}$ $h = \dfrac{ab}{c}$

 трапеция	$S = \dfrac{a+b}{2}h = mh,$ где m — средняя линия трапеции
 круг	$S = \pi R^2,$ $L = 2\pi R = \pi D$

Длина дуги, площадь сегмента и сектора

	Длина дуги: $l = R\alpha$ Площадь сектора: $S = \dfrac{1}{2}\alpha R^2 = \dfrac{1}{2}l \cdot R$ Площадь сегмента: $S = \dfrac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$

Фигуры на клетчатой бумаге

Найти площадь фигуры на клетчатой бумаге можно 4 способами:

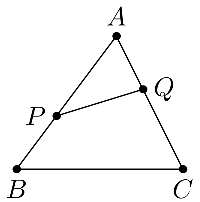
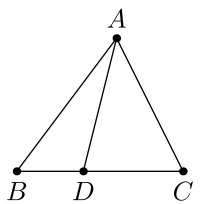
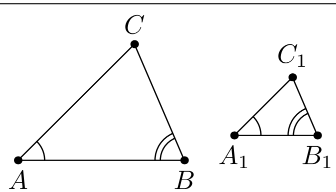
1) представить фигуру как разность простых фигур (например, прямоугольников и прямоугольных треугольников);
2) представить фигуру как сумму простых фигур;
3) использовать формулу площади данной фигуры, если такая формула известна;
4) использовать формулу Пика: $S = n + \dfrac{k}{2} - 1$, где n — количество узловых точек внутри фигуры, а k — количество узловых точек на границе фигуры.

Площадь любого описанного многоугольника $S = pr$.

Отношение площадей любых подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

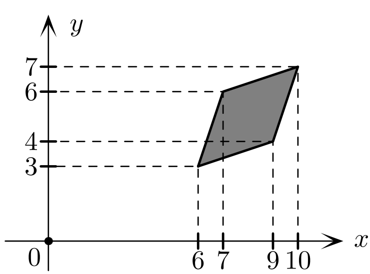
$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2$, где k — коэффициент подобия.

Соотношения между площадями треугольников

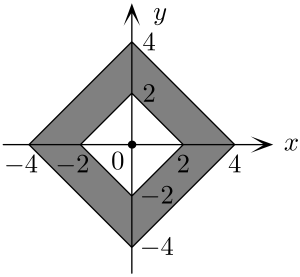
	$\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{AP}{AB} \cdot \dfrac{AQ}{AC}$
	$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \dfrac{BD}{DC}$
	$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2}$

Задания

12.1. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(6; 3)$, $(9; 4)$, $(10; 7)$, $(7; 6)$.

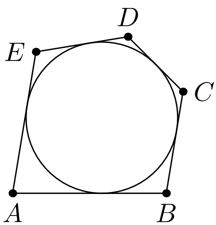


12.2. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости.

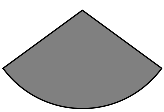


12.3. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.

12.4. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.

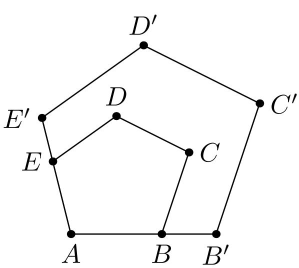


12.5. Найдите центральный угол сектора круга радиуса $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, площадь которого равна 1. Ответ дайте в градусах.



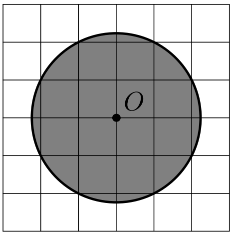
12.6. Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABDE$.

12.7. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.

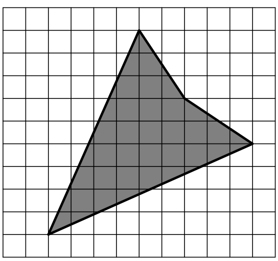


12.8. Площадь круга равна $\dfrac{1}{\pi}$. Найдите длину его окружности.

12.9. Найдите площадь S круга, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.

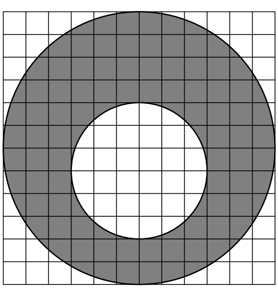


12.10. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



12.11. Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.

12.12. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



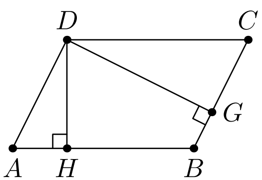
12.13. Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как $4 : 5$, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.

12.14. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.

12.15. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

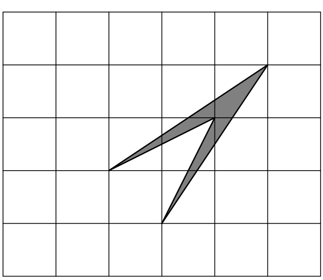
12.16. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

12.17. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.



12.18. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

12.19. Найдите площадь (в кв.см.) четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\,\text{см} \times 1\,\text{см}$.



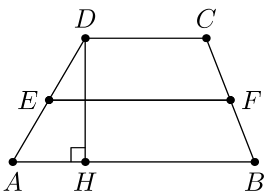
12.20. Доказать, что медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.

12.21. (ОММО 2009, №4) Дана трапеция с основаниями 1 и 4 и площадью S. Найдите площадь треугольника, образованного диагоналями и меньшим основанием трапеции.

12.22. (ОММО 2011, №7) В равнобедренном треугольнике с периметром 60 точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

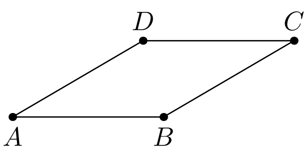
Домашнее задание

12.23. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции.

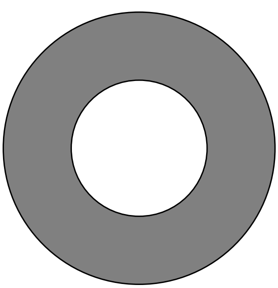


12.24. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(2;2)$, $(8;10)$, $(8;8)$.

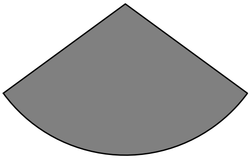
12.25. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 1, а один из углов равен $150°$.



12.26. Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.



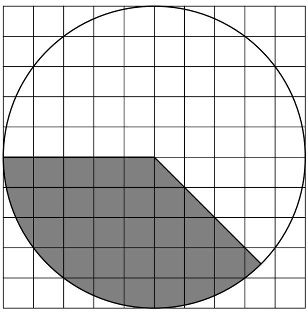
12.27. Площадь сектора круга радиуса 3 равна 6. Найдите длину его дуги.



12.28. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.

12.29. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

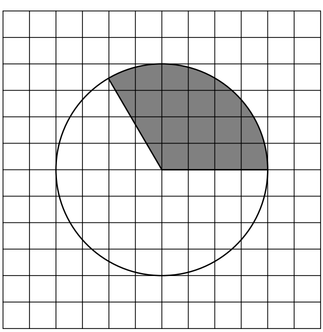
12.30. На клетчатой бумаге нарисован круг, площадь которого равна 28. Найдите площадь закрашенной фигуры.



12.31. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30°.

12.32. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

12.33. На клетчатой бумаге изображён круг. Какова площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 32?

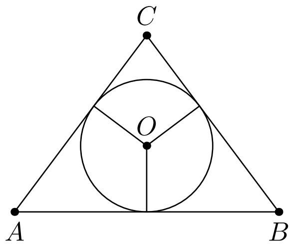


12.34. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.

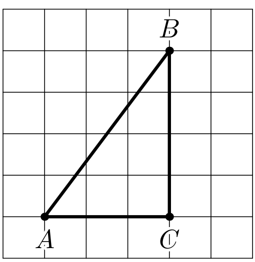
12.35. Площадь остроугольного треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами. Ответ дайте в градусах.

12.36. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

12.37. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



12.38. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



12.39. Периметр прямоугольника равен 10, а площадь равна 4,5. Найдите диагональ этого прямоугольника.

Урок №13. Задачи на движение.

Движение в разных направлениях

$\Delta S = (v_1 + v_2)\Delta t$,
где ΔS — изменение расстояния между точечными объектами за интервал времени Δt;
v_1 и v_2 — скорости объектов.

Движение в одном направлении

$\Delta S = (v_1 - v_2)\Delta t$,
где ΔS — изменение расстояния между точечными объектами за интервал времени Δt;
v_1 и v_2 — скорости объектов.

Движение по окружности

а) движение в разных направлениях $l = (v_1 + v_2)\Delta t$, где l — длина окружности, Δt — время между последовательными встречами;
б) движение в одном направлении $l = (v_1 - v_2)\Delta t$, где l — длина окружности, Δt — время между последовательными встречами.

Движение по воде

а) скорость объекта по течению равна сумме собственной скорости объекта и скорости течения: $v = v_{\text{собст}} + v_{\text{теч}}$;
б) скорость объекта против течения равна разности собственной скорости объекта и скорости течения: $v = v_{\text{собст}} - v_{\text{теч}}$;
в) скорость объекта по озеру равна собственной скорости объекта: $v = v_{\text{собст}}$;
г) скорость плота по реке равна скорости течения: $v = v_{\text{теч}}$.

Движение мимо другого объекта

а) протяжённый объект длины l_1, проходя мимо точечного объекта, проходит расстояние $S = l_1$;
б) протяжённый объект длины l_1, проходя мимо протяжённого объекта длины l_2, проходит расстояние $S = l_1 + l_2$.

Средняя скорость

$v_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t}$, где S — весь пройденный путь за время t.

Частные случаи:
а) При равных временны́х интервалах ($t_1 = t_2 = \dots = t_n$) средняя скорость равна среднему арифметическому скоростей на участках:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n};$$

б) при двух участках одинаковой длины средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Задания

13.1. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 483 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 22 км/ч, стоянка длится 2 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 46 ч после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

13.2. Из городов **А** и **В** навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в **В** на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в **А**, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из **В** в **А** велосипедист?

13.3. Из пункта **А** в пункт **В** одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт **В** одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

13.4. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

13.5. Расстояние между городами **А** и **В** равно 150 км. Из города **А** в город **В** выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе **С** и повернул обратно. Когда он вернулся в **А**, автомобиль прибыл в **В**. Найдите расстояние от **А** до **С**. Ответ дайте в километрах.

13.6. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

13.7. Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

13.8. Из пункта **A** круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а ещё через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

13.9. Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвёртый раз поравняется с часовой?

13.10. Расстояние между пристанями **A** и **B** равно 120 км. Из **A** в **B** по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт **B**, тотчас повернула обратно и возвратилась в **A**. К этому времени плот прошёл 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

13.11. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 74 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 66 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

13.12. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

13.13. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля (в км/ч) на всем пути.

13.14. Весной катер идёт против течения реки в $1\dfrac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\dfrac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

13.15. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстаёт от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

13.16. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 65 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 700 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского поезда, равно 36 с. Ответ дайте в метрах.

13.17. Расстояние между городами **A** и **B** равно 435 км. Из города **A** в город **B** со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города **B** выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города **A** автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

13.18. Расстояние между городами **A** и **B** равно 470 км. Из города **A** в город **B** выехал первый автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города **B** выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города **A**. Ответ дайте в км/ч.

13.19. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 75 км/ч из города **A** в город **B**, расстояние между которыми равно 275 км. Одновременно с ним из города **C** в город **B**, расстояние между которыми равно 255 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город **B** одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

13.20. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут?

13.21. Невнимательный путешественник плыл на лодке по течению, как вдруг обронил в воду шляпу. Пропажу он обнаружил лишь через $t_1 = 1$ час после этого. Опомнившись, он сразу развернулся и поплыл обратно, оставив мощность двигателя лодки прежней. Через какое время t_2 ему удастся подобрать свою шляпу?

13.22. Спортсмен-каноист плыл против течения Темзы и под Лондонским мостом потерял флягу. Пропажу он заметил лишь через 10 мин, после чего развернул каноэ и догнал флягу у Тауэрского моста. Найдите скорость течения реки, если между двумя мостами 1 км.

13.23. Рик бегал с одинаковой скоростью вверх-вниз по движущемуся в одном направлении эскалатору, а Морти наблюдал за ним и подсчитывал, сколько ступеней Рик пробежит. Пока Рик сбежал вниз, Морти насчитал 30 ступеней, а по дороге вверх — 70 ступеней. Сколько ступеней насчитал Морти, если Рик пробежал бы по неподвижному эскалатору?

Домашнее задание

13.24. Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

13.25. От пристани **A** к пристани **B**, расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт **B** он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

13.26. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

13.27. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

13.28. Пристани **A** и **B** расположены на озере, расстояние между ними равно 390 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из **A** в **B**. На следующий день она отправилась обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 9 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из **A** в **B**. Найдите скорость (в км/ч) баржи на пути из **A** в **B**.

13.29. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

13.30. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час — со скоростью 100 км/ч, а затем два часа — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) автомобиля на всем пути.

13.31. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

13.32. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

13.33. Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?

13.34. Из городов **A** и **B**, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города **B**. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города **A**. Ответ дайте в км/ч.

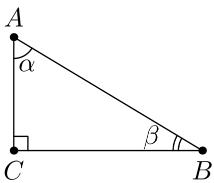
13.35. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

13.36. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?

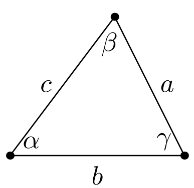
13.37. Дорога между пунктами **A** и **B** состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 8 км. Путь из **A** в **B** занял у туриста 5 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Урок №14. Планиметрия. Решение произвольного треугольника. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

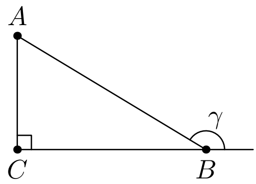
Основные тригонометрические соотношения

	$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$ $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$	
Если $\alpha + \beta = 90^\circ$, то $\sin\alpha = \cos\beta$ $\cos\alpha = \sin\beta$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Решение произвольного треугольника

	Треугольник со сторонами a, b, c и углами α, β, γ
теорема синусов	$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$
теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Тригонометрические функции тупого угла



$\sin\gamma = \sin\angle ABC$
$\cos\gamma = -\cos\angle ABC$
$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\angle ABC$

Задачи нахождения углов на клетчатой бумаге

При решении задач данного типа обычно удобно достроить угол до прямоугольного, равнобедренного или равностороннего треугольника. Если необходимо, то используем тригонометрические функции тупого угла.

Обсуждение темы

Разобрать все варианты решения произвольного треугольника: по трём заданным сторонам; по двум заданным сторонам и углу (или любой тригонометрической функции угла); по заданной стороне и двум углам (или любым тригонометрическим функциям этих углов).

Задания

14.1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}48$. Найдите $\sin B$.

14.2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

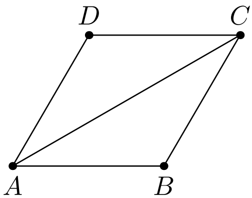
14.3. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

14.4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = 2$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

14.5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 3$, $\sin A = \dfrac{1}{6}$. Найдите AH.

14.6. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH — высота, $\cos BAC = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите $\operatorname{tg} BAH$.

14.7. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.



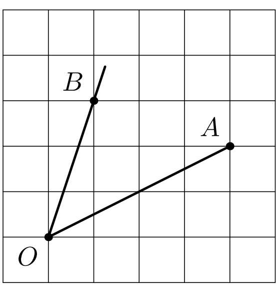
14.8. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 4\sqrt{5}$, высота $AH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.

14.9. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 4, $BH = 8$. Найдите $\operatorname{tg} BAC$.

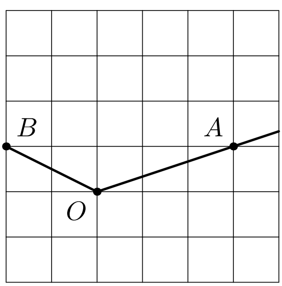
14.10. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, тангенс внешнего угла при вершине A равен $-\dfrac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AC.

14.11. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

14.12. Найдите косинус угла AOB. В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



14.13. Найдите тангенс угла AOB.



14.14. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите BH.

Домашнее задание

14.15. Найдите синус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0;0)$ и $A(6;8)$ с осью абсцисс.

14.16. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$. Найдите $\sin A$.

14.17. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 40$, $AC = 4\sqrt{51}$. Найдите $\sin A$.

14.18. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 9{,}6$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.

14.19. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.

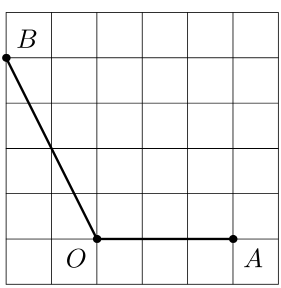
14.20. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 12$, $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите высоту CH.

14.21. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 21$, $\sin A = \frac{6}{7}$. Найдите большую высоту параллелограмма.

14.22. В параллелограмме $ABCD$ $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите $\sin B$.

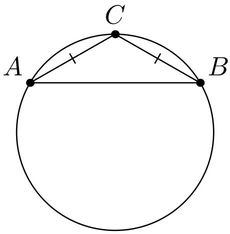
14.23. Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 73. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{5}{7}$. Найдите боковую сторону.

14.24. Найдите синус угла AOB. В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



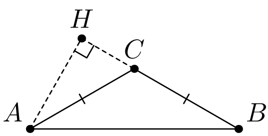
14.25. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 72$, $\cos A = \frac{12}{13}$. Найдите высоту CH.

14.26. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.

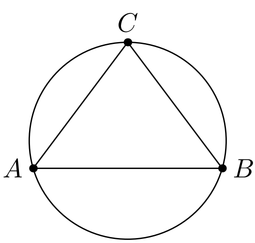


14.27. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{11}{14}$, $AC = 10\sqrt{3}$. Найдите AB.

14.28. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, угол C равен 120°. Найдите высоту AH.



14.29. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



14.30. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Урок №15. Прогрессии. Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

Последовательности

Функцию вида $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{N}$, называют функцией натурального аргумента или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ или (y_n).

Значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ называют соответственно первым, вторым и т.д. членами последовательности. В символе y_n число n называют **индексом**.

Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны два: **аналитический** и **рекуррентный**.

Последовательность задана **аналитически**, если указана формула её n-го члена $y_n = f(n)$.

При **рекуррентном** задании последовательности указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны её предыдущие члены.

Последовательность (y_n) называют **возрастающей**, если каждый член её (кроме первого) больше предыдущего и **убывающей**, если каждый член её (кроме первого) меньше предыдущего. Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные** последовательности.

Арифметическая прогрессия

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют **арифметической прогрессией**, а число d — разностью арифметической прогрессии.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_i = a_j + (i-j)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n > 1$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

Числовую последовательность, все члены которой отличны от 0 и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют **геометрической прогрессией**, а q — **знаменателем** геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия является **возрастающей** последовательностью, если $b_1 > 0, q > 1$ и **убывающей**, если $b_1 > 0, 0 < q < 1$.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_i = b_j \cdot q^{i-j}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n > 1$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогресии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Обсуждение темы

В арифметической и геометрической прогрессиях: показать, что любые два члена прогрессии её полностью определяют; показать вывод формулы суммы n первых её членов.

Задания

15.1. Задана формула n-го члена последовательности $c_n = -7n + 3$. Вычислите первые пять членов последовательности.

15.2. Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), заданной рекуррентно: $x_1 = -3$, $x_n = -x_{n-1} - 2 \ \ (n = 2, 3, 4, \dots)$.

15.3. Начиная с какого номера все члены последовательности (x_n), где $x_n = 3^{4-n}$, будут меньше заданного числа $A = 0{,}5$?

15.4. Докажите, что последовательность $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ убывает.

15.5. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 18, а произведение второго и третьего её членов равно 21. Найдите прогрессию, если известно, что второй её член — натуральное число.

15.6. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые делятся на 7 и не делятся на 13.

15.7. Докажите, что если числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ образуют конечную арифметическую прогрессию, то верно равенство $ab + bc + ac = 3ac$.

15.8. В правильный треугольник со стороной 32 см последовательно вписываются треугольники; вершины каждого последующего треугольника являются серединами сторон предыдущего треугольника. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию и запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

15.9. Между числами 1 и 81 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

15.10. Три числа, сумма которых равна 31, можно рассматривать как три последовательные члена геометрической прогрессии или как 1-й, 2-й и 7-й члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

15.11 (ОММО 2014, №1). В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geqslant 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найти отношение

$$\frac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}.$$

15.12. Найдите сумму цифр всех натуральных чисел от 1 до 10^9.

15.13 (ОММО 2009, №6). Третий, четвёртый, седьмой и последний члены непостоянной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите число членов этой арифметической прогрессии.

Домашнее задание

15.14. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

15.15. Турист идёт из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошёл 10 километров. Определите, сколько километров прошёл турист за третий день, если весь путь он прошёл за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

15.16. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

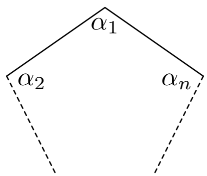
15.17. Улитка ползёт от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

15.18. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

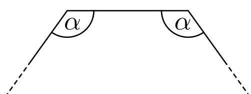
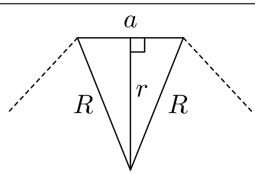
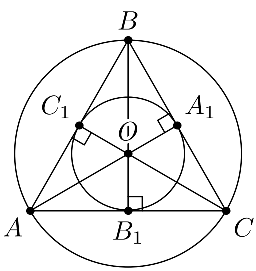
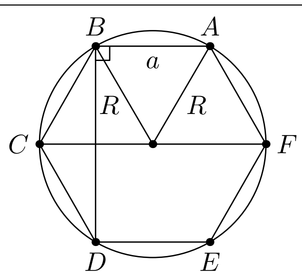
15.19. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10 000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Урок №16. Планиметрия. Сумма углов n-угольника. Правильный многоугольник.

Сумма углов n-угольника

	$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 180^\circ(n-2)$

Правильный n-угольник

	$\alpha = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$
	$a = 2R \cdot \sin \dfrac{180^\circ}{n}$ $a = 2r \cdot \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}$
	Для правильного треугольника: $a = AB = BC = CA$ $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ $R = \dfrac{2}{3}h$ $r = \dfrac{1}{3}h$
	Для правильного шестиугольника: $a = R$ $AB \parallel CF$ $CF = 2a$ $BD \perp BA$ $BD = \sqrt{3}a$

Обсуждение темы

Вывести формулу суммы углов n-угольника.

Вывести формулы, связывающие радиусы вписанной и описанной окружности со стороной правильного многоугольника и числом его сторон.

Для правильного треугольника, четырёхугольника и шестиугольника выразить радиусы вписанной и описанной окружности через сторону.

Задания

16.1. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.

16.2. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведённым в одну из вершин стороны, равен $54°$. Найдите n.

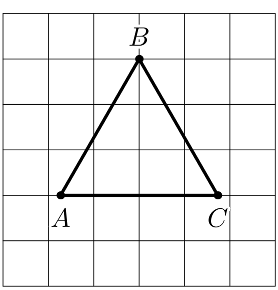
16.3. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

16.4. Около окружности, радиус которой равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.

16.5. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 6?

16.6. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.

16.7. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



Урок №17. Задачи на работу, смеси и сплавы.

Задачи на работу

$A = p \cdot t$, где A — работа, p — производительность, t — время.

При совместной работе: $p_{\text{совм}} = p_1 + p_2$.

Когда объём работы не задан, его можно принять равным 1.

Задачи на бассейны и трубы относятся к этой же теме.

Задачи на смеси и сплавы

Суммарная масса (или объём) смесей или сплавов не меняется. Суммарная масса (или объём) каждого растворённого вещества не меняется.

В задачах на высушивание неизменной остаётся масса сухого вещества.

Задания

17.1. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

17.2. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

17.3. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

17.4. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

17.5. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

17.6. Имеется два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

17.7. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

17.8. Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

17.9. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

17.10. Плиточник должен уложить 175 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 10 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

17.11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй — 25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

17.12. Имеются два сплава золота и серебра, в одном массы этих металлов находятся в отношении $2 : 3$, в другом — в отношении $3 : 7$. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении $5 : 11$?

17.13. Есть два стакана: один с молоком, другой с водой. Из первого перелили ложку во второй, перемешали и перелили ложку смеси обратно.

а) Чего больше: воды в стакане с молоком или молока в стакане с водой?

б) Тот же вопрос, если описанную процедуру повторили 100 раз.

17.14. По случаю празднования дня Смеха Джон и Иван приготовили себе по коктейлю. Джон смешал яблочное варенье с вишнёвым, а Иван — абрикосовое с виноградным. Известно, что в яблочном варенье содержание сахара выше, чем в абрикосовом, а в вишнёвом — чем в виноградном. Можно ли утверждать, что Джон пьёт более сладкий коктейль?

Домашнее задание

17.15. В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

17.16. Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 500 литров?

17.17. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

17.18. Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

17.19. Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

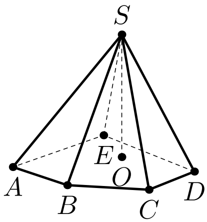
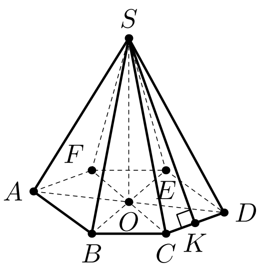
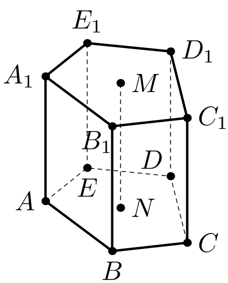
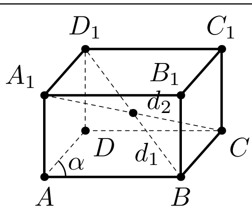
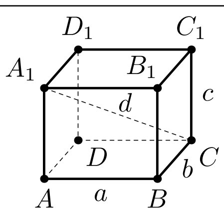
17.20. Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 36 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 6 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

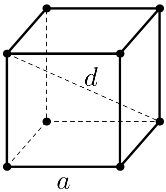
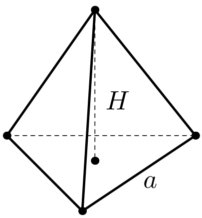
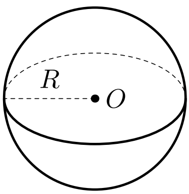
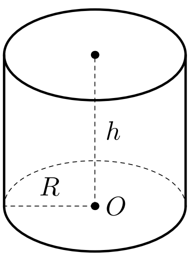
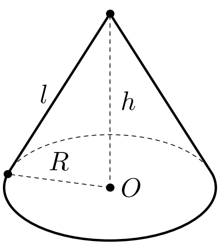
17.21. Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

17.22. Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша — за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

17.23. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Урок №18. Стереометрия. Площади поверхностей и объёмы призмы, пирамиды, конуса и цилиндра.

	**Пирамида** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} H$, где $H = OS$ — высота пирамиды
	**Правильная пирамида** (в основании правильный многоугольник и основание высоты совпадает с центром этого многоугольника) $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2} Ph$, где P — периметр основания пирамиды; $h = SK$ — апофема
	**Прямая призма** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ $V = S_{\text{осн}} H$, где $H = MN$ — высота $S_{\text{бок}} = PH$, где P — периметр основания призмы
	**Прямой параллелепипед** $d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$ $d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha$ $S_{\text{бок}} = 2(a+b)c$ $S_{\text{полн}} = 2(a+b)c + 2ab\sin\alpha$ $V = abc\sin\alpha$
	**Прямоугольный параллелепипед** $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $S = 2(ab + bc + ca)$ $V = abc$

	**Куб** $d = \sqrt{3}a$ $S = 6a^2$ $V = a^3$ $r = \dfrac{a}{2}; R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$
	**Правильный тетраэдр** 4 грани — равносторонние треугольники $S = \sqrt{3}a^2$ $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$ $H = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$
	**Шар** $S = 4\pi R^2$ $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
	**Цилиндр** $S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$ $S_{\text{полн}} = 2\pi R(h+R)$ $V = \pi R^2 h$
	**Конус** $S_{\text{бок}} = \pi Rl$, где l — образующая $S_{\text{полн}} = \pi R(l+R)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

Задания

18.1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ R — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $AB = 1$, а $SR = 2$. Найдите площадь боковой поверхности.

18.2. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

18.3. Объём шара равен 288π. Найдите площадь его поверхности, делённую на π.

18.4. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объём пирамиды.

18.5. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объём конуса, делённый на π.

18.6. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объём пирамиды.

18.7. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь её поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.

18.8. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объём призмы равен 30. Найдите её боковое ребро.

18.9. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

18.10. Объём куба равен $24\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

18.11. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых рёбер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

18.12. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.

18.13. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.

18.14. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

18.15. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует углы 30°, 30° и 45° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объём параллелепипеда.

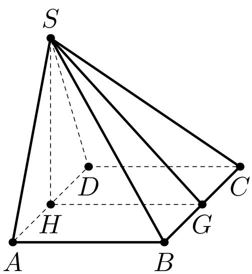
18.16. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.

18.17. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из рёбер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объём параллелепипеда.

18.18. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые рёбра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.

18.19. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

18.20. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объём пирамиды.



18.21. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.

18.22. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны $\sqrt{3}$.

18.23. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 и высота равна 4.

18.24. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 6. Какой будет площадь поверхности призмы, если все ее рёбра увеличить в три раза?

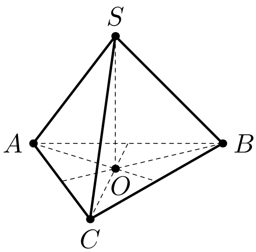
18.25. Диагональ куба равна 1. Найдите площадь его поверхности.

18.26. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объём параллелепипеда.

18.27. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 12, объём равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

Домашнее задание

18.28. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в т. O. Площадь треугольника ABC равна 2, объём пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



18.29. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ M — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $BC = 3$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM.

18.30. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π, а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

18.31. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?

18.32. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 12, объём равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

18.33. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объём, делённый на π.

18.34. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.

18.35. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объём, делённый на π.

18.36. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SA равно 5, сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

18.37. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны $\sqrt{3}$.

18.38. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объём равен $\sqrt{3}$.

18.39. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь её поверхности.

18.40. Во сколько раз увеличится объём пирамиды, если её высоту увеличить в четыре раза?

18.41. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

18.42. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

18.43. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?

18.44. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

18.45. Во сколько раз увеличится объём конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза?

18.46. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 3. Объём параллелепипеда равен 36. Найдите его диагональ.

18.47. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объём увеличится на 19. Найдите ребро куба.

18.48. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь её поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.

18.49. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, делённую на π.

18.50. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

18.51. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, делённую на π.

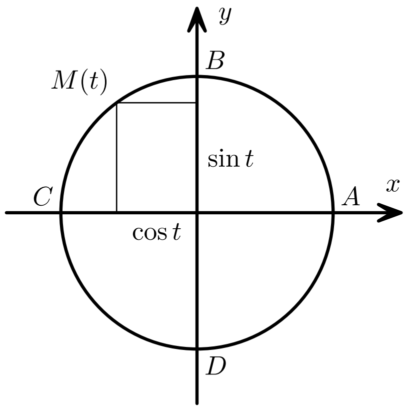
18.52. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите её объём.

18.53. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, делённую на π.

18.54. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

Урок №19. Тригонометрия: основные понятия и формулы. Упрощение и вычисление тригонометрических выражений.

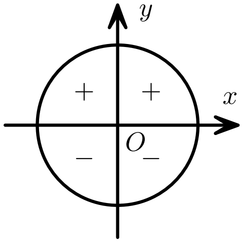
Определение. Если точка M числовой единичной окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом** числа t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом** числа t и обозначают $\sin t$.



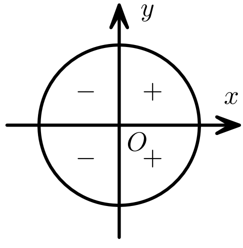
$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$
$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

$\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, где $t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

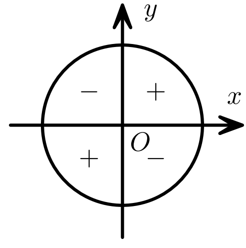
$\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, где $t \neq \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$



знаки синуса



знаки косинуса



знаки тангенса и котангенса

Градусная мера. Градус (°) — это поворот луча на 1/360 часть одного полного оборота. Один градус состоит из 60 минут (‘); одна минута — соответственно из 60 секунд (“).

$1\ \textit{рад} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

Формулы приведения для преобразования выражения вида

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \quad \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

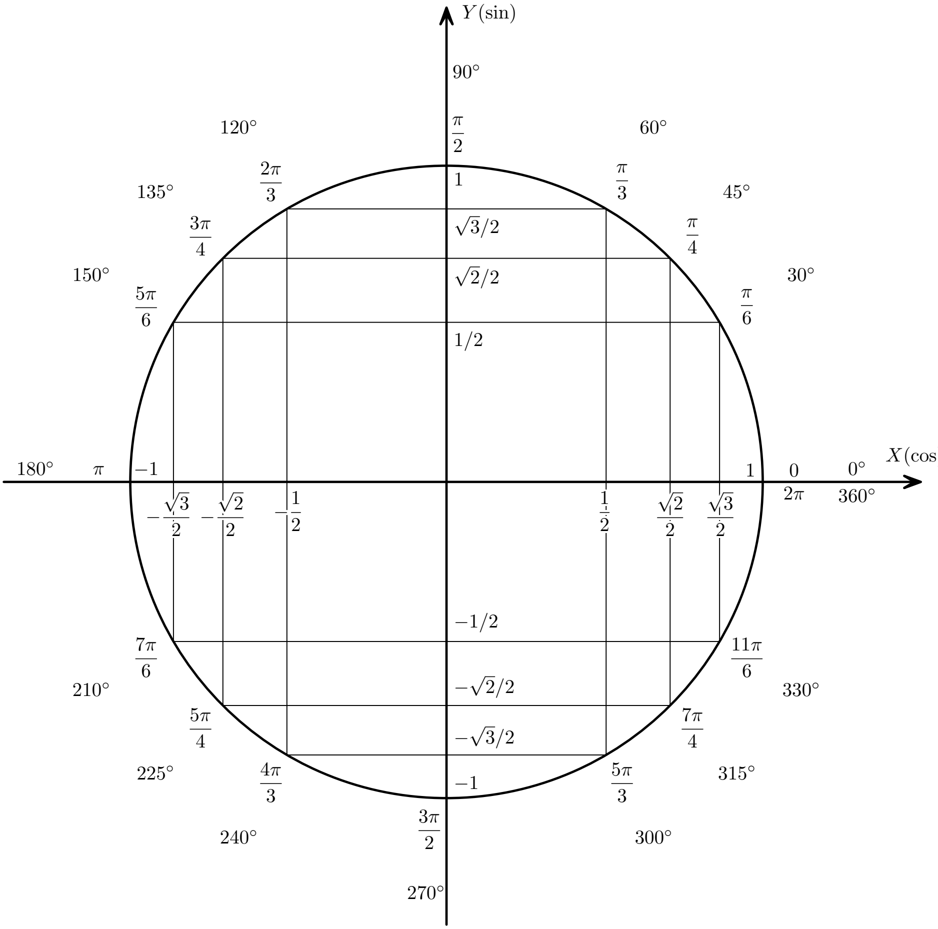
а) Перед приведённой функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция при $0 < \alpha < \pi/2$.

б) Функция меняется на кофункцию, если n нечётно; функция не меняется, если n чётно. Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенс.

Пример: $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

Пример: $\operatorname{tg}(14\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Альтернативный способ — использование формул тригонометрических функций суммы (разности) аргументов.



$Y\,(\sin)$
$90°$
$\frac{\pi}{2}$
$120°$
$60°$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$135°$
$45°$
1
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}/2$
$\sqrt{2}/2$
$150°$
$30°$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$1/2$
$X\,(\cos)$
$180°$
π
-1
1
0
$0°$
2π
$360°$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-1/2$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$210°$
$330°$
$-\sqrt{2}/2$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$-\sqrt{3}/2$
$225°$
$315°$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
-1
$\frac{3\pi}{2}$
$240°$
$300°$
$270°$

Основные формулы

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$
$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$
$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$	$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$	$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\rho\sin(\alpha+\varphi),$	где $\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Обсуждение темы

Показать на числовой единичной окружности основное тригонометрическое тождество.

Вывести из формул синуса (косинуса) суммы (разности) углов формулы для тангенсов суммы (разности) углов.

Вывести из формул синуса (косинуса) суммы (разности) углов формулы двойных и тройных углов.

Показать как формулы тригонометрических функций сумм (разности) углов могут заменить использование формул приведения.

Из косинуса двойного угла вывести функции половинных углов.

Вывести из формул синуса (косинуса) суммы (разности) углов формулы суммы, разности и произведения синусов и косинусов.

Вывести формулу вспомогательного угла.

Домашнее задание

19.1. Найдите значение выражения $\dfrac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$.

19.2. Найдите значение выражения $\dfrac{21(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$.

19.3. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.

19.4. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{31\pi}{4}\right)}$.

19.5. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.

19.6. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

19.7. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$.

19.8. Найдите $24\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}2$.

19.9. Найдите $\dfrac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0{,}6$.

19.10. Найдите $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

19.11. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6$.

19.12. Найдите значение выражения $\sqrt{32}\cos^2\dfrac{13\pi}{8} - \sqrt{32}\sin^2\dfrac{13\pi}{8}$.

19.13. Найдите $\dfrac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

19.14. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{7\sin\alpha + 13\cos\alpha}{5\sin\alpha - 17\cos\alpha} = 3$.

19.15. Найдите значение выражения $\sqrt{48} - \sqrt{192}\sin^2\dfrac{\pi}{12}$.

19.16. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\alpha - 7\pi) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha + \pi)}$.

19.17. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}(5\pi - \gamma) - \operatorname{tg}(-\gamma)$, если $\operatorname{tg}\gamma = 7$.

19.18. Найдите значение выражения $5\sin(\alpha - 7\pi) - 11\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}25$.

19.19. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ}$.

19.20. Определите знак числового выражения:

а) $\sin 2 - \operatorname{ctg} 5{,}5$;

б) $\sin(-5)\cos(-6)\operatorname{tg}(-7)\operatorname{ctg}(-8)$.

19.21. Упростите выражение $\dfrac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$.

19.22. Дано: $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.

Докажите, что $f(2\sin x) = 9 - 10\sin x - 8\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{-1}$.

Урок №20. Стереометрия. Углы между прямыми и расстояния между точками. Фигуры с вырезами.

Задачи на нахождение расстояния между точками пространственной фигуры

Используем 2 способа:

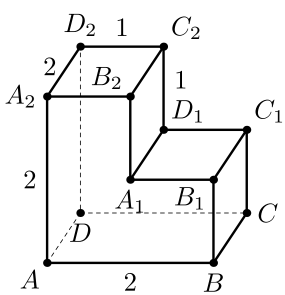
1. Применяем теорему Пифагора.
2. Используем формулу $\rho(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

Задачи на нахождение угла между отрезками пространственной фигуры

Находим искомый угол, используя теорему косинусов или учитывая равносторонность, равнобедренность или прямоугольность треугольника.

Задания

20.1. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.

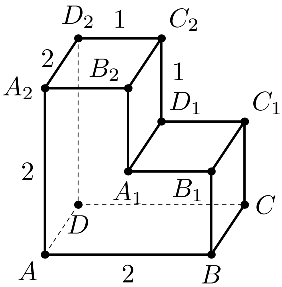


20.2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.

20.3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.

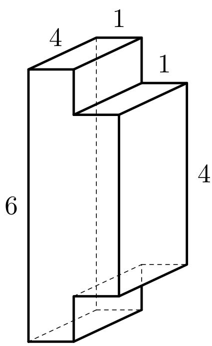
20.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 21$. Найдите синус угла между прямыми CD и A_1C_1.

20.5. Найдите угол CAD_2 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

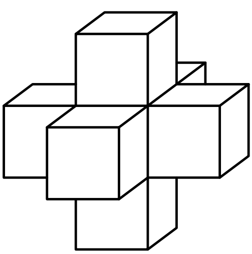


20.6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 3, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.

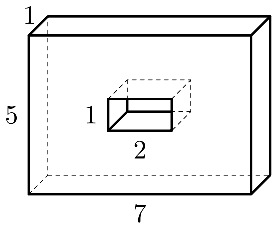
20.7. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



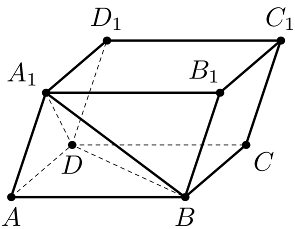
20.8. Найдите объём пространственного креста, изображённого на рисунке и составленного из единичных кубов.



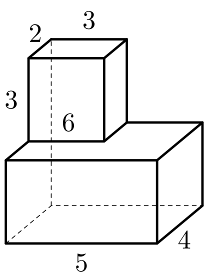
20.9. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



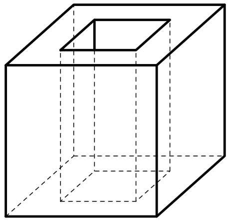
20.10. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объём треугольной пирамиды $ABDA_1$.



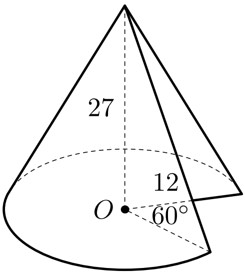
20.11. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



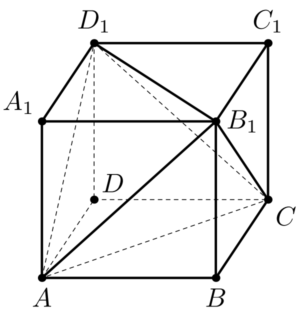
20.12. Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



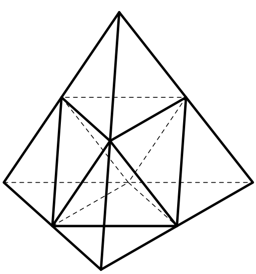
20.13. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.



20.14. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



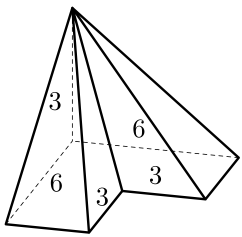
20.15. Объём тетраэдра равен 1,9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



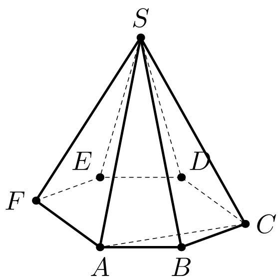
20.16. Площадь поверхности тетраэдра равна 1,2. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

20.17. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.

20.18. Найдите объём пирамиды, изображённой на рисунке. Её основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.



20.19. Объём треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объём шестиугольной пирамиды.



Домашнее задание

20.20. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.

20.21. Найдите угол DBD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$. Ответ дайте в градусах.

20.22. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1.

20.23. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла AD_1D.

20.24. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.

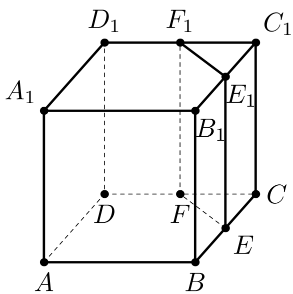
20.25. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.

20.26. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и B_1D_1. Ответ дайте в градусах.

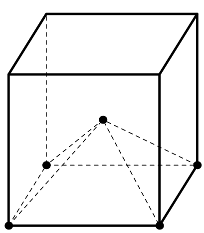
20.27. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.

20.28. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AA_1, точка L — середина ребра A_1B_1, точка M — середина ребра A_1D_1. Найдите угол MLK. Ответ дайте в градусах.

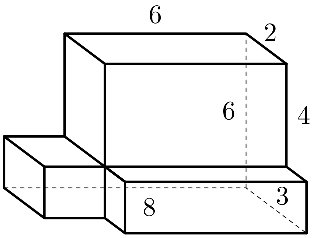
20.29. Объём куба равен 12. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



20.30. Объём куба равен 12. Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



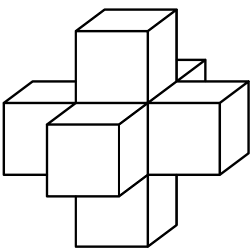
20.31. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



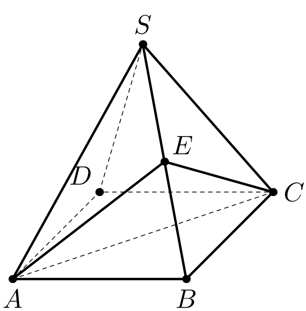
20.32. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, B_1, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

20.33. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ правильной шестиугольной призмы $ABC \ldots D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.

20.34. Найдите площадь поверхности пространственного креста, изображённого на рисунке и составленного из единичных кубов.



20.35. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E — середина ребра SB. Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.



Урок №21. Комбинаторика. Теория вероятностей. Статистика. Часть 1.

Комбинаторика

Правило сложения. Если объект A можно выбрать n способами, а объект B можно выбрать m способами, то выбрать объект A **или** B можно $m+n$ способами.

Правило умножения. Если объект A можно выбрать n способами, а объект B можно выбрать m способами, то выбрать объекты A **и** B можно $m \cdot n$ способами.

Правило деления. Если каждый способ при подсчёте был учтён n раз, то результат нужно поделить на n.

Число перестановок из n элементов $P_n = n!$

Число сочетаний из n элементов по m элементов $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Порядок элементов в группах не важен.

Число размещений из n элементов по m элементов $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Порядок элементов в группах важен.

Вероятность

Элементарные события (исходы) опыта — простейшие события, которыми может закончиться случайный опыт. Сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

Для случая равновозможных элементарных исходов вероятность события A $\quad p(A) = \dfrac{m}{n}$, где n — общее число элементарных исходов, m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Объединение событий $A \cup B$ — событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий A, B.

Пересечение событий $A \cap B$ — событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B.

Вероятность противоположного события $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Для несовместных событий $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Для совместных событий $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Для независимых событий $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Формула полной вероятности $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)$.

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)},$$

где:

- $P(A)$ — априорная вероятность гипотезы A, или простыми словами вероятность гипотезы A.
- $P(A|B)$ — вероятность гипотезы A при наступлении события B (это называется апостериорная вероятность).
- $P(B|A)$ — вероятность события B при истинности гипотезы A.
- $P(B)$ — полная вероятность наступления события B.

Доказательство вытекает из определения условной вероятности. Вероятность совместного события AB может быть выражена двумя способами $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Формула Бернулли Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна, то вероятность P_n^k того, что данное событие наступит ровно k раз в n независимых испытаниях равна $P_n^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Статистика

Среднее арифметическое набора чисел это их сумма, делённая на их количество.

Например среднее арифметическое чисел $1, 3, 13, 10$ равно $\dfrac{1+3+13+10}{4} =$ 6,75.

Медиана набора чисел — число, которое будет расположено в середине набора, если упорядочить числа по возрастанию (для нечётного количества чисел) или среднее арифметическое двух средних чисел (если чисел — чётное количество).

Например медианой набора $1, 3, 5, 4, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3$ будет число 3, так как после расположения чисел в порядке возрастания получается следующий набор $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5$, в середине которого стоит число 3.

Медианой набора $1, 3, 7, 2, 3, 2$ будет число 2,5. Действительно, после расположения чисел в порядке возрастания получается набор $1, 2, 2, 3, 3, 7$, в середине которого стоят два числа 2 и 3 — их среднее равно 2,5.

Мода набора чисел — число, встречающееся наибольшее число раз.

Например у набора $1, 2, 1, 3, 1, 4, 4, 1$ модой является число 1.

Обсуждение темы

Привести примеры на применение правила сложения, умножения, деления.

Вывести формулы для числа перестановок, сочетаний и размещений.

Привести примеры на «и» и «или» в теории вероятностей.

Задачи

21.1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8, при условии, что цифры не должны повторяться?

21.2. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

21.3. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить двух королей — чёрного и белого, чтобы они не били друг друга?

21.4. Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе ужин, если на ужин она съедает двух мышек?

21.5. В проекте приняли участие 24 человека. Сколько способами можно выбрать:

а) двух счастливчиков, которые получат одинаковые призы;

б) трёх счастливчиков, которые получат разные призы?

21.6. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных, например «иялни» получается перестановкой букв слова «линия») можно получить, переставляя буквы слова «вектор», «линия»?

Домашнее задание

21.7. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

21.8. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

21.9. Если гроссмейстер **А** играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера **Б** с вероятностью 0,52. Если **А** играет чёрными, то он выигрывает у **Б** с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры **А** и **Б** играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найти вероятность того, что **А** выиграет оба раза.

21.10. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

21.11. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность» равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм» равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

21.12. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 18 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

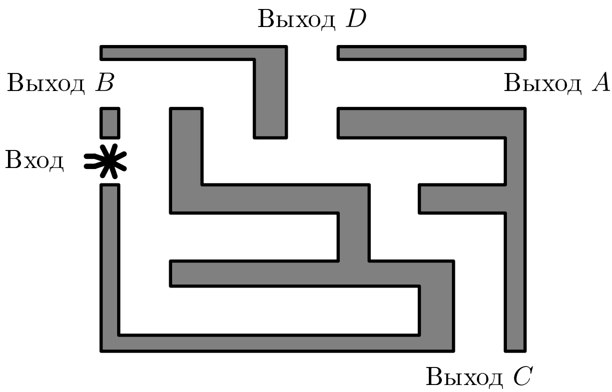
21.13. В чемпионате по гимнастике участвуют 76 спортсменок: 30 из России, 27 из Украины, остальные — из Белоруссии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Белоруссии.

21.14. Игральную кость (кубик) бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало не менее 4 очков?

21.15. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить какая из команд будет первая владеть мячом. Команда **M** по очереди играет с командами **A**, **B**, **C**. Найдите вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом выиграет команда **M**. Результат округлите до сотых.

21.16. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист **A** хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что **A** пойдёт в магазин?

21.17. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



21.18. В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист **П** полетит первым рейсом вертолёта.

21.19. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

21.20. В чемпионате мира участвует 20 команд. С помощью жребия их нужно разделить на 4 группы по 5 команд в каждой. В ящике лежат карточки с номерами групп: $1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4$. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Франции окажется во второй группе?

21.21. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «Сумма очков равна 5»?

21.22. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 3 очка. Результат округлите до сотых.

21.23. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

21.24. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

21.25. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?

21.26. На борту самолёта 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир **В** высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру **В** достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

21.27. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

21.28. Какова вероятность того, что последние две цифры случайного телефонного номера различны?

21.29. В группе шесть человек, среди них — Михаил и Олег. Группу случайным образом делят на три пары. Найдите вероятность того, что Михаил и Олег окажутся в одной паре.

21.30. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что второй раз выпало 3 очка.

21.31. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

21.32. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равным 8».

21.33. В одном ресторане в г.Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

21.34. Телефон передаёт sms-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

Урок № 22. Стереометрия. Сравнение объёмов двух тел. Сечения. Другие виды задач.

Сравнение объёмов (или площадей поверхности) двух тел

Пишем выражения для V_1 и V_2 (или S_1 и S_2), затем ищем их отношение.

Для подобных фигур $\dfrac{V_2}{V_1} = k^3$ $\left(\dfrac{S_2}{S_1} = k^2\right)$, где k — коэффициент подобия.

Задачи на деталь в воде

$V_{\text{Д}} = \Delta V_{\text{воды}}$ — объём детали равен изменению объёма воды.

Задания

22.1. В сосуд в виде конуса (вершиной вниз) налита жидкость до 2/3 высоты. Объём налитой жидкости 64 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

22.2. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

22.3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.

22.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.

22.5. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 3. Боковые ребра равны $7/\pi$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

22.6. В цилиндрический сосуд налили $3000\,\text{см}^3$ воды. Уровень воды при этом достиг 20 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

22.7. От треугольной пирамиды, объём которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсеченной треугольной пирамиды.

22.8. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

22.9. Объём треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

22.10. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

22.11. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.

22.12. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

22.13. Во сколько раз объём конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объёма конуса, вписанного в нее?

22.14. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте (в см) будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого?

22.15. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые рёбра равны $\dfrac{5}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

22.16. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\dfrac{S}{\pi}$.

22.17. Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\dfrac{S}{\pi}$.

22.18. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.

22.19. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 24. Найдите объём цилиндра.

22.20. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 28. Найдите объём конуса.

22.21. Объём одного шара в 27 раз больше объёма второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

22.22. Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

22.23. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.

22.24. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

22.25. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 24, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

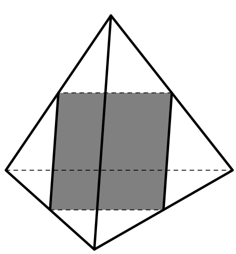
22.26. Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

22.27. Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

22.28. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.

Домашнее задание

22.29. Рёбра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его рёбер.



22.30. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 17. Найдите его объём.

22.31. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объём параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

22.32. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объём, деленный на π.

22.33. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили $2300\,\text{см}^3$ воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

22.34. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.

22.35. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 20.

22.36. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объём этого шара, делённый на π.

22.37. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\dfrac{2}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

22.38. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали? Ответ выразите в литрах.

22.39. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?

22.40. Объём первого цилиндра равен $12\,\text{м}^3$. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём (в м^3) второго цилиндра.

22.41. Объём конуса равен 32. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

22.42. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5,5. Найдите объём параллелепипеда.

22.43. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его рёбра увеличить в 3 раза?

22.44. Конус вписан в цилиндр. Объем конуса равен 5. Найдите объём цилиндра.

22.45. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

22.46. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

22.47. Объём одного куба в 8 раз больше объёма другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

22.48. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.

22.49. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Урок №23. Комбинаторика. Теория вероятностей. Часть 2.

Задания

23.1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стёкол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

23.2. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху на стене с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху, Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

23.3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

23.4. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

23.5. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

23.6. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

23.7. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

23.8. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

23.9. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

23.10. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

23.11. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

23.12. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить какая из команд будет первая владеть мячом. Команда **М** по очереди играет с командами **А**, **В**, **С**. Найдите вероятность того, что в двух первых матчах право первой владеть мячом выиграет команда **М**, а в третьем команда **С**? Результат округлите до сотых.

23.13. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

23.14. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

23.15. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина **А**, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина **Б**, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

23.16. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент **З** получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что **З** сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

23.17. Катя дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при одном из бросков выпало 5 очков.

23.18. Лена дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 11 очков. Найдите вероятность того, что при втором броске выпало 6.

23.19. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся **О** верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что **О** верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что **О** верно решит ровно 11 задач.

23.20. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного меньше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

23.21. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

23.22. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 2 рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублёвые монеты лежат в одном кармане.

23.23. **Н** и **В** играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну то наступает ничья. В сумме выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что **Н** проиграла.

23.24. В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

23.25. **Н** и **В** играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну то наступает ничья. Первым бросил **Н**, у него выпало 2 очка, Найдите вероятность того, что **В** не выиграет. Ответ округлите до сотых.

23.26. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

23.27. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

23.28. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

23.29. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

23.30. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублёвые монеты лежат теперь в разных карманах.

23.31. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

23.32. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

23.33. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

23.34. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?

23.35. В городе 48% взрослого населения мужчины. Пенсионеры осставляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для проведения исследования социологи случайным образом выбрали взрослого мужчину, проживающего в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

23.36. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

23.37. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента направляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

23.38. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

23.39. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастреры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

23.40. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

23.41. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры?

23.42. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трёх играх победила команда **А**. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвёртый раунд?

23.43. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определён жребием. Всего в турнире участвует 16 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и проигрыша у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга — Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком то турнире придётся сыграть друг с другом?

23.44. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

23.45. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

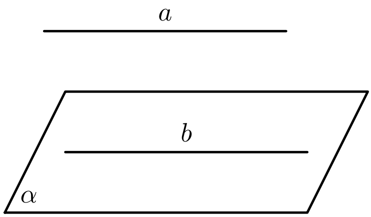
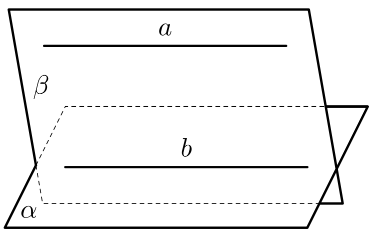
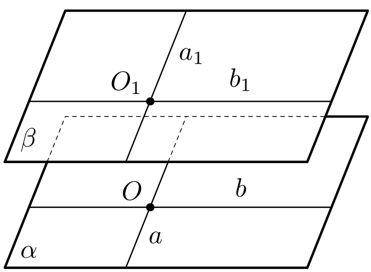
23.46. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

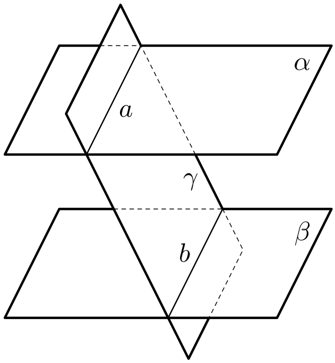
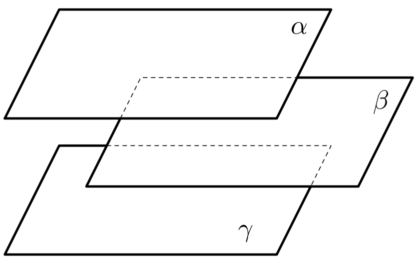
23.47. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0{,}8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

23.48. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

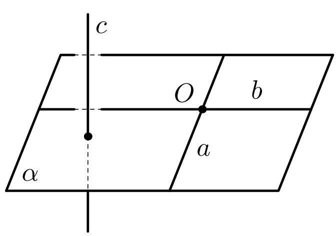
Урок №24. Стереометрия. Параллельность, перпендикулярность прямых и плоскостей. Угол между скрещивающимися прямыми.

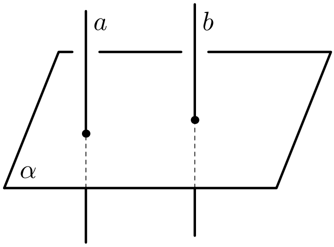
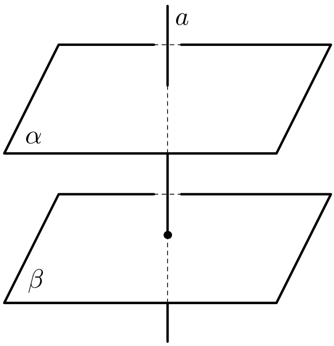
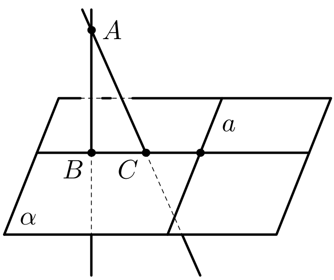
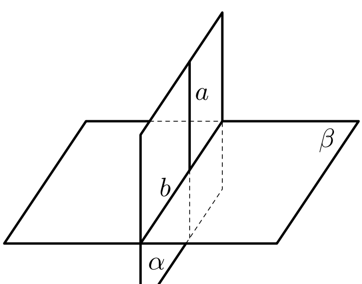
Параллельные прямые, плоскости, прямая и плоскость

<table>
<tr><td>
</td><td>Если $b \subset \alpha$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \alpha$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Если $a \subset \beta, a \parallel \alpha$ и $b = \alpha \cap \beta$,
то $a \parallel b$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Признак параллельности двух плоскостей:
если $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ и $a \cap b = O$
$a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$ и $a_1 \cap b_1 = O_1$,
$a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$,
то $\alpha \parallel \beta$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma$ и $\alpha \parallel \beta$
то $a \parallel b$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если $\alpha \parallel \gamma$ и $\beta \parallel \gamma$,
то $\alpha \parallel \beta$</td>
</tr>
</table>

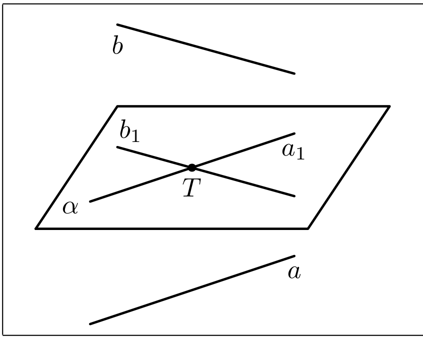
Перпендикулярные плоскости, прямая и плоскость

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ и $a \cap b = O$
$c \perp a$ и $c \perp b$, то $c \perp \alpha$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$
обратное утверждение
если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$
обратное утверждение
если $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha \perp a$, то $\beta \perp a$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>**Теорема о трёх перпендикулярах:**
если $AB \perp \alpha$, $BC \subset \alpha$, $a \subset \alpha$, $a \perp BC$,
то $a \perp AC$
обратное утверждение
если $AB \perp \alpha$, $BC \subset \alpha$, $a \subset \alpha$, $a \perp AC$
то $a \perp BC$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>**Признак перпендикулярности двух плоскостей:**
если $a \subset \alpha$ и $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$
обратное утверждение
если $\alpha \perp \beta$, $b = \alpha \cap \beta$, $a \subset \alpha$, $a \perp b$
то $a \perp \beta$</td>
</tr>
</table>

Угол между двумя прямыми

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении этих прямых: $0° < \angle(a, b) \leqslant 90°$. **Углом между скрещивающимися прямыми** называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.



$\varphi = \angle(a, b) = \angle(a_1, b_1)$, где
$a_1 \cap b_1 = T, a_1 \parallel a, b_1 \parallel b$

Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен $90°$. Угол между параллельными прямыми равен нулю.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.

Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми строим треугольник, стороны которого параллельны данным прямым. Находим искомый угол, используя теорему косинусов и/или учитывая равносторонность, равнобедренность или прямоугольность треугольника.

Обсуждение темы

Доказать теорему о трёх перпендикулярах.

Задания

24.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, точки D, E — середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BE.

24.2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1.

24.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

24.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка E — середина ребра SC. Найдите тангенс угла между прямыми SA и BE.

24.5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите синус угла между прямыми AL и BM, где M — середина ребра SC, L — середина ребра SB.

24.6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

24.7. PH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$, O — точка пересечения медиан треугольника BCP.

а) Докажите, что прямые PH и AO не имеют общих точек.

б) Найдите угол между прямыми PH и AO если известно, что $AB = PH$.

24.8. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B, C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB — прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2, AC = \sqrt{6}$.

Домашнее задание

24.9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между прямыми SF и BM, где M — середина ребра SC.

24.10. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка M — середина ребра SB. Найдите угол между прямыми CM и SO, где O — центр основания пирамиды.

24.11. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина BD, точка M — середина BC. Найдите угол между прямыми AK и DM.

Урок №25. Функции. Основные понятия. Преобразование графиков.

Основные понятия

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x. Обозначение: $y = f(x)$.
Независимая переменная x — аргумент функции f.
Число y, соответствующее x, — значение функции f в точке x.

График функции f — множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, где $y = f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

Область определения функции $f(x)$ — множество значений x, для которых выполнимы действия, указанные в правиле f. Обозначается: $D(f)$.

Область значений функции $f(x)$ — множество значений функции $f(x)$, которые она принимает при изменении x на $D(f)$. Обозначается: $E(f)$.

Чётность и нечётность функций

Функцию $y = f(x), x \in X$, называют **чётной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функцию $y = f(x), x \in X$, называют **нечётной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то X называют **симметричным множеством**.

Если функция $y = f(x)$ — чётная или нечётная, то ее область определения — симметричное множество.

График чётной функции симметричен относительно оси y.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Верны и обратные утверждения:

Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси y, то $y = f(x)$ — чётная функция.

Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$ — нечётная функция.

Периодичность функций

Функция называется периодической с периодом $T > 0$, если для любого x из $D(f)$ выполняется $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$, причём $x - T$ и $x + T$ также входят в область определения.
Наименьший период называют основным (главным) периодом функции. Например, у функции $y = \sin(x)$, основной период $T = 2\pi$.

Некоторые свойства периодических функций:

- Если число T является периодом функции $y = f(x)$, то и любое число вида nT, где $n \in \mathbb{N}$, также является периодом этой функции.
- Если число T является периодом функции $y = f(x)$, то число T/k является периодом функции $y = f(kx + b)$, где $k \neq 0$.

Монотонность и ограниченность функций

Функция f **возрастает** на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Например, функция $y = x^2$ возрастает на интервале $[0; +\infty)$.

Функция f **убывает** на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

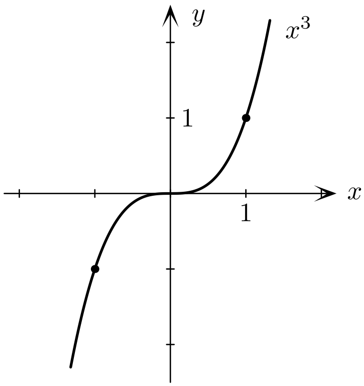
Обычно термины «возрастающая», «убывающая» объединяют общим названием **монотонная**.

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве $X \subset D(f)$, если все значения функции на множестве X больше некоторого числа (иными словами, если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$).

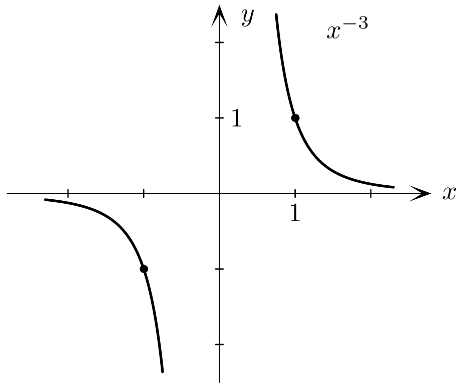
Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве $X \subset D(f)$, если все значения функции на множестве X меньше некоторого числа (иными словами, если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$).

Если функция ограничена и сверху, и снизу, то ее называют **ограниченной**.

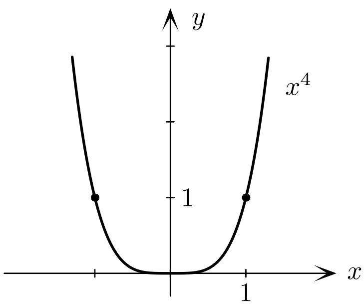
Примеры основных функций



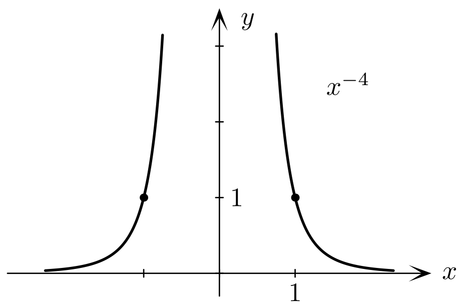
$y = x^3$



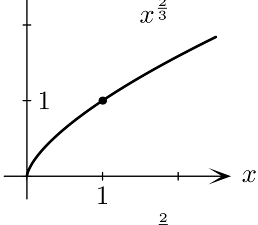
$y = x^{-3}$



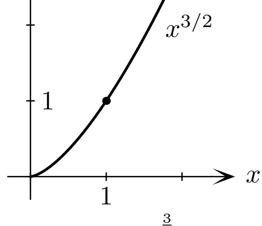
$y = x^4$



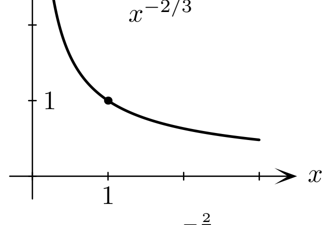
$y = x^{-4}$



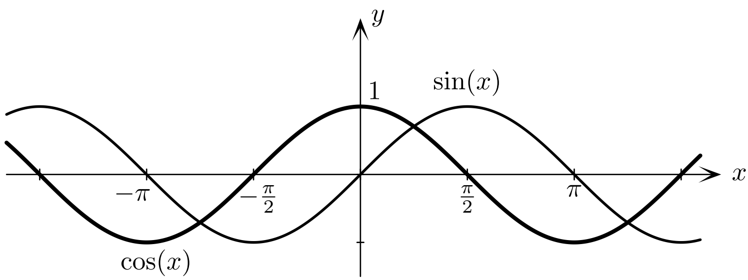
$y = x^{\frac{2}{3}}$



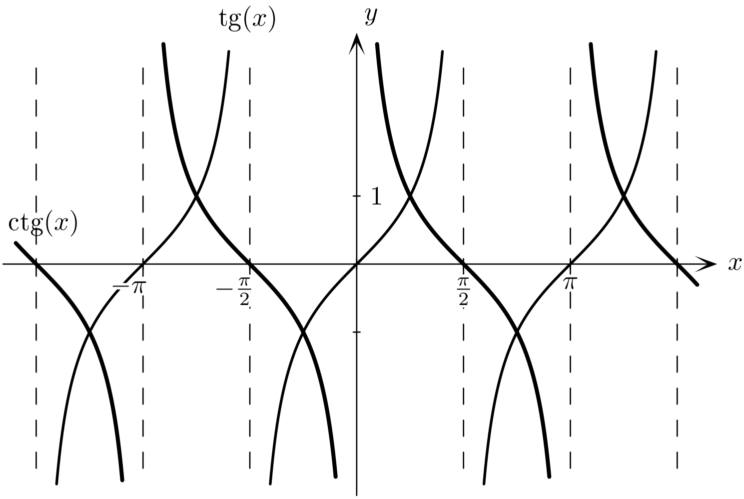
$y = x^{\frac{3}{2}}$



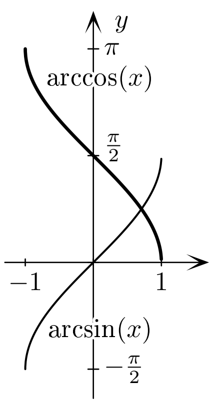
$y = x^{-\frac{2}{3}}$



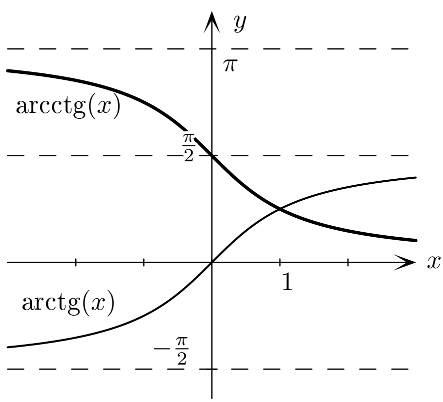
$y = \sin x$ и $y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$



$y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$



$y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Преобразования графиков функций

Рассмотрим линейные преобразования функции $y = f(x)$ или её аргумента x к виду $y = af(kx+b)+m$, а также преобразования с использованием модуля.

$f(x) \to f(x+a)$
Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц влево, если $a > 0$, вправо, если $a < 0$.

$f(x) \to f(x)+b$
Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на $|b|$ единиц вверх, если $b > 0$, вниз, если $b < 0$.

$f(x) \to f(-x)$
Симметричное отражение графика относительно оси ординат.

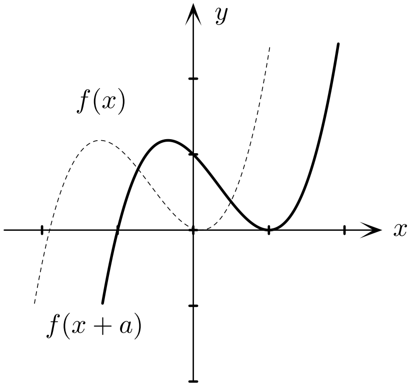
$f(x) \to -f(x)$
Симметричное отражение графика относительно оси абсцисс.

$f(x) \to f(ax)$
При $a > 1$ — сжатие графика к оси ординат в a раз.
При $0 < a < 1$ — растяжение графика от оси ординат в $1/a$ раз ($1/a > 1$).

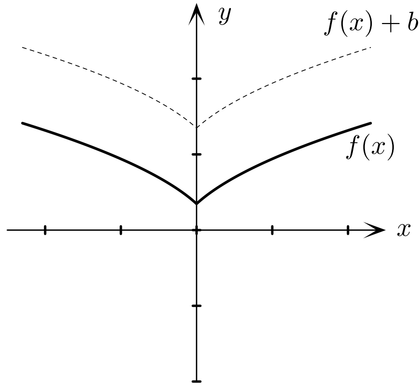
$f(x) \to bf(x)$
При $b > 1$ — растяжение графика от оси абсцисс в b раз.
При $0 < b < 1$ — сжатие графика к оси абсцисс в $1/b$ раз ($1/b > 1$).

$f(x) \to |f(x)|$
При $f(x) > 0$ — график остаётся без изменений.
При $f(x) < 0$ — график симметрично отражается относительно оси абсцисс.

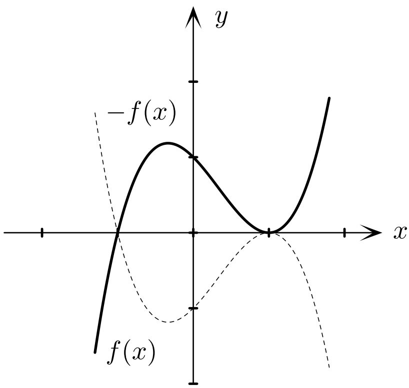
$f(x) \to f(|x|)$
Отбрасываем часть графика функции $f(x)$, лежащую левее оси OY.
Обводим ту часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит правее оси OY, и отражаем её симметрично оси OY.



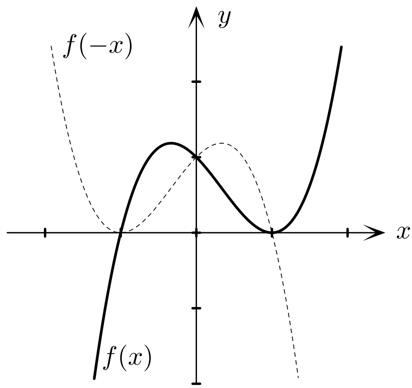
$y = f(x)$ и $y = f(x+a)$



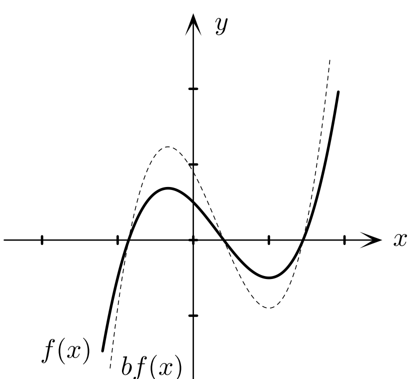
$y = f(x)$ и $y = f(x)+b$



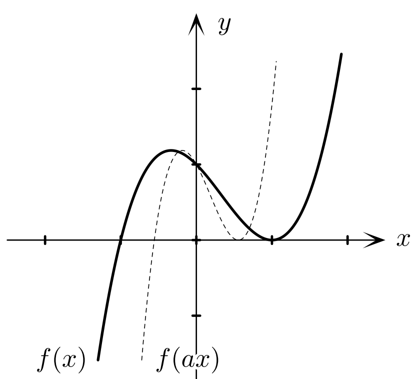
$y = f(x)$ и $y = -f(x)$



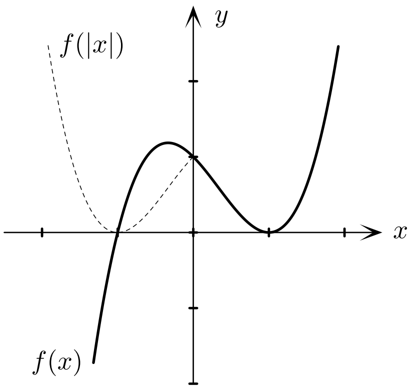
$y = f(x)$ и $y = f(-x)$



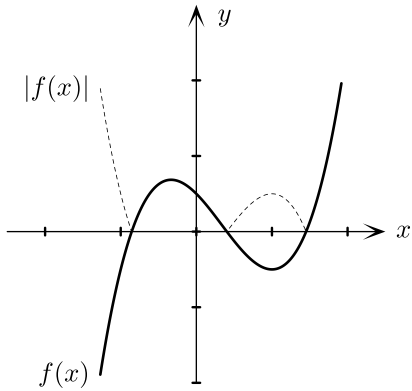
$y = f(x)$ и $y = bf(x)$



$y = f(x)$ и $y = f(ax)$



$y = f(x)$ и $y = f(|x|)$



$y = f(x)$ и $y = |f(x)|$

Построение графика функции $y = f(kx + a)$

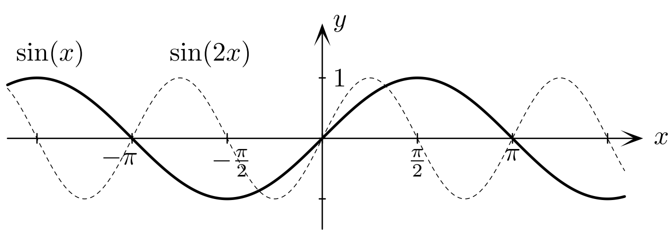
Для построения графика прежде всего нужно записать функцию в виде $y = f\left(k\left(x + \dfrac{a}{k}\right)\right)$. Затем построить график $y = f(kx)$ и сдвинуть его на $\dfrac{a}{k}$ по оси OX.

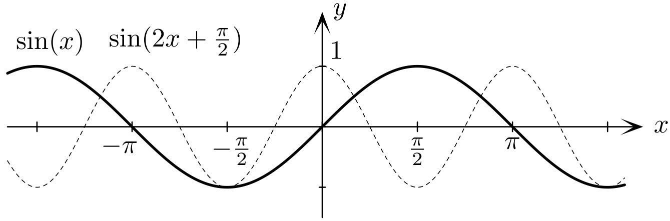
Порядок действия важен! Сначала растяжение или сжатие, лишь потом сдвиг.

Пример: $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin 2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Строим график $\sin x$ и сжимаем его в 2 раза по оси OX, чтобы получить график $y = \sin(2x)$.

Переносим график параллельно оси OX влево на $\dfrac{\pi}{4}$.





Обсуждение темы

Вспомнить основные виды графиков степенных функций. Построить графики функций модуля, целой и дробной части числа. Построить графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Проанализировать все графики на монотонность, ограниченность, периодичность, чётность, найти области определений и множества значений.

Рассмотреть построение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ по координатам трёх точек. Проанализировать график при различных знаках a, b и c.

Исследовать на чётность функции: $y = \dfrac{x+2}{x^2-16}$; $y = 2x^3 \cdot \sin x$; $y = \sqrt[3]{x} - \operatorname{tg} x$; $y = \sqrt{\sin x}$; $y = \dfrac{\cos 5x + 1}{|x|}$.

Задания

25.1. [ОММО 2018, заочный тур]. Найдите наименьший период функции $\cos(\sin x)$.

25.2. С помощью преобразования графика функции $y = \sin x$ построить

$$y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) - 2.$$

25.3. С помощью преобразования графика функции $y = \arccos x$ построить

$$y = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}(x-1)\right).$$

Домашнее задание

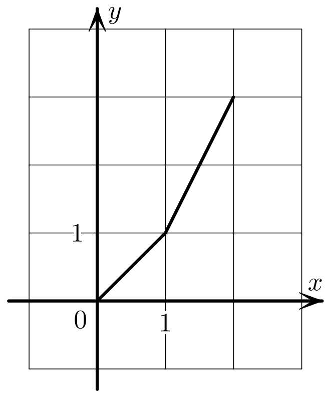
25.4. С помощью преобразования графика функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ построить

$$y = -\frac{1}{2}(8x-4)^{\frac{2}{3}} + 3.$$

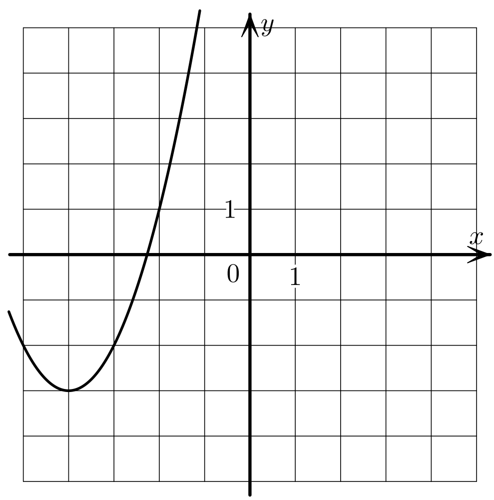
25.5. С помощью преобразования графика функции $y = \cos x$ построить

$$y = \frac{3}{2}\cos(2-2x) + 1.$$

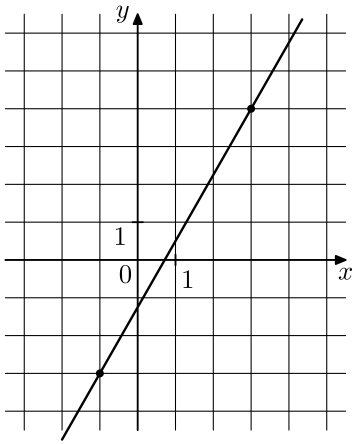
25.6. Известно, что $f(x)$ — чётная периодическая функция с наименьшим положительным периодом, равным 4. На рисунке изображён её график на отрезке $[0; 2]$. Вычислите $f(11) - 3f(-6)$.



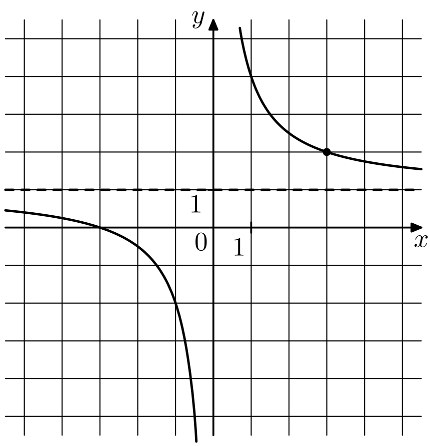
25.7. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



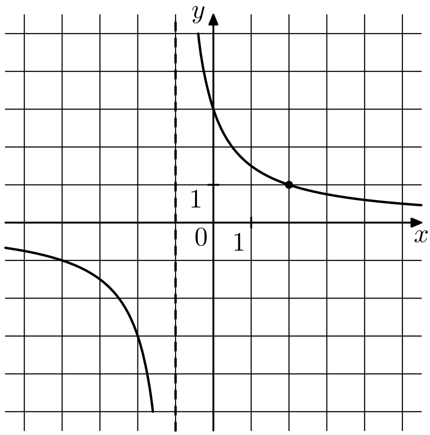
25.8. На рисунке изображён график функции $f\,(x) = kx + b$. Найдите $f\,(-5)$.



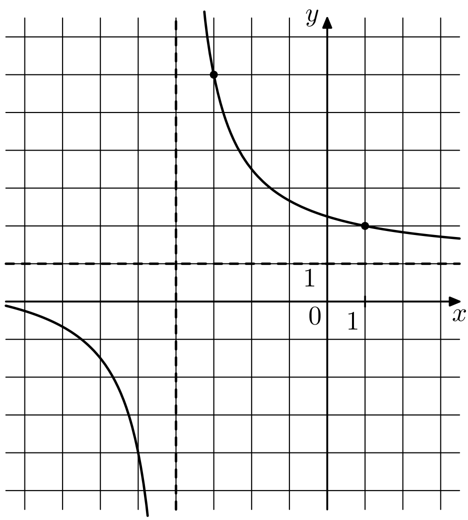
25.9. На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



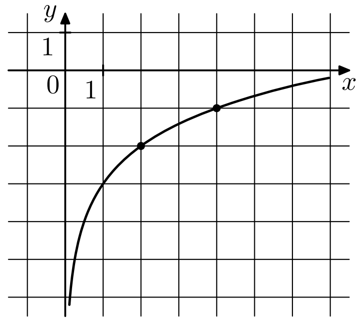
25.10. На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите $f(19)$.



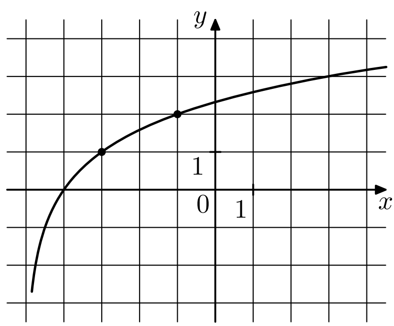
25.11. На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите k.



25.12. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 1$.



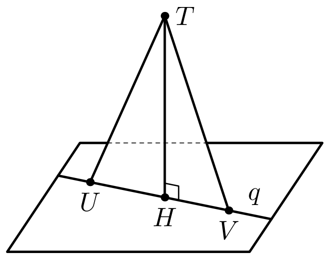
25.13. На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(11)$.



Урок №26. Стереометрия. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости.

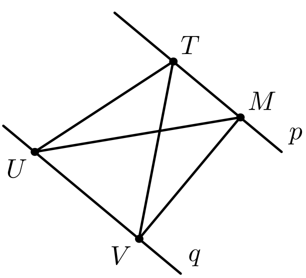
Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой, не содержащей это точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведённого из этой точки на прямую.
Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

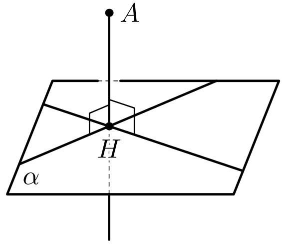


План вычисления $\rho(T, q)$
1) На прямой q выбрать точки U и V
2) Вычислить стороны треугольника TUV
3) Найти высоту TH треугольника TUV
TH — искомое расстояние

Частный случай — ищем расстояние до прямой q от произвольной точки M, лежащей на прямой p, которая проходит через точку T и параллельна прямой q. Треугольник MUV при этом «более удобный» (прямоугольный, равносторонний, равнобедренный), чем треугольник TUV.



Расстояние от точки до плоскости

	$\rho(A,\alpha)=AH$

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.
Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию между точкой одной из плоскостей и другой плоскостью.

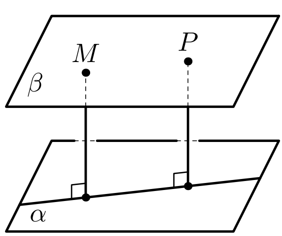
Способы нахождения расстояния от точки M до плоскости α

1. Метод объёмов.

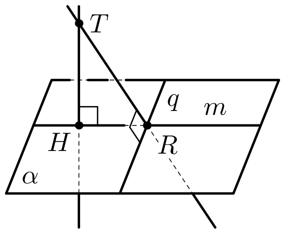
$$\rho(M,\alpha)=\rho(M,ABC)=\frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}},$$

   где $\triangle ABC\subset\alpha$, V_{ABCM} — объём пирамиды $ABCM$.
   Способ удобен, когда объём пирамиды вычисляется легко. Например, какие-то три вершины пирамиды лежат в горизонтальной или вертикальной плоскости.

   Частный случай — перенос точки по параллельной плоскости:

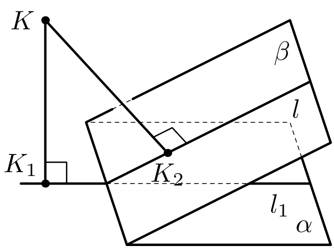
	$\rho(M,\alpha)=\rho(P,\alpha)$, где $P\in\beta$, $M\in\beta$, $\beta\parallel\alpha$

2. Используем теорему о трёх перпендикулярах.

	План вычисления $\rho(T, \alpha)$ 1) $q : q \subset \alpha$ 2) $TR : TR \perp q$, где $R \in q$ 3) $m : m \subset \alpha$, $R \in m$, $m \perp q$ 4) $\rho(T, \alpha) = TH$, где $TH = \rho(T, m)$ TH — искомое расстояние

Задача свелась к поиску расстояния от точки до прямой.
Способ удобен, когда прямая q горизонтальная или вертикальная.

Частный случай: «метод заборчика»

	α — горизонтальная проекция β l_1 — горизонтальная проекция l K_1 — проекция K на α $K_1 \in l_1$ $\rho(K, \beta) = \rho(K, l) = KK_2$

Обсуждение темы

Способы нахождения высоты треугольника с заданными сторонами: через площадь, через теорему Пифагора, через угол.

Задания

26.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.

26.2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.

26.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFA_1.

26.4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SCE.

26.5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. На ребре AA_1 отмечена точка M так, что $A_1M : AM = 1 : 3$. Через точки M и B_1 параллельно AD_1 проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину F_1.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $AB = 2, AA_1 = 4$.

26.6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, а точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

26.7. В конусе с вершиной в точке P высота $PO = \sqrt{7}$. В его основании проведена хорда AB, отстоящая от точки O на расстоянии, равном 3. Известно, что радиус основания конуса равен 5.

а) Докажите, что расстояние от точки P до прямой AB вдвое меньше длины отрезка AB.

б) Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $POAB$.

Домашнее задание

26.8. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.

26.9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.

26.10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

26.11. В основании четырёхугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$, описанная около окружности и такая, что $KN = LM = 4$, $MN > KL$ и угол между прямыми KN и LM равен $60°$. Две противоположные грани этой пирамиды перпердикулярны основанию и $SM = 12$.

а) Найдите объём пирамиды $SKLMN$.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SKL.

Урок №27. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a,\ \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}\ \ (|a| \leqslant 1)$

Обычно удобнее пользоваться формулами:

$$\sin x = a, \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\cos x = a,\ \ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\ \ (|a| \leqslant 1)$

$\operatorname{tg} x = a,\ \ x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}\ \ (a \in \mathbb{R})$

$\operatorname{ctg} x = a,\ \ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}\ \ (a \in \mathbb{R})$

Частные случаи:

$\sin x = 0,\ \ x = \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 1,\ \ x = \pi/2 + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1,\ \ x = -\pi/2 + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0,\ \ x = \pi/2 + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

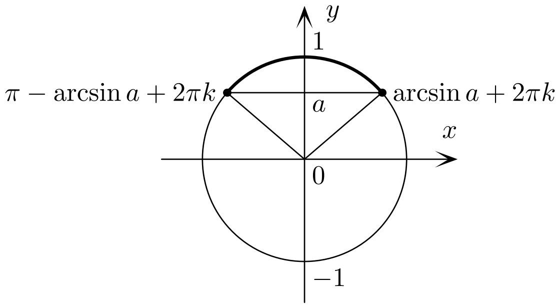
$\cos x = 1,\ \ x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1,\ \ x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

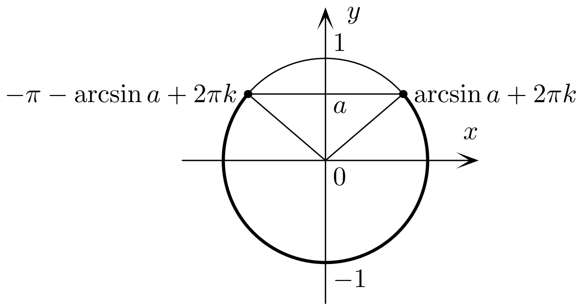
Простейшие тригонометрические неравенства

Для всех следующих утверждений принимаем $k \in \mathbb{Z}$.

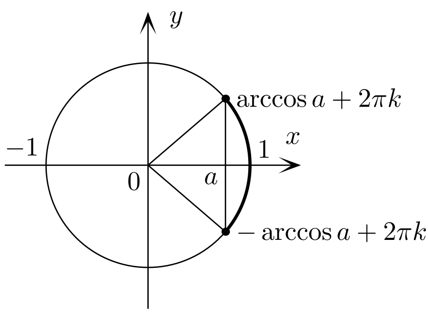
Утверждение 1. Множество решений неравенства $\sin x > a$
1) $\mathbb{R}$, если $a < -1$;
2) $(\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k)$, если $-1 \leqslant a < 1$;
3) пустое множество, если $a \geqslant 1$.



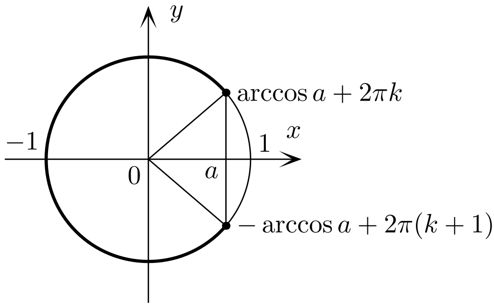
Утверждение 2. Множество решений неравенства $\sin x < a$
1) $\mathbb{R}$, если $a > 1$;
2) $(-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k)$, если $-1 < a \leqslant 1$;
3) пустое множество, если $a \leqslant -1$.



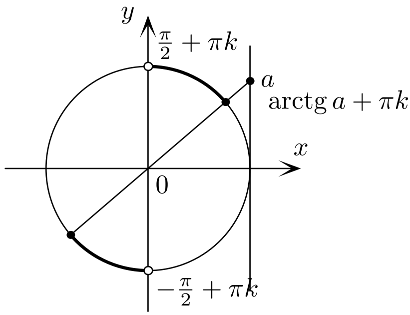
Утверждение 3. Множество решений неравенства $\cos x > a$
1) $\mathbb{R}$, если $a < -1$;
2) $(2\pi k - \arccos a; 2\pi k + \arccos a)$, если $-1 \leqslant a < 1$;
3) пустое множество, если $a \geqslant 1$.



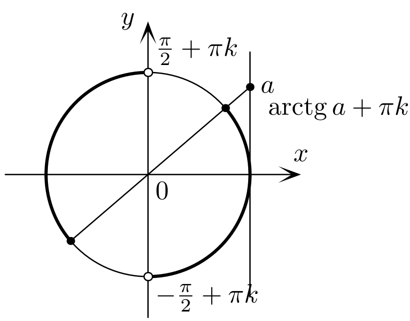
Утверждение 4. Множество решений неравенства $\cos x < a$
1) $\mathbb{R}$, если $a > 1$;
2) $(2\pi k + \arccos a; 2\pi(k+1) - \arccos a)$, если $-1 < a \leqslant 1$;
3) пустое множество, если $a \leqslant -1$.



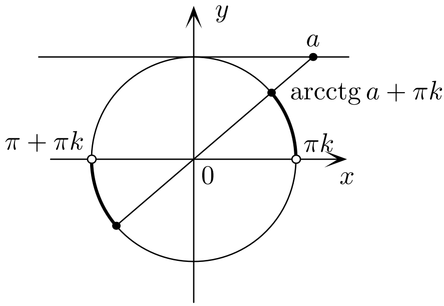
Утверждение 5. Множество решений неравенства $\operatorname{tg} x > a$
$(\operatorname{arctg} a + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k)$



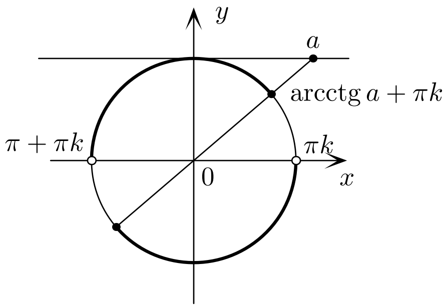
Утверждение 6. Множество решений неравенства $\operatorname{tg} x < a$
$(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k)$



Утверждение 7. Множество решений неравенства $\operatorname{ctg} x > a$
$(\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k)$



Утверждение 8. Множество решений неравенства $\operatorname{ctg} x < a$
$(\operatorname{arcctg} a + \pi k; \pi(k+1))$



Обсуждение темы

Устно прорешать все случаи простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Задания

27.1. Решите уравнение: $\cos \dfrac{\pi(2x-3)}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

27.2. Решите уравнение: $\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} = -1$.

В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

27.3. Решите уравнение: $\sin \dfrac{\pi x}{3} = 0{,}5$.

В ответе напишите наименьший положительный корень.

27.4. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30\,\text{м/с}$? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

27.5. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на неё проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 2\,\text{А}$ — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{Тл}$ — значение индукции магнитного поля, $l = 0{,}5\,\text{м}$ — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0{,}75\,\text{Н·м}$?

27.6. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 2\,\text{В}$, частота $\omega = 120^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = -30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже чем $1\,\text{В}$, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

27.7. Очень лёгкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2\cdot10^{-6}\,\text{Кл}$ скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5\,\text{м/с}$, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4\cdot10^{-3}\,\text{Тл}$. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_\text{л} = qvB\sin\alpha\,(\text{Н})$ и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_\text{л}$ была не менее чем $2 \cdot 10^{-8}\,\text{Н}$? Ответ дайте в градусах.

27.8. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \dfrac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20\,\text{м/с}$ — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой $4\,\text{м}$ на расстоянии $1\,\text{м}$?

27.9. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\,(\text{м})$, где $v_0 = 20\,\text{м/с}$ — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

27.10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 0{,}5\,\text{м}^2$ находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS\cos\alpha$, где α — острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4\cdot 10^{-4}\,\text{Тл/с}$ — постоянная, S — площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $10^{-4}\,\text{В}$?

27.11. Трактор тащит сани с силой $F = 80\,\text{кН}$, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50\,\text{м}$ вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2000 кДж?

27.12. Двигаясь со скоростью $v = 3\,\text{м/с}$, трактор тащит сани с силой $F = 50\,\text{кН}$, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком наибольшем угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 75 кВт (кВт — это $\dfrac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\text{с}}$).

27.13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400\,\text{нм}$ на дифракционную решётку с периодом $d\,\text{нм}$ наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d\sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

27.14. Два тела, массой $m = 2\,\text{кг}$ каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10\,\text{м/с}$ под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 50 джоулей.

27.15. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100\,\text{м}$ и со скоростью течения $u = 0{,}5\,\text{м/с}$ так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \dfrac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

27.16. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \dfrac{m}{m+M} v \cos\alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

27.17. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v = v_0 \sin \dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

27.18. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 5 \sin \pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

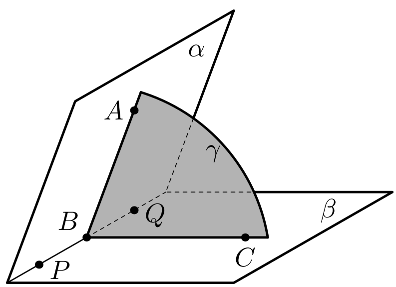
Урок №28. Стереометрия. Угол между плоскостями.

Угол между плоскостями

Двугранный угол, образованный полуплоскостями, измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Величина двугранного угла принадлежит промежутку $[0°, 180°)$.

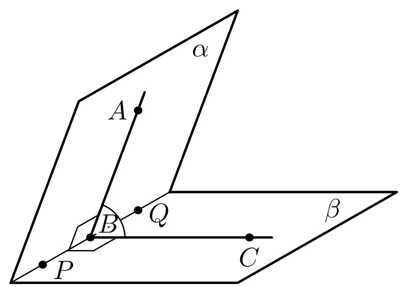
Величина угла между двумя пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0°, 90°]$.

Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным $0°$.



$\gamma \perp PQ$

$BA = \alpha \cap \gamma;\ BC = \beta \cap \gamma$



$BA \perp PQ;\ BA \subset \alpha$

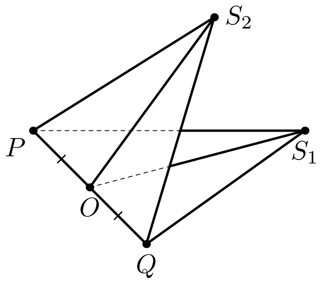
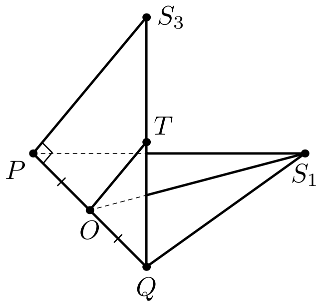
$BC \perp PQ;\ BC \subset \beta$

Способы нахождения угла между плоскостями

1. Ищем угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения.

   Частный случай 1. Если легко находится плоскость, перпендикулярная данным пересекающимся плоскостям, то ищем двугранный угол, образованный полуплоскостями, и учитываем, что угол между плоскостями всегда лежит в интервале $(0°, 90°]$.

Частный случай 2: «метод клювика». Общий отрезок плоскостей PQ — основания равнобедренных или прямоугольных треугольников в заданных плоскостях.

	$PS_1 = QS_1$ $PS_2 = QS_2$ Тогда $\angle(PQS_1, PQS_2) = \angle S_1OS_2$
	$PS_1 = QS_1$ $\triangle PS_3Q$ — прямоугольный T — середина QS_3 Тогда $\angle(PQS_1, PQS_3) = \angle TOS_1$

2. Используем формулу
$$\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{S'}{S},$$
где S — площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α, S' — площадь фигуры Φ', проекции фигуры Φ на плоскость β.

3. Ищем угол между нормалями (перпендикулярами) к плоскостям.

Обсуждение темы

Отдельно рассмотреть случай перпендикулярности плоскостей.

Задания

28.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.

28.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

28.3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

28.4. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом $60°$. Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD.

28.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между A_1BD и плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, DA.

28.6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

28.7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна 6, а боковое ребро — 5. На ребре SC отмечена точка M так, что $SM : MC = 7 : 18$.

а) Докажите, что плоскости SBC и ABM перпендикулярны.

б) Найдите объём меньшей части пирамиды $SABC$, на которые её разбивает плоскость ABM.

28.8. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ сторона основания равна 6, а боковое ребро — 5. На продолжении ребра PA отмечена точка M так, что $MA : MP = 9 : 16$.

а) Докажите, что плоскости PBC и MBC перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $MABC$.

28.9. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

28.10. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что прямая B_1C_1 перпендикулярна линии пересечения плоскостей ABC_1 и ACB_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC_1 и ACB_1, если известно, что $AB = 2, AA_1 = 2$.

28.11. В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ боковое ребро наклонено к основанию под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) Докажите, что плоскости APB и DPE перпендикулярны.

б) Найдите отношение радиуса сферы, касающейся всех граней пирамиды, к радиусу сферы, проходящей через все вершины пирамиды.

Домашнее задание

28.12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями SAD и SBD.

28.13. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

28.14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAD и BCF, где F — середина ребра AS.

28.15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABG и CDF, где F — середина ребра SB, G — середина ребра SC.

28.16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SBC и SEF.

Урок №29. Рациональные уравнения. Уравнения с модулем. Иррациональные уравнения.

Методы решения рациональных уравнений

1 Использование условия равенства степеней.

$(g(x))^{2n+1} = (p(x))^{2n+1} \Leftrightarrow g(x) = p(x), n \in \mathbb{N}$

$(g(x))^{2n} = (p(x))^{2n} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = p(x), \\ g(x) = -p(x), n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

29.1. Решите уравнение: $(x-3)^6 + (x^2 - 2x - 1)^3 = 0$.

2 Разложение на множители.

29.2. Решите уравнение: $x^4 - 2x^3 + x^2 - 9 = 0$.

29.3. Решите уравнение: $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$.

3 Замена переменной.

$\boxed{3.1}$ Возвратные уравнения и к ним сводящиеся.
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.
Уравнение называется возвратным, если в нём коэффициенты, равноудалённые от концов, совпадают, т.е. $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}, \dots$

3.1.1. Возвратные уравнения чётной степени.

29.4. Решите уравнение: $2x^4 + 9x^3 - x^2 + 9x + 2 = 0$.
Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$.
$2x^2 + 9x - 1 + \dfrac{9}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 0 \ \Rightarrow \ 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 9\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 1 = 0.$
Введём замену:

$$x + \frac{1}{x} = y \ \Rightarrow \ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

тем самым сведя исходное уравнение к квадратному.

3.1.2. Возвратные уравнения нечётной степени.

Любое возвратное уравнение нечётной степени сводится к уравнению чётной степени, т.к. у любого возвратного уравнения нечётной степени один из корней всегда равен -1.

29.5. Решите уравнение: $x^7+2x^6-5x^5-13x^4-13x^3-5x^2+2x+1=0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)(x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1)=0$
$x=-1$ или $x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1=0$.
Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^3 \neq 0$.
Введём замену: $x+\dfrac{1}{x}=y;\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2;\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y$.

$\boxed{3.2}$ Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, где $\dfrac{a}{e}=\dfrac{b^2}{d^2}$ решаются как возвратные.

$\boxed{3.3}$ Использование однородности.
Уравнение вида $a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0$ называется однородным уравнением второго порядка. Оно сводится к квадратному уравнению после деления обеих частей на $g^2(x)$ и введения новой переменной $t=f(x)/g(x)$. При делении на $g^2(x)$ может произойти потеря корней уравнения, поэтому обязательной является проверка тех значений x, при которых $g^2(x)=0$. Если эти значения являются корнями исходного уравнения, то их также следует включить в ответ. Другой способ решения однородного уравнения состоит в рассмотрении его как квадратного относительно одной из функций $f(x)$ или $g(x)$.

29.6. Решите уравнение: $5\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-44\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+12\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Введём замену: Пусть $\dfrac{x-2}{x+1}=U,\ \ \dfrac{x+2}{x-1}=V$, тогда $5U^2-44V^2+12UV=0$.
а) Если $V=0$, тогда $U=0$, решаем систему. Здесь она не имеет решения.
б) Разделим обе части уравнения на $V^2\neq 0$, получим $5\left(\dfrac{U}{V}\right)^2+12\left(\dfrac{U}{V}\right)-44=0$.

$\boxed{3.4}$ Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k$, где $a+b=c+d$ эффективно решать, группируя первую скобку со второй и третью с четвёртой: $(x-a)(x-b)$ и $(x-c)(x-d)$, а затем делать замену, например $t=(x-a)(x-b)$.

29.7. Решите уравнение: $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) = 105$.

$\boxed{3.5}$ В уравнениях вида $\dfrac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \dfrac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = k$
и в уравнениях, к ним сводящимся, в знаменателях обоих дробей необходимо вынести x за скобки и сделать замену, например $t = ax + c/x$.

$\boxed{3.6}$ В уравнениях вида $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c) = kx^2$
обе части уравнения делятся на $x^2 \neq 0$, а затем делается замена, например $t = ax + c/x$.

29.8. Решите уравнение: $(x^2+x+16)(x^2-20x+16)+54x^2 = 0$.

4 Применение свойств функций (монотонность, ограниченность, область определения).

29.9. Решите уравнение: $x^5+3x^3+8x-12 = 0$.

29.10. Решите уравнение: $(x^4-2x^2+2)^4+(x^2+2x+5)^2 = 17$.

5 Уравнения, содержащие более одной переменной.

Если уравнение квадратное относительно одной из переменных, то исследуем D уравнения: из условия его неотрицательности находятся допустимые значения второй переменной.

29.11. Решите уравнение: $5x^2-4xy+y^2-8x+2y+5 = 0$.

Методы решения уравнений с модулями

1 Уравнения вида $|f(x)| = A,\ A \in \mathbb{R}$ решаются следующим образом.
Если $A < 0$, то корней нет.
Если $A = 0$, то уравнению $|f(x)| = A$ соответствует уравнение $f(x) = 0$.
Если $A > 0$, то уравнению $|f(x)| = A$ соответствует равносильная совокупность

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = A, \\ f(x) = -A. \end{array}\right.$$

(2) Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ решаются следующим образом.
1 способ — раскрытие модуля по определению (обычно применяется в том случае, когда функция $f(x)$ проще, чем $g(x)$).
2 способ (обычно применяется в том случае, когда функция $g(x)$ проще, чем $f(x)$)

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

29.12. Решите уравнение: $|x^3 + x - 1| = x + 1$.

(3) Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$ решаются следующим образом.
1 способ. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

29.13. Решите уравнение: $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$.

2 способ.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right.$$

29.14. Решите уравнение: $|x^2 - 10| = |x^2 - 22|$.

(4) $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0$.

$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$.

(5) Использование замены $|f(x)|^2 = f^2(x)$.

29.15. Решите уравнение: $(x - 1)^2 - 3|x - 1| - 4 = 0$.

(6) Уравнение вида

$$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \ \Leftrightarrow f(x)g(x) \geqslant 0.$$

29.16. Решите уравнение: $|x^2 + x - 20| + |x^2 - 11x - 28| = 2|x^2 - 5x - 24|$.

(7) Уравнение вида

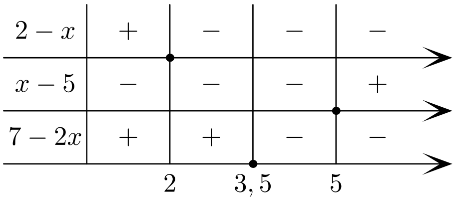
$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{array} \right.$$

29.17. Решите уравнение: $|x^2 - 9| + |x + 3| = x^2 + x - 6$.

(8) Метод промежутков (интервалов).

29.18. Решите уравнение: $|2-x|-|x-5|=x+1-|7-2x|$.

Определим промежутки знакопостоянства каждого из выражений под знаками модуля, для наглядности и удобства изобразив их на одной схеме (жирными точками отмечены нули соответствующих выражений). Рассмотрим 4 случая, «раскрывая» модули согласно знакам в каждом из столбцов.



$$\begin{cases} x \geqslant 5, \\ -2+x-x+5=x+1+7-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x=5. \end{cases} \Rightarrow \quad x=5. \qquad .$$

$$\begin{cases} 3{,}5 \leqslant x < 5, \\ -2+x+x-5=x+1+7-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3{,}5 \leqslant x < 5, \\ x=5. \end{cases} \Rightarrow \text{ Решений нет.}$$

$$\begin{cases} 2 \leqslant x < 3{,}5, \\ -2+x+x-5=x+1-7+2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leqslant x < 3{,}5, \\ x=-1. \end{cases} \Rightarrow \text{ Решений нет.}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ 2-x+x-5=x+1-7+2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x=1. \end{cases} \Rightarrow \quad x=1 \qquad .$$

Ответ: $x=1;5$.

Методы решения иррациональных уравнений

(1) Метод возведения в чётные степени (неравносильный переход, нужна проверка) и нечётные степени (равносильный переход).

29.19. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$.

29.20. Решите уравнение: $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$.

29.21. Решите уравнение: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=3$.

②

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^{2n}(x). \end{cases}$$

29.22. Решите уравнение: $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.

③

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \text{ — определена (имеет смысл)}, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

29.23. Решите уравнение: $(x^2 + 3x - 10)\sqrt{x + 4} = 0$.

29.24. Решите уравнение: $(x + 2)\sqrt{x - 1} = \sqrt{x - 1}$.

④ Замена переменной.

29.25. Решите уравнение: $3\sqrt[6]{2x^2 + 3x - 8} = 4\sqrt[3]{2x^2 + 3x - 8} - 1$.

29.26. Решите уравнение: $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2 - 1}$.
Пусть $U = \sqrt[3]{x + 1}$; $V = \sqrt[3]{x - 1}$, тогда: $U^2 + 2V^2 - 3UV = 0$.

⑤ Применение свойств функции.

29.27. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt{3x - 5} = 3$.

29.28. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^4 + 12x^2 - 11x - 2} = 0$.

Типичные ошибки при решении иррациональных уравнений

1) Неверное преобразование корня из произведения (частного) двух функций в произведение (частное) корней этих функций и обратное преобразование. В первом случае можно потерять решения, а во втором возможно приобретение посторонних решений.
2) Неправильное написание формулы $\sqrt[2n]{f^{2n}(x)} = |f(x)|$. Часто забывают про модуль.

Домашнее задание

29.29. Решите уравнение: $|||5x-1|-2|-3|=4$.

29.30. Решите уравнение: $|5x-3|+|3x-5|=9x-10$.

29.31. Решите уравнение:

$$4x^2(2x+1)^2-2x(4x^2-1)=30(2x-1)^2.$$

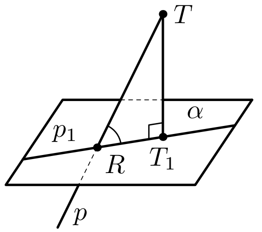
29.32. а) Решите уравнение: $x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}=3x-9\sqrt{x}+6$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt{5};4\sqrt{5}\right]$.

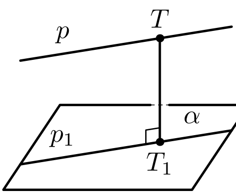
29.33. Решите уравнение: $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4$.

Урок №30. Стереометрия. Угол между прямой и плоскостью.

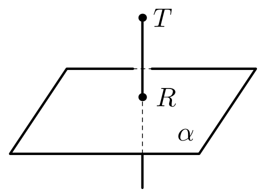
Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость: $0^\circ < \angle(a, \alpha) < 90^\circ$.



$\varphi = \angle(p, p_1) = \angle TRT_1$



$p \parallel \alpha \ \Rightarrow \varphi = 0^\circ$



$p \perp \alpha \ \Rightarrow \ \varphi = 90^\circ$

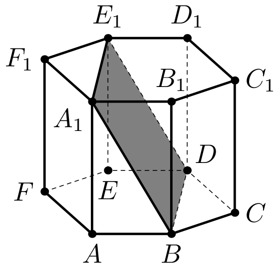
p_1 — проекция прямой p на плоскость α

Способы нахождения угла между прямой и плоскостью:

1. Путём параллельного переноса прямой и/или плоскости приводим задачу к случаю, когда прямая и плоскость пересекаются в точке. Затем опускаем перпендикуляр из второй точки прямой на плоскость. В получившемся прямоугольном треугольнике ищем угол между прямой и её проекцией на плоскость.

   Частный случай 1 — легко находится расстояние от второй точки прямой до плоскости.

   Частный случай 2 — если прямая лежит в плоскости, перпендикулярной данной плоскости, то искомый угол равен углу между прямой и линией пересечения плоскостей.



$\angle(BB_1, A_1E_1DB) = \angle(BB_1, A_1B)$

2. Ищем нормаль к плоскости. Тогда угол между прямой и плоскостью равен $\varphi = 90^\circ - \gamma$, где γ — угол между прямой и нормалью к плоскости.

Нормаль (перпендикуляр) к плоскости можно находить несколькими способами:
1) Нормаль задана или параллельна координатной оси.
2) Ищем вектор нормали через нахождение уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор нормали — $\vec{n}(A, B, C)$.
3) Ищем вектор нормали, используя его перпендикулярность двум пересекающимся прямым плоскости.

Обсуждение темы

Отдельно рассмотреть случай перпендикулярности прямой и плоскости.

Задания

30.1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, угол $C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{5}$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1.

30.2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите синус угла между BC_1 и плоскостью BCE_1.

30.3. В основании прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ лежит прямоугольный треугольник MNK, у которого угол N равен 90°, а угол M равен 60°, $NK = 18$. Диагональ боковой грани M_1N составляет угол 30° с плоскостью MM_1K_1. Найдите высоту призмы.

30.4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите синус угла между прямой SA и плоскостью SBC.

30.5. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 8$ и $BD = 6$. Боковое ребро $BB_1 = 12$. На ребре BB_1 отмечена точка M так, что $BM : B_1M = 1 : 7$.

а) Докажите, что прямая MD перпендикулярна плоскости ACD_1.

б) Найдите объём пирамиды $MACD_1$.

30.6. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}, SB = 3\sqrt{3}, SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Домашнее задание

30.7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1.

30.8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите синус угла между прямой AF и плоскостью SBC.

30.9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите синус угла между прямой AB и плоскостью SBC.

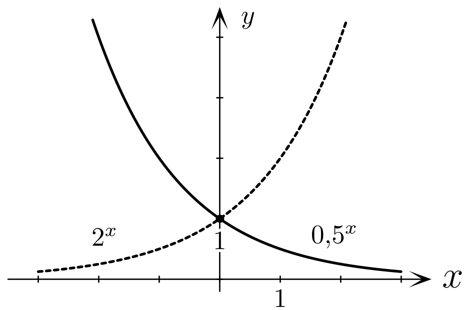
30.10. Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 6, а его высота равна $\sqrt{33}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причём MN параллельна образующей конуса SB.

а) Докажите, что ON — биссектриса угла AOB.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 4\sqrt{3}$.

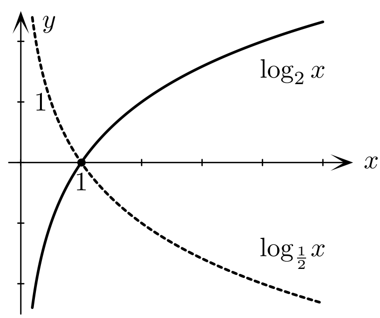
Урок №31. Показательная и логарифмическая функции. Свойства логарифмов.

Показательная функция



1. Область определения функции — вся числовая прямая.
2. Область значений функции — промежуток $(0; +\infty)$.
3. При $a > 1$ функция строго монотонно возрастает на всей числовой прямой, а при $0 < a < 1$ функция строго монотонно убывает на всей числовой прямой.

Логарифмическая функция



На промежутке $(0; +\infty)$ определена функция, обратная к показательной функции a^x $(a > 0, a \neq 1)$.
Эта функция называется **логарифмической**: $y = \log_a x$.
Логарифмическая функция непрерывна и строго возрастает (если основание $a > 1$) или строго убывает (если $0 < a < 1$) на всей области определения.
Множество ее значений — все действительные числа.

Свойства логарифмов

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \ (b > 0, a > 0, a \neq 1)$$

Для $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0, q \neq 0$:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

$$a^{\log_a x} = x \ \text{ — основное логарифмическое тождество}$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \ \text{ — логарифм произведения}$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right) \ \text{ — логарифм частного}$$

$$p \log_a x = \log_a (x^p) \ \text{ — логарифм степени}$$

$$\frac{1}{q} \log_a x = \log_{(a^q)}(x)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \ \text{ — формула перехода к новому основанию}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Логарифм по основанию e называется **натуральным** и обозначается $\ln x$. Логарифм по основанию 10 называется **десятичным** и обозначается $\lg x$.

Обсуждение темы

Построить графики функций. Показать графически и аналитически то, что данные функции взаимно обратны. Проанализировать изменение видов графиков при увеличении/уменьшении основания. Поработать с преобразованиями графиков. Вывести формулы логарифма от произведения, частного и степени из свойств степеней.

Задания

31.1. Найдите значение выражения $7^{2+\log_7 6}$.

31.2. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 2$.

31.3. Найдите значение выражения $\log_5 0{,}2 + \log_{0,5} 4$.

31.4. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$.

31.5. Найдите значение выражения $\log_5 9 \cdot \log_3 25$.

31.6. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

31.7. Найдите значение выражения $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12)$.

31.8. Найдите значение выражения $25^{\log_5 \sqrt{6}}$.

31.9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 18}{2 + \log_3 2}$.

31.10. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0{,}2$.

31.11. Найдите значение выражения $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25$.

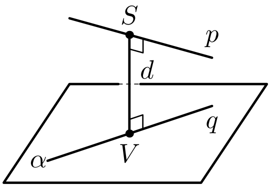
31.12. Найдите значение выражения $\dfrac{g(x-9)}{g(x-11)}$, если $g(x) = 8^x$.

31.13. Найдите значение выражения $7^{2x-1} : 49^x : x$ при $x = \dfrac{1}{14}$.

31.14. Найдите $\log_a \dfrac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$.

31.15. Вычислите значение выражения $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$.

Урок №32. Стереометрия. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

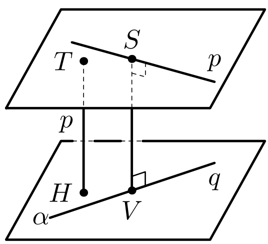


Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
$\rho(p, q) = SV$

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.

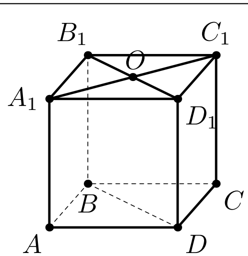
Способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми:

1.



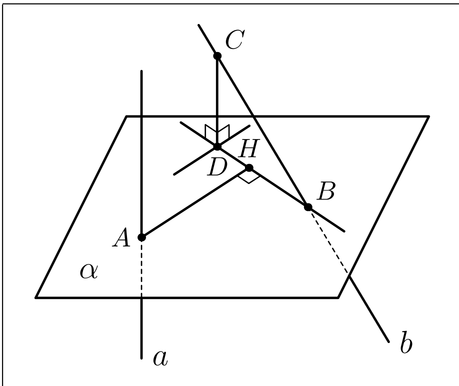
Ищем расстояние между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые
$SV = \rho(p, q) = TH$

2. Если первая прямая перпендикулярна плоскости, а вторая прямая лежит в этой плоскости, то расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки пересечения первой прямой и плоскости до второй прямой.



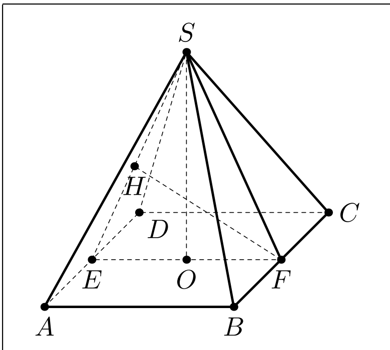
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$\rho(B_1D_1, C_1C) = C_1O$

3. Используем лемму: расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту плоскость.



$a \perp \alpha \quad a \cap \alpha = A$
DB — проекция b на α
$\rho(a, b) = \rho(A, DB) = AH$

4. Ищем расстояние от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую, параллельно первой прямой.



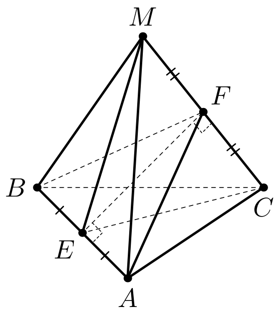
$ABCDS$ — правильная пирамида
$\rho(SA, BC) = \rho(F, SAD) = \rho(F, SE)$
$= FH$, где $AE = ED = BF = FC$
$FH \perp SE$

5. Вычисляем объём пирамиды, вершины которой — 2 точки первой и 2 точки второй прямой. Тогда

$$\rho(AB, CD) = \frac{6V_{ABCD}}{AB \cdot CD \cdot \sin\varphi},$$

где A и B — точки на одной прямой, C и D — точки на другой прямой, φ — угол между данными прямыми.

6. Ищем общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым.

	$MABC$ — правильный тетраэдр $EF = \rho(AB, MC)$

Задания

32.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.

32.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1 и $AM = 5$.

32.3. В правильном тетраэдре $SABC$, все рёбра которого равны 1, точки K, M и N — середины рёбер AB, BC и SB соответственно. Найдите расстояние между прямыми KM и AN.

32.4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EF_1.

32.5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. O — точка пересечения A_1D и AD_1.

а) Докажите, что плоскости OB_1C_1 и CEE_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и CE_1, если известно, что $AB = 1$, $AA_1 = 3$.

32.6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны между собой. Точка K — середина рёбра CC_1.

а) Докажите, что прямые AB_1 и BK перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BK, если ребро призмы равно 6.

32.7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть l — линия пересечения плоскостей ACD_1 и BDC_1.

а) Докажите, что прямые DB_1 и l перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми DB_1 и l, если ребро куба равно 2.

Домашнее задание

32.8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

32.9. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.

32.10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1.

32.11. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 6, точки M и N — середины рёбер AB и CD.

а) Докажите, что угол между прямыми MN и BC равен $45°$.

б) Найдите расстояние между прямыми MN и AD.

32.12. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания в два раза меньше высоты призмы.

а) Докажите, что расстояние от точки O_1 — пересечения диагоналей основания $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1 в три раза меньше высоты призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми C_1O и AB, если сторона основания призмы равна 1, где O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$.

Урок №33. Показательные уравнения и неравенства.

Простейшие показательные уравнения

Самое простое показательное уравнение имеет вид:

$$a^x = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1 \qquad (1).$$

Утверждение 1. Уравнение (1) имеет единственное решение $x = \log_a b$ при $b > 0$ и не имеет решений при $b \leqslant 0$.

Примеры. Решить уравнения:
а) $2^x = -4$, б) $2^x = 4$, в) $2^x = 5$.
Решение. а) Множество решений данного уравнения пусто, так как левая часть уравнения положительна при любом $x \in \mathbb{R}$ (см. свойства показательной функции), а правая часть есть отрицательное число.
б) Используя утверждение 1, получим $x = \log_2 4$, то есть $x = 2$.
в) Аналогично предыдущему примеру получим $x = \log_2 5$.

Замечание. Из утверждения 1 следует, что показательное уравнение вида $a^{f(x)} = b$, где $a > 0, a \neq 1$ и $b > 0$ равносильно уравнению $f(x) = \log_a b$.

Утверждение 2. При $a > 0, a \neq 1$, уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны.

Простейшие показательные неравенства

При решении показательных неравенств используем следующие утверждения:

1 Если $a > 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$. Аналогично, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

2 Если $0 < a < 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$. Аналогично, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

3 Неравенство $[h(x)]^{f(x)} > [h(x)]^{g(x)}$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

(4) Если $b \leqslant 0$, неравенство $a^{f(x)} < b$ не имеет решений (следует из свойств показательной функции).

(5) Если $b \leqslant 0$, множеством решений неравенства $a^{f(x)} > b$ является $x \in D(f)$.

(6) Если $a > 1$, $b > 0$, неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно неравенству $f(x) > \log_a b$. Аналогично, $a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$.

(7) Если $0 < a < 1$, $b > 0$, неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно неравенству $f(x) < \log_a b$. Аналогично, $a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$.

Методы решения показательных уравнений

(1) Уравнение $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a > 0, b > 0, a \neq 1$ равносильно каждому из уравнений $a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}$, $f(x) = g(x)\log_a b$.

33.1. Решить уравнение: $3^{x+1} = 2^x$.

(2) Вынесение общего множителя. Метод применяется, когда показатели степеней различаются на константу.

33.2. Решить уравнение: $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$.

(3) Другие способы разложения на множители.

33.3. Решить уравнение: $8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0$.

(4) Замена переменной. Не забывать при этом про положительность показательной функции! Часто уравнение при этом сводится к квадратному. Метод применяется когда:

$\boxed{a}$ Переменные в показателях степеней противоположны.

33.4. Решить уравнение: $2^x + 2^{-x} = 12$.

$\boxed{b}$ Переменные в показателях степеней различаются в 2 раза.

33.5. Решить уравнение: $3 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$.

$\boxed{c}$ При решении однородного показательного уравнения.

33.6. Решить уравнение: $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$.

$\boxed{d}$ При решении уравнения вида $(a+\sqrt{b})^{f(x)} \pm (a-\sqrt{b})^{f(x)} = k$, где $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = 1$, используем замену $(a+\sqrt{b})^{f(x)} = y$.

33.7. Решить уравнение: $(2+\sqrt{3})^x - 2 = (2-\sqrt{3})^x$.

5 Применение свойств функции (монотонность, ограниченность, область определения).

33.8. Решить уравнение: $2^{x^2+1} + |x| = 2$.

33.9. Решить уравнение: $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$.

При решении уравнений, содержащих функции вида $f(x)^{g(x)}$, следует иметь в виду, что:
а) если $f(x) < 0$, то выражение $f(x)^{g(x)}$ не имеет смысла;
б) если $f(x) = 0$, то это выражение считается равным нулю при $g(x) > 0$ и не имеющим смысла при $g(x) \leqslant 0$;
в) при $f(x) > 0$ функция $f(x)^{g(x)}$ определяется формулой $f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)}$, где a — любое положительное число, не равное единице.

Задания

33.10. Решить неравенство:

$$\frac{2^{x+1}\sqrt{2^{x+1}-1}}{2^x-15} \leqslant \frac{\sqrt{2^{x+1}-1}}{2^x-8}.$$

33.11. Решить неравенство: $|2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leqslant 2$.

33.12. Решите неравенство: $25^x + 5^{x+1} + 5^{1-x} + 25^{-x} \leqslant 12$.

33.13. Решить неравенство:

$$2^{|x|} - 6 - \frac{9\cdot 2^{|x|} - 37}{12 + 4^{|x|} - 7\cdot 2^{|x|}} \leqslant \frac{1}{2^{|x|}-4}.$$

33.14. а) Решите уравнение: $2015^x + 2016\cdot 2015^{1-x} - 4031 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{2017} 2016; \log_{2016} 2017]$.

33.15. Решите неравенство: $3^{2x^2} + 3^{x^2+2x+5} \geqslant 10\cdot 3^{4x+6}$.

Домашнее задание

33.16. Решить уравнения:

а) $9^{x-24} = -3$.

б) $9^{x-24} = 0$.

в) $9^{x-24} = 729$.

г) $9^{x-24} = 25$.

д) $0{,}4^{x-24} = 25$.

е) $0{,}4^{x-24} = 0{,}16$.

ж) $81^{3-x} = \dfrac{1}{3}$.

з) $2^{x+3} = 0{,}4 \cdot 5^{x+3}$.

33.17. Решить неравенства:

а) $9^{x-24} < -3$.

б) $9^{x-24} \geqslant -3$.

в) $9^{x-24} \leqslant 0$.

г) $9^{x-24} > 0$.

д) $9^{x-24} < 729$.

е) $9^{x-24} < 25$.

ж) $0{,}4^{x-24} \geqslant 0{,}16$.

33.18. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) — давление в газе, V (м^3) — объём газа, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в 2 раза объёма газа приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

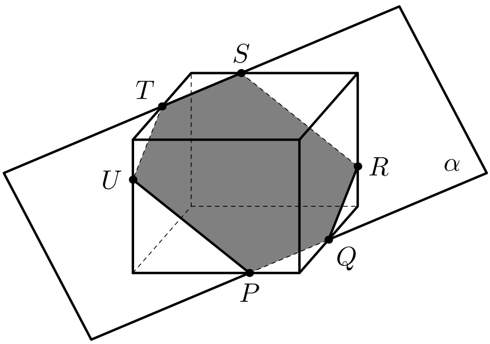
33.19. Решите неравенство: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 2 < \left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

Урок №34. Стереометрия. Построение сечений. Объём.

Секущая плоскость многогранника — любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.

Сечение многогранника — это многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника.

След сечения — прямая пересечения плоскости сечения и плоскости какой-либо грани многогранника.



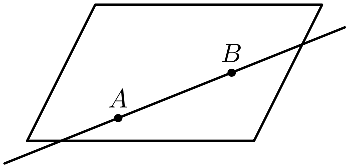
α — секущая плоскость.

Многоугольник $PQRSTU$ — сечение многогранника.

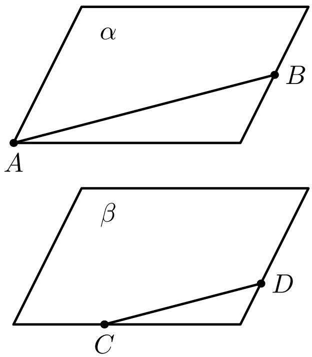
Прямые PQ, QR, RS, ST, TU, UP — следы сечения.

При построении сечений важно знать:

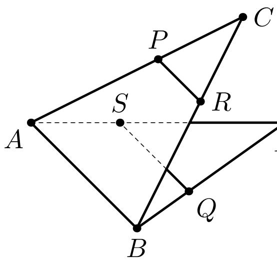
1. Если в плоскости какой-то грани есть две точки секущей плоскости, то через эти точки проводим прямую.



2. Если в одной из параллельных граней есть след сечения, а в другой есть точка сечения, то через эту точку проводим прямую, параллельную следу.



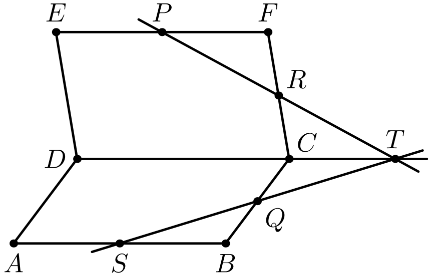
3. Если в одной из смежных граней есть след сечения, параллельный общему ребру, а в другой есть точка сечения, то след сечения, проведённый через эту точку, будет также параллелен общему ребру.



Пусть: $AB = ACB \cap ADB; PR \subset ABC; PR \parallel AB; Q \in ABD.$

Тогда: $SQ \parallel AB$ — искомый след.

4. Если в одной из смежных граней есть след сечения, непараллельный общему ребру, а в другой есть точка сечения, то находим точку пересечения следа и прямой, содержащей общее ребро граней, а затем соединяем эту точку с точкой сечения в другой грани.



Пусть: $DC = ADC \cap EDC; SQ \subset ADC; SQ \nparallel DC; P \in DEC$.

Тогда: $T = DC \cap SQ; R = TP \cap FC$; PR — искомый след.

Обсуждение темы

Рассмотреть случаи построения сечения: по трём точкам; по двум точкам, когда секущая плоскость параллельна заданной прямой; по одной точке, когда секущая плоскость перпендикулярна заданной прямой.

Задания

34.1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

34.2. Изобразите сечение единичного тетраэдра $ABCD$, проходящее через середины рёбер AD, BD и BC. Найдите его площадь.

34.3. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины рёбер AA_1, CC_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,25. Найдите его площадь.

34.4. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину B_1 и середины рёбер AD, CD. Найдите его площадь.

34.5. Изобразите сечение правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, проходящее через середины рёбер AD, BC и SD. Все рёбра пирамиды равны 1. Найдите его площадь.

34.6. Найдите объём тела вращения единичного тетраэдра $ABCD$ вокруг ребра AB.

34.7. Найдите объём треугольной пирамиды с рёбрами $6, 8, 10, 13, 13, 13$.

34.8. Все рёбра правильной шестиугольной призмы $A \ldots F_1$ равны $\sqrt{133}$.

а) Построить сечение призмы плоскостью AFC_1.

б) Найти площадь этого сечения.

34.9. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 9 и радиусом основания 2 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABMN$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

34.10. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 4.

а) Постройте сечение призмы, проходящее через середины рёбер BC, CC_1 и A_1C_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

34.11. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найти площадь сечения большего шара плоскостью α.

34.12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : C_1M = 1 : 3$. Плоскость AEM пересекает ребро BB_1 в точке K.

а) Докажите, что $BK : B_1K = 1 : 5$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью AEM, если $AB = 3$, $CC_1 = 8$.

34.13. Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.

а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.

б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC = 7$, $AD = 6$, а радиус цилиндра равен 2,5.

34.14. В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

34.15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 6. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла наклона между прямыми BL и SA равен $\dfrac{2}{5}$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

34.16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 6$, $AD = 12$, $AA_1 = 10$. Точка E принадлежит отрезку BD, причём $BE : ED = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки A, E и середину ребра BB_1.

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости сечения.

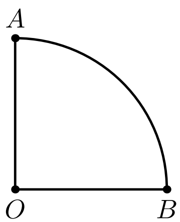
Домашнее задание

34.17. Изобразите сечение правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, проходящее через вершины B, C и середину ребра SA. Все рёбра пирамиды равны 1. Найдите его площадь.

34.18. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины рёбер AA_1, CC_1 и точку на ребре BB_1, отстоящую от вершины B на 0,25. Найдите его площадь.

34.19. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания равен 26. Площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, равна 100. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

34.20. Найдите площадь поверхности вращения четверти круга радиуса 2 вокруг прямой OA.



34.21. Найдите объём тела, полученного при вращении правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 вокруг прямой AD.

34.22. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 4$, $AA_1 = \sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 оснований взяты соответственно точки M и N так, что $BM : AB = B_1N : B_1C_1 = 1 : 4$. Через середину P бокового ребра BB_1 проведено сечение призмы, перпендикулярное прямой MN.

а) В каком отношении плоскость сечения делит ребро AA_1?

б) Найдите площадь сечения.

Урок №35. Логарифмические уравнения и неравенства. Часть 1.

Простейшие логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.
Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a x = b. \tag{1}$$

Утверждение 1. Если $a > 0, a \neq 1$, уравнение (1) при любом действительном b имеет единственное решение $x = a^b$.

Утверждение 2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$ равносильно одной из систем (очевидно, выбирается та система, неравенство которой решается проще)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно одной из систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Простейшие логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании называется логарифмическим неравенством.
В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

В случае логарифмических неравенств, которые не имеют вид неравенств, входящих в утверждения 1-3, определяется ОДЗ, и с помощью равносильных преобразований исходные неравенства сводятся к неравенствам, которые решаются с помощью утверждений 1-3.

Методы решения логарифмических уравнений

(1) Равносильные преобразования.

Пример:

$$\log_2(3x-6) = \log_2(2x-3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-6 = 2x-3, \\ 2x-3 > 0. \end{cases}$$

35.1. Решить уравнение: $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(\log_{625}(x^2+x-1))\right) = 1$.

(2) Метод введения новой переменной.

35.2. Решить уравнение: $\log_2 x^2 + \log_x 4 = 5$.

35.3. Решить уравнение: $3^{\frac{\log_3^2 x}{4}} = \frac{x^{\frac{\log_3 x}{3}}}{3}$.

Введём переменную $t = \log_3 x$, тогда $x = 3^t$.

(3) Метод логарифмирования.

35.4. Решить уравнение: $x^{\lg x} = 100x$.
Логарифмируем по основанию 10: $\lg^2 x = 2 + \lg x$.

(4) Разложение на множители.

35.5. Решить уравнение $\lg x - x + x\lg x - 1 = 0$.

(5) Использование свойств функций (монотонность, ограниченность, область определения).

35.6. Решить уравнение: $2x = 9 - 3\log_3 x$.

35.7. Решить уравнение: $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

35.8. Решить уравнение: $\log_3(x^2 - 6x + 12) = \cos 2\pi x$.

(6) Использование тождества $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Не забывать о возможной потере корней из-за сужения ОДЗ — например, при использовании некоторых формул перехода использовать модули.

$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$.

$\log_a(f(x)/g(x)) = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$.

$\log_a x^{2k} = 2k\log_a|x|,\ k\in\mathbb{N}$.

Потенцирование является допустимым преобразованием, а логарифмирование может привести к потере корней.

Задания

35.9. Решить уравнение: $\log_{17}(x^2 - 24) = \log_{6-x} 1$.

35.10. а) Решить уравнение: $\left(\log_3 \dfrac{3}{x}\right)\cdot\log_2 x - \log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + \log_2\sqrt{x}$.

б) Найти корни, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{1}{5}\right]$.

35.11. Решить неравенство: $\dfrac{\log_{9^x-6}(x+2)}{\log_{9^x-6} x^2} < 1$.

35.12. Решить неравенство: $\log_{\left(\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}\right)}(4x - x^2 - 2) \geqslant 0$.

35.13. Решить неравенство: $9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2} \leqslant 5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2}$.

35.14. Решить неравенство: $\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \geqslant 2$.

35.15. Решить неравенство: $\dfrac{\log_{0,2}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right) + \log_5(2-x)}{\log_5(2x-1) + \log_{0,2}\left(\dfrac{1}{3-2x}\right)} \geqslant 0$.

35.16. Решить неравенство: $\log_2(5-x)\log_2(x+1) \leqslant \log_2\dfrac{(x^2-4x-5)^2}{16}$.

Домашнее задание

35.17. Решить уравнения:

а) $\log_2(x+8)=5$.

б) $\log_5(7-x)=\log_5 3$.

в) $\log_{15}(3x-9)=\log_{15}(x-17)$.

г) $\log_2(4-4x)=4\log_2 3$.

д) $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+2$.

е) $\log_8 2^{8x-4}=4$.

ж) $\log_{x-5} 49=2$.

з) $3^{\log_9(5x-5)}=5$.

35.18. Решить неравенства:

а) $\log_2(x+8)<5$.

б) $\log_{0,5}(7-x)\geqslant\log_{0,5} 3$.

в) $\log_{15}(3x-9)\geqslant\log_{15}(x-17)$.

г) $\log_{x-5} 49\leqslant 2$.

35.19. а) Решить уравнение: $\log_2 x^2+\log_x 4=5$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{65}\right]$.

35.20. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C=2\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R=5\cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=0{,}7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 21 с. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

35.21. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п=20°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_в=60°C$. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m=0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_в-T_п}{T-T_п}$, где $c=4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha=0{,}7$ — постоянная.

Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

35.22. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 3$ моля воздуха объёмом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T\log_2\dfrac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 5{,}75\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{K}}$ — постоянная, а $T = 300$ K — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10 350 Дж.

Урок №36. Основы аналитической геометрии и векторной алгебры. Часть 1.

Координаты. Расстояние между точками

Система координат в пространстве — три взаимно перпендикулярные оси x, y и z.
Пусть точка M — середина отрезка AB. Её координаты находятся по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок M_1M_2 между $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле:

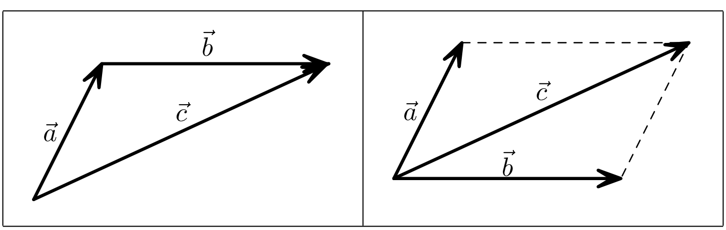
$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Векторы

Координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Сложение векторов по правилу треугольника и правилу параллелограмма:



Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение определяются так же, как и на плоскости. Только координат не две, а три. Возьмём векторы $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$.

Сумма векторов:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(x_a+x_b;y_a+y_b;z_a+z_b).$$

Разность векторов:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}(x_a-x_b;y_a-y_b;z_a-z_b).$$

Произведение вектора на число:

$$\lambda\vec{a}=\vec{p}(\lambda x_a;\lambda y_a;\lambda z_a).$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b.$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}.$$

Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *ортогональны*, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Косинус угла, образованный ненулевыми ортогональными векторами, равен 0, то есть сам угол есть $\pm 90°$.

Работа с определителями

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb$$

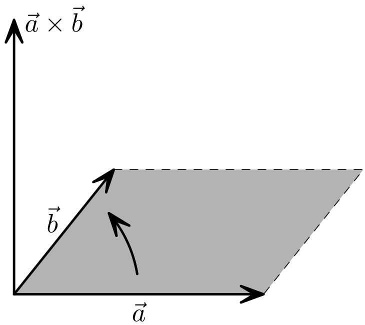
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение векторов

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad |\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\vec{b}\cdot\sin\angle(\vec{a},\vec{b});\ \vec{c}\perp\vec{a};\ \vec{c}\perp\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ по модулю равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и ориентирован по правилу буравчика (правого винта).



$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ — площадь треугольника ABC.

Смешанное произведение векторов

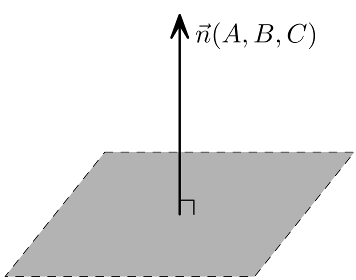
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$ — объём треугольной пирамиды $ABCD$.

Уравнение плоскости и вектор нормали

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B и C — координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости. Его называют *нормалью* к плоскости — $\vec{n}(A, B, C)$.



Найти уравнение плоскости можно двумя способами:

- Подставляем в уравнение плоскости координаты любых трёх точек. Получаем систему трёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными (A, B, C и D). Вместо одной из переменных подставляем любое число, отличное от нуля. Решая систему, находим остальные три неизвестные. (Может оказаться, что система не имеет решения, тогда надо поменять одну из точек, либо воспользоваться вторым способом)

- Уравнение плоскости ищем в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

  Далее, раскрывая определитель, приводим его к виду $Ax+By+Cz+D = 0$.

Угол между двумя прямыми

Для нахождения угла между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, параллельными данным прямым, используем формулу

$$\cos\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Угол между двумя плоскостями

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью равен $\varphi = 90^\circ - \gamma$, где γ — угол между прямой и нормалью к плоскости.

Обсуждение темы

Отдельно рассмотреть случаи перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей.

Задания

36.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, точки D, E — середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BE.

36.2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите синус угла между прямыми AL и BM, где M — середина ребра SC, L — середина ребра SB.

36.3. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина BD, точка M — середина BC. Найдите угол между прямыми AK и DM.

36.4. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

36.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти тангенс угла между A_1BD и плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, DA.

36.6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

36.7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите синус угла между BC_1 и плоскостью BCE_1.

Домашнее задание

36.8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

36.9. В правильной четырёхугольной пирамиде $DABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка M — середина ребра SB. Найдите угол между прямыми CM и SO, где O — центр основания пирамиды.

36.10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

36.11. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями SAD и SBD.

36.12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SBC и SEF.

36.13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите синус угла между прямой SA и плоскостью SBC.

Урок №37. Дробно-рациональные неравенства. Неравенства с модулями. Иррациональные неравенства.

Дробно-рациональные неравенства

Для решения неравенства $\dfrac{p(x)}{q(x)} \bigvee 0$ методом интервалов необходимо:

а) Разложить $p(x)$ и $q(x)$ на множители.

б) Отметить на числовой оси корни уравнений $p(x) = 0$ и $q(x) = 0$ в порядке возрастания. Эти числа разбивают числовую ось на интервалы, на каждом из которых выражение сохраняет знак, а, переходя через отмеченные точки меняет знак на противоположный (за исключением корня чётной кратности).

в) Расставить знаки на интервалах.

г) Выписать ответы неравенства в виде интервалов, учитывая, что корни знаменателя не входят в решение («выколотые» точки на оси), а корни числителя не войдут в решение в случае строгого неравенства.

Помним о знакопостоянстве квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом и о неотрицательности выражений в чётных степенях.

Перед применением метода интервалов при необходимости:

1. Выделяем целые части дробей.

   37.1. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2} + \dfrac{x^3-3x^2+2}{x-3} \leqslant x + x^2$.

2. Сокращаем дроби.

   37.2. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-4)} \leqslant 0$.

3. Выносим за скобки общие множители.

   37.3. Решите неравенство: $\dfrac{3(x+2)^2}{7-2x} \geqslant (x+2)^2$.

Неравенства с модулями

1 $$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{array} \right.$$

(2) $$|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x). \end{cases}$$

37.4. Решите неравенство: $|x^2 - 4x - 8| \leqslant x - 2$.

(3) $$|f(x)| > g(x) \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

(4) $$|f(x)| \geqslant g(x) \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array} \right.$$

37.5. Решите неравенство: $|x^3 - 4x + 8| \geqslant x^3 + 2x^2 - 8$.

(5) $$|f(x)| \geqslant |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geqslant g^2(x)$$
$$|f(x)| \leqslant |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leqslant g^2(x)$$

37.6. Решите неравенство: $||3 - 2x| - 1| \leqslant 2|x|$

(6) Некоторые частные случаи:

$|f(x)| > f(x) \ \Leftrightarrow \ f(x) < 0$ $\quad$ $|f(x)| \geqslant f(x)$: все x из ОДЗ — решения
$|f(x)| \leqslant f(x) \ \Leftrightarrow \ f(x) \geqslant 0$ $\quad$ $|f(x)| < f(x)$: решения нет.

37.7. Решите неравенство: $|5x - 7| \leqslant 5x - 7$.

(7) Неравенства, содержащие несколько модулей, обычно решаются методом промежутков (интервалов).

37.8. Решите неравенство: $|x + 2| - |x + 5| < 1 - x - 2|3x + 1|$.

Иррациональные неравенства

Некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad \sqrt[2n]{f(x)} \geqslant \sqrt[2n]{g(x)} \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

37.9. Решите неравенство: $\sqrt{2x^2 - x - 1} \geqslant \sqrt{5x^2 - 11x + 2}$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad \sqrt[2n]{f(x)} \leqslant g(x) \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g^{2n}(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

37.10. Решите неравенство: $\sqrt{6x^2 - x - 1} \leqslant x + 1$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \sqrt[2n]{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant g^{2n}(x), \\ g(x) > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

37.11. Решите неравенство: $\sqrt{5 - 2x} > 7 - 3x$.

37.12. Решите неравенство: $4\sqrt{x^2 + 2x - 8} \geqslant 5x - 4$.

$\sqrt[2n+1]{f(x)} \bigvee \sqrt[2n+1]{g(x)} \;\Leftrightarrow\; f(x) \bigvee g(x) \qquad \sqrt[2n+1]{f(x)} \bigvee g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \bigvee g^{2n+1}(x)$,
где символ $\bigvee$ заменяет один из знаков: $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

37.13. Решите неравенство: $\sqrt[3]{x - 1} \geqslant \sqrt[3]{x^2 + 5x + 3}$.

37.14. Решите неравенство: $\sqrt[3]{x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 1} \leqslant x - 1$.

Домашнее задание

Решите неравенство:

37.15. $\sqrt{2x + 63} < -x$

37.16. $\sqrt{2x^2 + 7} \geqslant x - 4$

37.17. $\sqrt[3]{x^2 + 8x - 8} \geqslant \sqrt[3]{2x - 1}$

37.18. $\sqrt[6]{x^2 - 2} > \sqrt[6]{x}$

37.19. $|2x - 3| \geqslant 5x - 2$

37.20. $|2x - 3| < 5x - 2$

37.21. $|5x - 7| \geqslant 7 - 5x$

37.22. $|x^2 - 3| \geqslant |x^2 - 5|$

37.23. Решите неравенство: $2 \leqslant |x - 1| < 3$.

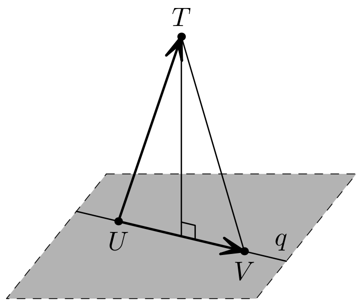
37.24. Решите неравенство: $\dfrac{5(x - 6\sqrt{x} + 8)}{x - 16} \leqslant \sqrt{x} - 2$.

37.25. Решите неравенство: $1 - \dfrac{2}{|x|} \leqslant \dfrac{23}{x^2}$.

37.26. Решите неравенство: $(x^2 - x - 6)\sqrt{8 - x} \leqslant 0$.

Урок №38. Основы аналитической геометрии и векторной алгебры. Часть 2.

Расстояние от точки до прямой



$$\rho(T,q)=\frac{|\overrightarrow{UT}\times\overrightarrow{UV}|}{|\overrightarrow{UV}|}$$

Нахождение расстояния от точки M до плоскости α

Находим уравнение плоскости. Тогда искомое расстояние равно:

$$\rho(M,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $M(x_0;y_0;z_0)$, а плоскость α задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

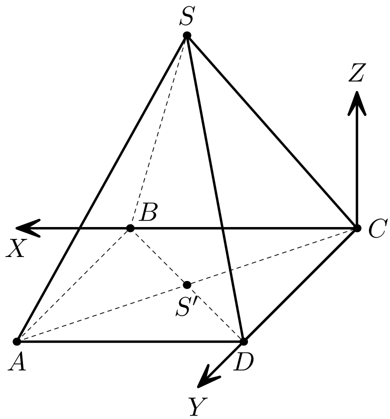
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Вычисляем объём пирамиды, вершины которой — 2 точки первой и 2 точки второй прямой. Тогда

$$\rho(AB,CD)=\frac{6V_{ABCD}}{AB\cdot CD\cdot\sin\varphi},$$

где A и B — точки на одной прямой, C и D — точки на другой прямой, φ — угол между данными прямыми.

Пример. Имеется правильная четырёхугольная пирамида $ABCDS$, в которой $AB = 4$, $BS = 6$, $K \in AS$, $AK = KS$, $M \in DS$, $MD = 1{,}5$.



Найти:

- угол между прямыми KM и CS;
- расстояние между прямыми KM и CS;
- расстояние от точки K до прямой MC;
- расстояние от точки K до плоскости SMC;
- угол между прямой KM и плоскостью SMC;
- угол между плоскостями KMC и SMC.

Решение:

- Найдём координаты точек K, M, C, S.
  $C(0;0;0)$ $S(2;2;2\sqrt{7})$, $K(3;3;\sqrt{7})$, $M(\frac{1}{2};\frac{7}{2};\frac{\sqrt{7}}{2})$.
- Вектор $\overrightarrow{KM}(-\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{7}}{2})$;
  Вектор $\overrightarrow{CS}(2;2;2\sqrt{7})$;
  Пусть α — угол между прямыми KM и CS.

$$\cos\alpha = \frac{\left|-\frac{5}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot 2\sqrt{7}\right|}{\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}\cdot\sqrt{4+4+28}} = \frac{\sqrt{33}}{9},$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{33}}{9}.$$

- Угол между плоскостями KMC и SMC равен углу между нормалями данных плоскостей $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$.

  Уравнение плоскости KMC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & \sqrt{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

  Раскрываем:

$$x\left(\frac{3\sqrt{7}}{2} - \frac{7\sqrt{7}}{2}\right) - y\left(\frac{3\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) + z\left(3\cdot\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

$$2\sqrt{7}x + \sqrt{7}y - 9z = 0.$$

  Тогда $\overrightarrow{n_1}(2\sqrt{7}; \sqrt{7}; -9)$.

  Уравнение плоскости SMC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2\sqrt{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

  Раскрываем:

$$x\left(\sqrt{7} - 7\sqrt{7}\right) - y\left(\sqrt{7} - \sqrt{7}\right) + z\left(7 - 1\right) = 0.$$

$$-\sqrt{7}x + z = 0.$$

  Тогда $\overrightarrow{n_2}(-\sqrt{7}; 0; 1)$.

  Пусть β — угол между векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$. Тогда

$$\cos\beta = \frac{\left|-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} + \sqrt{7}\cdot 0 - 9\cdot 1\right|}{\sqrt{28+7+81}\cdot\sqrt{7+0+1}} = \frac{23\sqrt{58}}{232},$$

$$\beta = \arccos\frac{23\sqrt{58}}{232}.$$

- Пусть γ — угол между прямой KM и плоскостью SMC.

$$\sin\gamma = \cos(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{KM}) = \frac{\left|-\frac{5}{2}\cdot(-\sqrt{7}) + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot 1\right|}{\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}\cdot\sqrt{7+0+1}} = \frac{\sqrt{462}}{33},$$

$$\gamma = \arcsin\frac{\sqrt{462}}{33}.$$

- Расстояние от точки K до плоскости: SMC

$$KQ = \rho(K, SMC) = \frac{\left|-\sqrt{7}\cdot 3 + 0\cdot 3 + 1\cdot\sqrt{7}\right|}{\sqrt{\sqrt{7}^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

- Расстояние от точки K до прямой MC:

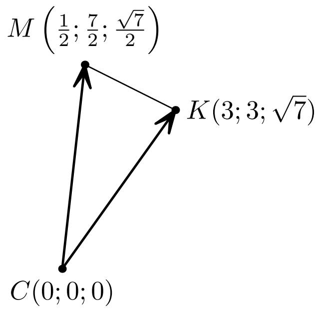
$$\rho(K, MC) = \frac{\left|\overrightarrow{CK}\times\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\overrightarrow{CM}\right|},$$

$$\overrightarrow{CK}\times\overrightarrow{CM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & \sqrt{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix} =$$
$$= \overrightarrow{i}\cdot\left(3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{7\sqrt{7}}{2}\right) - \overrightarrow{j}\cdot\left(3\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) + \overrightarrow{k}\cdot\left(\frac{3\cdot 7}{2} - \frac{3}{2}\right) =$$
$$= -2\sqrt{7}\,\overrightarrow{i} - \sqrt{7}\,\overrightarrow{j} + 9\,\overrightarrow{k},$$

$$\left|\overrightarrow{CK}\times\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{28+7+81} = 2\sqrt{29},$$

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}+\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{57}}{2},$$

$$\rho(K, MC) = \frac{2\sqrt{29}}{\frac{\sqrt{57}}{2}} = \frac{4\sqrt{1653}}{57}.$$



- Расстояние между прямыми KM и CS

$$\rho(KM, CS) = \frac{6V_{KMCS}}{|\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{CS}| \cdot \sin\alpha}.$$

$$V_{KMCS} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\sqrt{7} \\ 3 & 3 & \sqrt{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|2\cdot(-2\sqrt{7}) - 2\cdot\sqrt{7} + 2\sqrt{7}\cdot 9\right| = 2\sqrt{7}.$$

$$\rho(KM, CS) = \frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{33}}{2}\cdot 6\cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}} = 3\sqrt{\frac{7}{11}}.$$

Задания

38.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.

38.2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFA_1.

38.3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SCE.

38.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.

38.5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Найдите объём пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1 и $AM = 5$.

38.6. В правильном тетраэдре $SABC$, все рёбра которого равны 1, точки K, M и N — середины рёбер AB, BC и SB соответственно. Найдите расстояние между прямыми KM и AN.

Домашнее задание

38.7. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.

38.8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.

38.9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

38.10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

38.11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O_1 — центр квадрата $ABCD$, точка O_2 — центр квадрата CC_1DD_1.

а) Докажите, что прямые A_1O_1 и B_1O_2 — скрещивающиеся.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1O_1 и B_1O_2, если ребро куба равно 2.

Урок №39. Тригонометрические уравнения. Часть 1.

Методы решения тригонометрических уравнений

(1) Использовать разложение на множители.

39.1. Решите уравнение: $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.

39.2. Решите уравнение: $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$.

(2) Если аргументы функций одинаковые, попробовать получить одинаковые функции, используя формулы одного аргумента.

39.3. Решите уравнение: $2\cos^3 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0$.

(3) Если аргументы функций отличаются в два раза, попробовать получить одинаковые аргументы, используя формулы двойного аргумента.

39.4. Решите уравнение: $(\cos 2x - 1)^2 = 10\sin^2 x - 4$.

(4) Если аргументы функций отличаются в четыре раза, попробовать их привести к промежуточному двойному аргументу.

39.5. Решите уравнение: $\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2} = \cos 2x$.

(5) Если есть сумма одноимённых функций первой степени с разными аргументами, попробовать преобразовать сумму в произведение для появления общего множителя.

39.6. Решите уравнение: $\cos 3x = \sqrt{3}\sin 4x + \cos 5x$.

(6) Если есть сумма разноимённых функций первой степени с разными аргументами, попробовать использовать формулы приведения, чтобы получить случай 5.

39.7. Решите уравнение: $\cos 3x + \sin 2x = 0$.

(7) Уравнение вида $F(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$ решаем с помощью замены $t = \sin x \pm \cos x$.

39.8. Решите уравнение: $2\sin 2x - 5\cos x - 5\sin x + 5 = 0$.

(8) Однородные уравнения решаем введением переменной $t = \operatorname{tg} x$ после операции деления на $\cos^n x$, где n — порядок однородного уравнения.

Например, для однородного тригонометрического уравнения второй степени $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ выполняется почленное деление на $\cos^2 x$ после предварительного доказательства, что $\cos x \neq 0$.

Некоторые уравнения можно свести к однородным.

39.9. Решите уравнение: $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$.

Домножим правую часть на тригонометрическую единицу.

39.10. Решите уравнение: $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Перейдём к половинному углу, сведя задачу к предыдущему случаю.

39.11. Решите уравнение: $\sin^3 x + 13\cos^3 x - \cos x = 0$.
Домножим $\cos x$ на тригонометрическую единицу.

(9) Использовать условия равенства двух одноимённых тригонометрических функций:

$$\text{а)}\quad \sin\alpha = \sin\beta,\ \text{если}\ \left[\begin{array}{l}\alpha-\beta = 2\pi n,\\ \alpha+\beta = (2n+1)\pi\end{array}\right.,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\text{б)}\quad \cos\alpha = \cos\beta,\ \text{если}\ \left[\begin{array}{l}\alpha-\beta = 2\pi n,\\ \alpha+\beta = 2\pi n\end{array}\right.,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\text{в)}\quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,\ \text{если}\ \begin{cases}\alpha-\beta = \pi n,\\ \alpha\neq(2n+1)\pi/2\\ \beta\neq(2n+1)\pi/2\end{cases},\quad n\in\mathbb{Z}$$

В случае равенства разноимённых тригонометрических функций можно свести их к одноимённым.

$\sin(f(x)) = \cos(g(x)) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right)$

$\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{ctg}(g(x)) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right)$

39.12. Решите уравнение: $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$.

(10) Использовать универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

39.13. Решите уравнение: $\sin x + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$.

(11) Уравнения вида $a\cos x + b\sin x = c$

1) если $c = 0$, то уравнение однородное.
2) если $c \neq 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ (то есть хотя бы одно из чисел a или b не равно 0), то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:
$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \;\Rightarrow \sin(x+\varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
а) если $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, то корней нет.
б) если $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, тогда $x+\varphi = (-1)^k \arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k,\; k\in\mathbb{Z} \;\Rightarrow$
$x = -\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^k\arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k,\; k\in\mathbb{Z}.$

39.14. Решите уравнение: $3\sin x + 4\cos x = 5$.

39.15. Решите уравнение: $3\sin x - 4\cos x = 5\cos 15x$.

(12) Применение свойств функций (монотонность, ограниченность, область определения).

39.16. Решите уравнение: $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$.

39.17. Решите уравнение: $\sin\dfrac{5\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$.

Обсуждение темы

Объяснить отбор корней по числовой окружности.

Домашнее задание

39.18. а) Решите уравнение: $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \dfrac{10}{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

39.19. а) Решите уравнение: $\dfrac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg}x-3}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; \dfrac{-5\pi}{2}\right]$.

39.20. Решите уравнение: $\sqrt{1-4\cos x-\cos^2 x}=\sin x.$

39.21. а) Решите уравнение: $16^{\sin x-0,25}-3\cdot 4^{\sin x-0,5}+1=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

39.22. Решите уравнение: $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3.$

39.23. Решите уравнение: $\dfrac{2\sin^2 x-5\sin x-3}{\sqrt{x+\frac{\pi}{6}}}=0.$

39.24. Решите уравнение: $\dfrac{(2\cos x+1)(\log_{13}(3\operatorname{tg}^2 x))}{\log_{31}(2\sin x)}=0.$

39.25. а) Решите уравнение: $2\cos^3 x=\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $[-2\pi; -\pi]$.

Урок №40. Стереометрия. Задачи на разные темы.

Задания

40.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = AA_1 = 6$, $BC = 4$. Точка P — середина ребра AB, точка M лежит на ребре DD_1, так, что $DM : D_1D = 2 : 3$.

а) Докажите, что прямая BD_1 параллельна плоскости MPC.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью MPC.

40.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}, SC = 17$.

а) Докажите, что прямые AB и SC перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B и середину высоты пирамиды, проведённой из вершины S.

40.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны между собой. Через центр верхнего основания призмы и середины двух рёбер нижнего основания проведена плоскость β.

а) Найдите угол, который образует плоскость β с плоскостью ABC.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью β, если известно, что ребро призмы равно 6.

40.4. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 — прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

40.5. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ высота PO в полтора раза больше, чем сторона основания.

а) Докажите, что через точку O можно провести такой отрезок KM, с концами на сторонах AD и BC соответственно, что сечение PKM пирамиды будет равновелико основанию пирамиды.

б) Найдите отношение площади полной поверхности пирамиды $PABMK$ к площади полной поверхности пирамиды $PABCD$.

40.6. Через ребро BC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ под углом 60° к плоскости ABC проведена плоскость α. Известно, что площадь сечения призмы плоскостью α равна $14\sqrt{3}$, а высота призмы равна 3.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1B_1 в отношении $1:3$, считая от точки B_1.

б) Найдите объём меньшей части, отсекаемой от призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α.

40.7. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ точка K — середина AB, точка M — середина BC, точка N лежит на ребре AP, причём $AN : NP = 1:3$.

а) Докажите, что сечением пирамиды плоскостью, проходящей через точки N, K, M является равнобедренная трапеция.

б) Найдите угол между плоскостями NKM и ABC, если известно, что $AB = 6, AP = 8$.

40.8. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ к основанию ABC проведена высота PO. Точка K — середина CO.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки A, P и K делит ребро BC в отношении $1:4$.

б) Найдите объём большей части пирамиды $PABC$, на которые её делит плоскость APK, если известно, что $AB = 2\sqrt{3}, PC = 2\sqrt{5}$.

40.9. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Через точки B, D_1, F_1 проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α пересекает ребро CC_1 в такой точке M, что $MC : MC_1 = 1:2$.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые которые данную призму делит плоскость α.

40.10. Цилиндр и конус имеют общее основание. Вершина конуса является центром другого основания цилиндра. Каждая образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30°.

а) Докажите, что площади боковых поверхностей цилиндра и конуса равны.

б) Найдите радиус сферы, касающейся боковых поверхностей цилиндра и конуса, а так же одного из оснований цилиндра, если известно, что объём конуса равен $(6\sqrt{3} + 10) \cdot \pi$.

40.11. В правильной пирамиде $PABC$ точки E, F, K, M, N — середины рёбер AC, BC, PA, PB и PC соответственно.

а) Докажите, что объём пирамиды $NEFMK$ составляет четверть объёма пирамиды $PABC$.

б) Найдите радиус сферы, проходящей через точки E, F, K, M, N, если известно, что $AB = 8, AP = 6$.

40.12. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC, где $AB = BC = 5$, а $AC = 6$. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом, синус которого равен $\frac{3}{4}$.

а) Постройте сечение, проходящее через центр описанной окружности основания и перпендикулярное прямой BD.

б) Найдите расстояние от прямой BD до прямой AC.

40.13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5, AD = \sqrt{33}$, расстояние между прямыми D_1B_1 и AC равно $\sqrt{3}$. Плоскость α проходит через середину ребра DC перпендикулярно DB_1.

а) Доказать, что угол между плоскостью α и плоскостью ADD_1 равен углу между прямыми AB и DB_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями α и ADD_1.

40.14. Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причём прямая MN параллельна образующей конуса SB.

а) Докажите, что $\angle ANO$ — прямой.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$.

40.15. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $SA = 5$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 5 : 1$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α — прямоугольник.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Урок №41. Тригонометрические уравнения. Часть 2.

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Основные свойства:

а) Функция $y = \arcsin x$ определена и монотонно возрастает на отрезке $[-1; 1]$; $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

б) Функция $y = \arccos x$ определена и монотонно убывает на отрезке $[-1; 1]$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; $E(\arccos) = [0; \pi]$.

в) Функция $y = \operatorname{arctg}$ определена и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$; $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

г) Функция $y = \operatorname{arcctg}$ определена и монотонно убывает на $\mathbb{R}$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$; $E(\operatorname{arcctg}) = (0, \pi)$.

д) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Уравнения, левая и правая части которых являются одноимёнными обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

$$\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Уравнения, левая и правая части которых являются разноимёнными обратными тригонометрическими функциями

$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1.$

$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f(x)g(x) = 1.$

$\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \dfrac{1}{g^2(x) + 1}.$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x).$$

$$\arccos f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \;\Rightarrow\; f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}.$$

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \;\Rightarrow\; f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}.$$

Указание. Корнем каждого из первых четырёх уравнений может быть только такое число x_0, для которого $f(x_0) \geqslant 0$ и $g(x_0) \geqslant 0$. Иначе множество значений левой и правой частей не пересекаются.

41.1. Решить уравнение: $\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x)$.

Замена переменной

Помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

41.2. Решить уравнение: $\arcsin x \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^2}{18}$.

Задания

41.3. а) Решите уравнение: $\cos 2x - 2\sin 2x = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

41.4. а) Решите уравнение: $|\cos x| = -\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

41.5. Решите уравнение: $\sin\left(\dfrac{3\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \pi x\right)$.

41.6. Решите уравнение: $\sin\dfrac{x}{3} = \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 + x^2 - 25$.

41.7. Решите уравнение: $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.

41.8 (ОММО 2008 №8). Найдите сумму всех корней уравнения:

$$2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

41.9. Решите уравнение: $\dfrac{(2y+9\pi)(4y-9\pi)(13y-9\pi)}{\sqrt{\cos y}}=0.$

41.10. Решите уравнение: $\left(2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x\right)\cdot\log_3(\operatorname{tg} x)=0.$

41.11. а) Решите уравнение: $3\cdot 16^{\sin x\cos x}=2\cdot 9^{\sin 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

41.12. а) Решите уравнение: $\log_{-\cos x}(1-0{,}5\sin x)=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[14\pi;16\pi]$.

41.13. а) Решите уравнение: $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

41.14. а) Решите уравнение: $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)-1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

41.15. Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin 2x\cdot\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{4}.$

41.16. Дано уравнение $\sin 2x+\sqrt{3}(\cos x-\sin x)=1{,}5$.
а) Решите уравнение.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

41.17. а) Решите уравнение $\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot(1-\cos x)}=-\sin(-x)-5\cos x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right]$.

Урок №42. Логарифмические уравнения и неравенства. Часть 2.

Задания

42.1. Решите неравенство: $\dfrac{\log_4(2^x-1)}{x-1} \leqslant 1$.

42.2. Решите неравенство: $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-5}{|x-2|}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

42.3. Решите неравенство: $2 < \left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\right| \leqslant 3$.

42.4. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x} - \dfrac{1}{2^{1+\lg x}}\right) \geqslant -1 + \lg x$.

42.5. Решите неравенство: $\dfrac{\log_3\sqrt{28\cdot 3^x-3}}{x+1} \geqslant 1$.

42.6. Решите неравенство: $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\lg x-2} < 100$.

42.7. Решите неравенство: $\log_x(\log_9(3^x-9)) < 1$.

42.8. Решите неравенство: $\log_4(x+2)\cdot\log_x 2 \leqslant 1$.

Домашнее задание

42.9. Решите неравенство: $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\dfrac{x}{3}\right) > 0$.

42.10. Решите неравенство: $\log_{9x} 27 \leqslant \dfrac{1}{\log_3 x}$.

42.11. Решите неравенство: $\log_{2+x}\dfrac{1}{3} + \log_{2-x} 3 \leqslant 0$.

42.12. Решите неравенство: $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2) > -2$.

42.13. Решите неравенство: $\dfrac{\log_9 x - \log_{18} x}{\log_{18}(2-x) - \log_{36}(2-x)} \leqslant \log_{36} 9$.

42.14. Решите неравенство:

$$\log_{7-x}(2x+3)\cdot\log_{2x+3}(3x^2) \leqslant \log_{7-x}(3x+4)\cdot\log_{3x+4}(10x+25).$$

Урок №43. Уравнения: основные понятия, лишние корни, потеря корней, общие методы решения. Системы и совокупности уравнений.

Основные понятия

Определение. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают (т.е. если уравнения имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней).

Определение. Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является в тоже время корнем уравнения $p(x) = h(x)$, то уравнение $p(x) = h(x)$ называют **следствием уравнения** $f(x) = g(x)$. Например, уравнение $(x-2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Определение. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:
а) имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$;
б) нигде в этой области не обращается в 0,
то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень $2n$ получится уравнение $f^{2n}(x) = g^{2n}(x)$, равносильное данному.

Основные причины появления лишних корней

1. Произошло расширение области определения уравнения (например, при освобождении от знаков логарифмов).

2. Осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень.

3. Выполнялось умножение частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Основные причины потери корней

1. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в ОДЗ уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$).

2. Сужение ОДЗ в процессе решения уравнения (например, при неверном переходе от логарифма произведения к сумме логарифмов).

Общие методы решения уравнений

1 **Метод разложения на множители**
Уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ заменяется совокупностью уравнений
$f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$. Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

2 **Метод введения новой переменной**
Вводим новую переменную $u = g(x)$, решаем полученное уравнение $p(u) = 0$ относительно u. А затем решаем совокупность уравнений $g(x) = u_1$, $g(x) = u_2, \ldots, g(x) = u_n$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $p(u) = 0$.
Иногда удобно ввести две переменные.

3 **Замена уравнения** $h(f(x)) = h(g(x))$ **уравнением** $f(x) = g(x)$
Этот метод можно применять только в том случае, когда $y = h(x)$ — монотонная функция, которая каждое своё значение принимает по одному разу.
Например, $y = x^7$ — возрастающая функция, поэтому от уравнения $(2x+2)^7 = (5x-9)^7$ можно перейти к уравнению $2x + 2 = 5x - 9$.
Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.
Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

④ Применение свойств функций

а) Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ $(c = const)$ имеет не более одного решения.
Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.
б) Если $\min\limits_{x\in X} f(x) = c = \max\limits_{x\in X} g(x)$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$$

в) Учёт области определения функций иногда существенно упрощает решение уравнения.

Если в уравнении или неравенстве присутствуют корни чётных степеней, дроби, логарифмы, обратные тригонометрические функции $\arccos x$, $\arcsin x$ — то в решении нужно учитывать область допустимых значений.

Определение. Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x, y) = 0$ и уравнению $q(x, y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений**:

$$\begin{cases} p(x, y) = 0, \\ q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнения системы, называют решением системы уравнений. **Решить систему уравнений** — это значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Определение. Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных абсолютно корректны с точки зрения равносильности.

Среди систем нелинейных уравнений можно выделить системы симметрических уравнений. К ним относят системы вида

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

где $f(x, y) = f(y, x); g(x, y) = g(y, x)$ (такие многочлены называют симметрическими).

Многочлены $u = x+y$ и $v = xy$ — элементарные симметрические многочлены. Решение систем симметрических уравнений основано на том, что любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные. Например, $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$; $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = u^3 - 3uv$.

Обсуждение темы

Какие виды уравнений и систем уравнений могут встретиться в номере 13 ЕГЭ? Обсудить основные ошибки в решении и оформлении.

Задания

43.1. Решить уравнение: $2 - \sqrt[3]{x+6} = \sqrt{2-x} + \sqrt[6]{3x-6}$.

43.2. Решить уравнение: $\sqrt{x^5+3x^4+4x^3} + x^2 + 7x = 0$.

43.3. Решить уравнение: $\sqrt{-x^5+x^2+1} = x+1$.

43.4. Решить уравнение: $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{9-x^2} + 1 = \sqrt{x-2}$.

43.5. Решить уравнение: $4\arcsin(2x-1) + (x-1)^{\frac{7}{9}} = 2\pi$.

43.6. Решить уравнение: $3(6x^2-13x+6)^2 - 10(6x^2-13x) = 53$.

43.7. Решить уравнение: $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6$.

43.8. Решить уравнение: $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}} + 3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}} = 4$.

43.9. Решить уравнение: $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.

43.10. Решить уравнение:

$$\frac{1}{(x^2-2x)^2+1} + \frac{2}{(x-2)^2+2} + \frac{3}{(x^2-3x+2)^2+3} = 3.$$

43.11. Найдите корни уравнения $f(x) = 2$, если $x \neq 0$, $3f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 8x$.

43.12. Решите уравнение: $4^x + 5^x = 9^x$.

43.13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

43.14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

43.15. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{\operatorname{tg} y} + 2 = 3^{-\operatorname{tg} y}, \\ \sqrt{x-2} + 6\cos y = 0. \end{cases}$$

43.16. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 8\sin y + 1, \\ x + 1 = 2\sin y. \end{cases}$$

43.17. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos y}\sqrt{6x - x^2 - 8} = 0, \\ \sqrt{\sin x}\sqrt{2 - y - y^2} = 0. \end{cases}$$

43.18. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$$

43.19. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ |x - y| = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

43.20. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = y + 1, \\ \sin x = \sqrt{3y^2 + 2y}. \end{cases}$$

43.21. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 8\log_9(xy) = \log_9 x^8, \\ 5x + 2y + 22 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

43.22. Решить уравнение: $\log_3(x^2-12)+0{,}5\log_{\frac{1}{3}} x^2=0$.

43.23. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=-0{,}5. \end{cases}$$

43.24. Решите уравнение: $(2x^2-x-30)^2=x^4$.

43.25. а) Решите уравнение: $\log_7(2\cos^2 x+3\cos x-1)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

43.26. а) Решите уравнение: $1-4\cos^2(x-\dfrac{5\pi}{12})=\sqrt{3}\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

Урок №44. Неравенства: основные свойства и методы решений.

Основные свойства

Свойства числовых неравенств

$$\text{если } a > b,\ b > c, \text{ то } a > c$$

$$\text{если } a > b, \text{ то } a + c > b + c$$

$$\text{если } a > b,\ m > 0, \text{ то } am > bm$$

$$\text{если } a > b,\ m < 0, \text{ то } am < bm$$

$$\text{если } a > b, \text{ то } -a < -b$$

$$\text{если } a > b,\ c > d, \text{ то } a + c > b + d$$

$$\text{если } a > b \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}, \text{ то } a^n > b^n$$

$$\text{если } a > b > 0, \text{ то } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a^{2n} \geqslant b^{2n} \Leftrightarrow |a| \geqslant |b|$$

$$\text{если } a > b \text{ и } n \text{ — нечётное число, то } a^n > b^n$$

Определение. Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют **равносильными**, если их решения (т.е. множества частных решений) совпадают.

Определение. Если решение неравенства $f(x) > g(x)$ содержится в неравенстве $p(x) > h(x)$, то неравенство $p(x) > h(x)$ называют **следствием неравенства** $f(x) > g(x)$.

Теорема 1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечётную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень $2n$ получится неравенство того же смысла $f(x)^{2n} > g(x)^{2n}$, равносильное данному.

Теорема 5. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно:
а) неравенству $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;
б) неравенству $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теорема 6. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$, равносильно:
а) неравенству $f(x) > g(x)$ того же смысла, если $a > 1$;
б) неравенству $f(x) < g(x)$ противоположного смысла, если $0 < a < 1$.

Определение. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств.
Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют частным решением системы неравенств.
Множество всех частных решений системы неравенств — общее решение системы неравенств.
Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения.
Решение системы неравенств — пересечение решений неравенств, образующих систему.

Определение. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность** неравенств, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из заданных неравенств.
Каждое такое значение переменной называют частным решением совокупности неравенств.

Множество всех частных решений совокупности неравенств — решение совокупности неравенств.
Решение совокупности неравенств — объединение решений неравенств, образующих систему.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, а неравенства, образующие совокупность — квадратной скобкой (или в строчку через точку с запятой).

Основные методы решения неравенств

(1) Метод интервалов

Пусть $F(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x) \bigvee 0$.
а) Найдём ОДЗ функции $F(x):\quad D(F) = D(f_1)\cap D(f_2)\cap\ldots\cap D(f_k)$.
б) Найдём нули функции $F(x):\quad N(F) = N(f_1)\cup N(f_2)\cup\ldots\cup N(f_k)$.
в) На числовую прямую нанесём область определения и нули функции.
Нули функции разбивают ее область определения на промежутки знакопостоянства $F(x):\quad O(F) = D(F)\backslash N(F) = O_1\cup O_2\cup\ldots\cup O_m$.
г) Определим знак функции $F(x)$ на каждом промежутке $O_1, O_2, \ldots, O_m$, вычислив значение функции в какой-либо одной точке из каждого промежутка.
д) Выберем нужные интервалы в соответствии со знаком решаемого неравенства.

44.1. Решите неравенство: $\dfrac{(x+3)^2(|x-4|+5x-8)}{5x-3|x+2|+2} \leqslant 0.$

44.2. Решите неравенство: $\log_2^2 x - \dfrac{10}{x\log_x 2} + \dfrac{16}{x^2} \leqslant 0.$

(2) Метод введения одной или нескольких переменных

44.3. Решите неравенство: $\dfrac{4\lg(2x-1)-1}{\lg(2x-1)-1} \leqslant 1.$

44.4. Решите неравенство: $(4^x - 9\cdot 2^x)^2 + 4^{x+1} < 9\cdot 2^{x+2} + 140.$

(3) **Перебор случаев**. Например, когда ОДЗ состоит из нескольких интервалов, или при решении модульных неравенств.

44.5. Решите неравенство: $|x+2|-|x+5|<1-x-2|3x+1|$.

44.6. Решите неравенство: $-3\log_{x-1}\dfrac{1}{3}+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>2\left|\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\right|$.

(4) **Использование свойств функции** (ограниченность, монотонность, область определения).

44.7. Решите неравенство: $7x^7+5x^5+3x^3+x+16<0$.

44.8. Решите неравенство: $\sqrt[3]{x^3-19}>\log_2(7-2x)+2$.

44.9. Решите неравенство: $\dfrac{4}{x}<\sqrt{x+2}$.

44.10. Решите неравенство: $10^{4x-5}+\lg(4x-3)\leqslant 10^{2x+3}+\lg(2x+5)$.

44.11. Решите неравенство: $\sin^9 x+\cos^{11} x\geqslant 1$.

(5) **Метод рационализации** заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x)\bigvee 0$ равносильно неравенству $F(x)\bigvee 0$ в области определения выражения $F(x)$. f,g,h — выражения с переменной x $(h>0, h\neq 1)$ или числа.

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_h f-\log_h g\ \ (f>0,\ g>0)$	$(h-1)(f-g)$
2	h^f-h^g	$(h-1)(f-g)$
3	$f^h-g^h\ (f>0,\ g>0,\ h\in\mathbb{R})$	$(f-g)h$
4	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
5	$\sqrt{f}-\sqrt{g}\ (f\geqslant 0,\ g\geqslant 0)$	$f-g$

44.12. Решите неравенство:

$$(\sqrt{x}-2)(5^x-25)(|x|-1)(\log_x 3-2)(\log_x 3+1)(3^x-7^x)\leqslant 0.$$

44.13. Решите неравенство: $\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geqslant\log_{2x^2-5x+3}(3-x)$.

⑥ Метод расщепления неравенств

$$f(x)\cdot g(x)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\leqslant 0,\\ g(x)\leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)> 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\leqslant 0,\\ g(x)< 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$f(x)\cdot g(x)\leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\leqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\leqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)< 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\leqslant 0,\\ g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Если в неравенстве присутствуют корни чётной степени, дроби, логарифмы, обратные тригонометрические функции $\arcsin x$ и $\arccos x$, то необходимо учитывать ОДЗ.

В последнее время на ЕГЭ стали строже относиться к неверному использованию абитуриентами термина ОДЗ.

Необходимо включать в ОДЗ те и только те условия для переменной, при которых определены правая и левая части уравнения (неравенства), не больше и не меньше.

Например, если в ОДЗ к следующему неравенству:

$$\sqrt{\frac{5(\log_2(x+2)-1)}{\log_2(x+2)+1}}\leqslant \log_2\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}x+2>0,\\ \dfrac{x}{2}+1>0,\\ \log_2(x+2)+1\neq 0,\\ \dfrac{5(\log_2(x+2)-1)}{\log_2(x+2)+1}\geqslant 0.\end{cases}$$

забыть написать условие, что знаменатель не равен 0, то ОДЗ в итоге будет не полным, и проверяющие могут поставить за решение неравенства 0 баллов.

Если в ОДЗ включить условие неотрицательности правой части неравенства (а это уже не ОДЗ, а часть решения), то ОДЗ опять получится неверным.

Если Вы не уверены, что включили в ОДЗ все условия и не включили лишние, то лучше не используйте этот термин, а при решении просто учитывайте условия, при которых левая и правая часть уравнения (неравенства) определены (имеют смысл).

Задания

44.14. Решите неравенство: $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{\frac{4}{9}}\left(\dfrac{2}{3}\right)\geqslant 0$.

44.15. Решите неравенство: $x^2 2^{2x}+9(x+2)2^x+8x^2\leqslant(x+2)2^{2x}+9x^2 2^x+8x+16$.

44.16. Решите неравенство: $\dfrac{2^{\cos x}-1}{3\cdot 2^{\cos x}-1}\leqslant 2^{1+\cos x}-2$.

44.17. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt{\log_2(x^2-3)}-\sqrt{\log_2(x+9)}}{\log_2(x^2-6x+9)}\geqslant 0$.

44.18. Решите неравенство: $\log_5 x\leqslant\sqrt{1-x^4}$.

44.19. Решите неравенство: $\dfrac{(|2x+1|-x-2)(\log_{\frac{1}{2}}(x+4)+1)}{2^{x^2+1}-2^{|x|}}\geqslant 0$.

44.20. Решите неравенство: $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geqslant 2$.

44.21. Решите неравенство: $7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\geqslant 1$.

Домашнее задание

44.22. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\log_{\log_x 2x}(5x-2)\geqslant 0,\\ 15^x-9\cdot 5^x-3^x+9\leqslant 0.\end{cases}$$

44.23. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}x^2\log_{16}x\geqslant\log_{16}x^5+x\log_2 x,\\[2mm] 4^x+4^{-x}\geqslant\dfrac{10}{3}.\end{cases}$$

44.24. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}2^{x^2+|x|}\cdot 3^{-|x|}\leqslant 1,\\[2mm] |x-1|\leqslant\dfrac{9x^2}{2}+2{,}5x.\end{cases}$$

44.25. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\dfrac{2}{|x|}\leqslant\dfrac{23}{x^2},\\[2mm] \dfrac{2-(x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1}-1}\leqslant -0{,}5.\end{cases}$$

44.26. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x-12} + \dfrac{2x^2-6x+1}{x-3} \geqslant 2x, \\ \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \dfrac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leqslant -2. \end{cases}$$

44.27. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + \left(1-\sqrt{10}\right)x - \sqrt{10} \leqslant 0, \\ \dfrac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

44.28. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} |x+2| - x|x| \leqslant 0, \\ (x^2-x-6)\sqrt{8-x} \leqslant 0. \end{cases}$$

44.29. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leqslant \dfrac{(3x+1)^2}{4}, \\ \dfrac{x^3+37}{(x+4)^3} \geqslant 1 + \dfrac{1}{(x+4)^2}. \end{cases}$$

44.30. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+1) \cdot \log_{x+5}(4-x) \geqslant 0, \\ \left|\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}\right|^{x-1,2} + \left|\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}\right|^{1,2-x} \leqslant 2. \end{cases}$$

44.31. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+5}{4+x} - \dfrac{1}{x^2+9x+20}\right)\sqrt{-7x-x^2} \geqslant 0, \\ x\sqrt{8} - 7x + 14\sqrt{8} > 57. \end{cases}$$

44.32. Решите неравенство: $\dfrac{x^3-18x^2+89x-132}{(\sqrt{x}-2)(5^x-25)(|x|-1)} \leqslant 0.$

Урок №45. Дифференцирование и интегрирование. Часть 1.

Дифференцирование

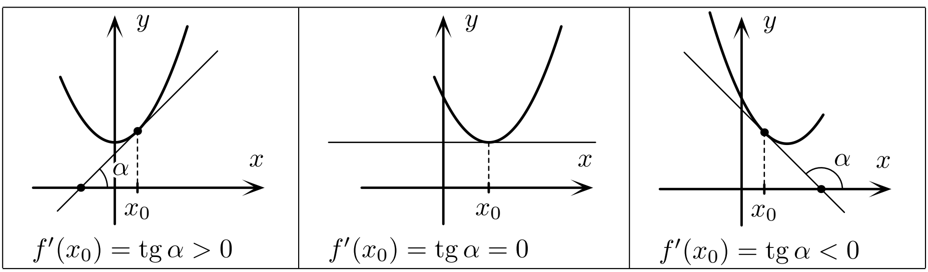
Определение производной функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Физический смысл производной: производная в точке x_0 равна мгновенной скорости изменения функции в этой точке. $f'(x_0) = V_{\text{мгн.}}(x_0)$.
$x'(t) = v(t); v'(t) = a(t)$.

Геометрический смысл производной: производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к положительному направлению оси OX.

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.



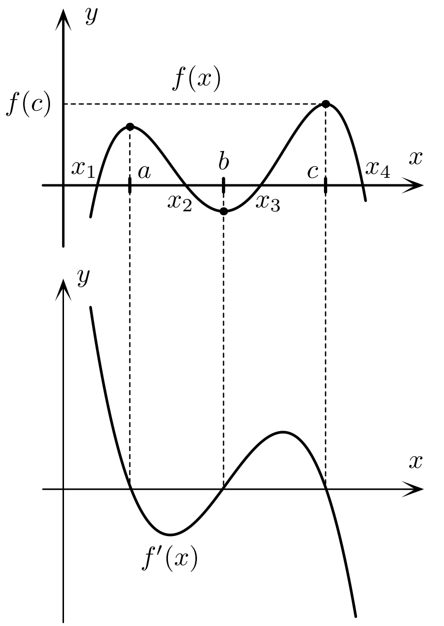
Для $f'(x_0) < 0$ удобнее найти тангенс смежного острого угла, а затем подставить перед ним минус.

Если $g(x) = kf(x) + b$, то $g'(x_0) = kf'(x_0)$.

Что можно увидеть по графику функции?

Область определения $D(f) : x \in (-\infty; \infty)$.
Множество значений $E(f) : y \in (-\infty; f(c))$.
Корни функции: x_1, x_2, x_3, x_4.
Точки экстремума: $x = a; x = b; x = c$,
они же — точки, в которых производная равна 0;

они же — точки, в которых касательная параллельна горизонтальной прямой (например оси OX или $y = 6$).
$x = a$ и $x = c$ — точки максимума; $x = b$ — точка минимума.
Различать точки экстремума (максимума, минимума) и экстремумы (максимумы, минимумы). Например $f(c)$ — максимум.
Различать сумму и количество точек экстремума.
Промежутки возрастания: $x \in (-\infty; a] \cup [b; c]$.
Промежутки убывания: $x \in [a; b] \cup [c; \infty)$.



Что можно увидеть по графику производной от функции?

Точки экстремума (максимума, минимума) функции могут находиться в точках, в которых производная равна нулю или не определена.

Промежутки возрастания/убывания функции — промежутки, на которых знак производной не меняется.

Точки, в которых касательная параллельна некоторой прямой с угловым коэффициентом k — это точки, в которых производная равна k.

Если требуется найти абсциссы точек касания, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна заданной прямой $y(x) = kx + b$, то из уравнения $f'(x_i) = k$ находим x_i.

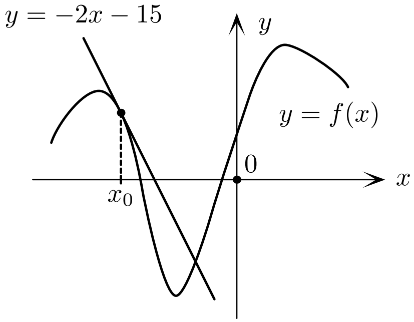
Если требуется найти абсциссу точки касания, в которой касательная к графику функции $f(x)$ совпадает с заданной прямой $y(x) = kx + b$, то из уравнений $f'(x_i) = k$ находим x_i. Искомое x_i должно удовлетворять равенству $f(x_i) = y(x_i)$.

Обсуждение темы

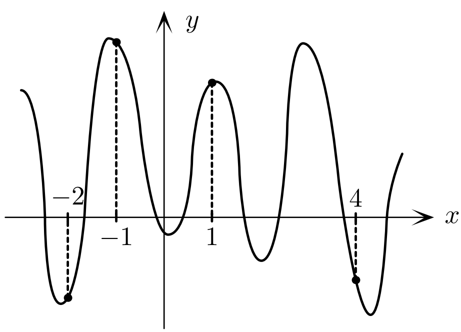
Вывести уравнение касательной из уравнения прямой, заданной угловым коэффициентом, и геометрического смысла производной.

Задания

45.1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = -\dfrac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0.

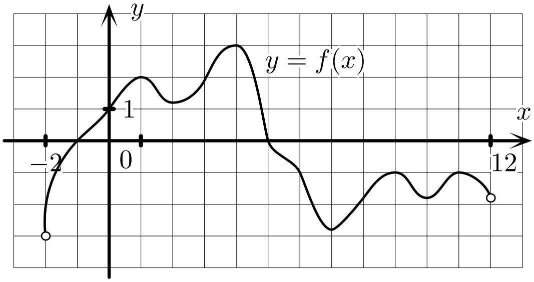


45.2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

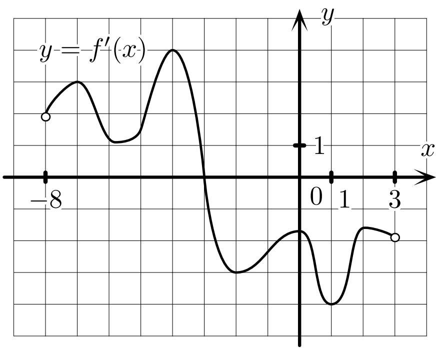


45.3. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

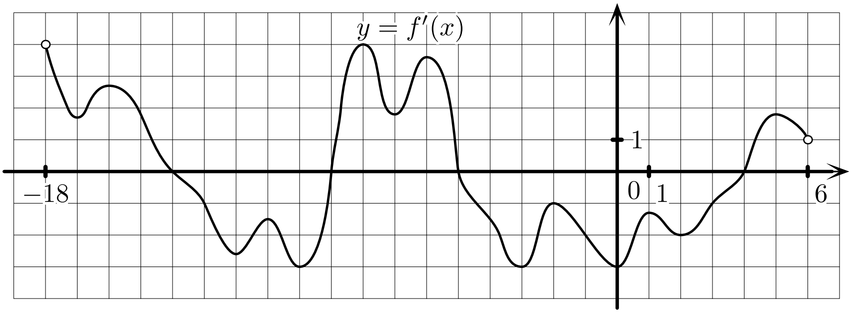
45.4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



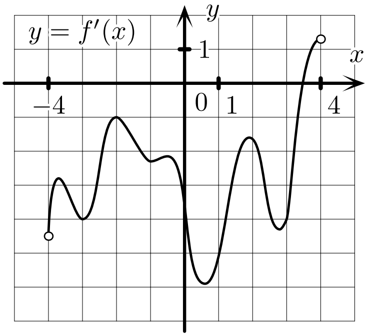
45.5. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



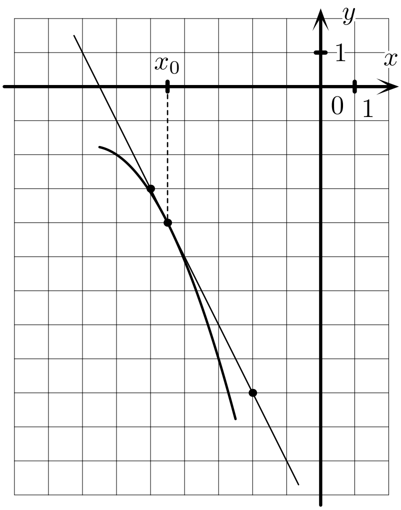
45.6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-13; 1]$.



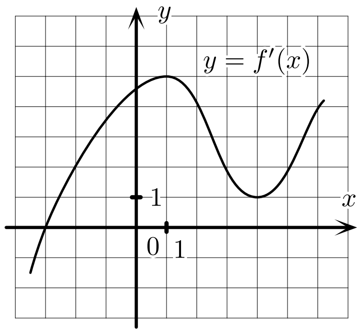
45.7. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-4; 4)$. На рисунке изображён график ее производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции $f(x)$, которые параллельны прямой $y = -2x + 4$ или совпадают с ней.



45.8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



45.9. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

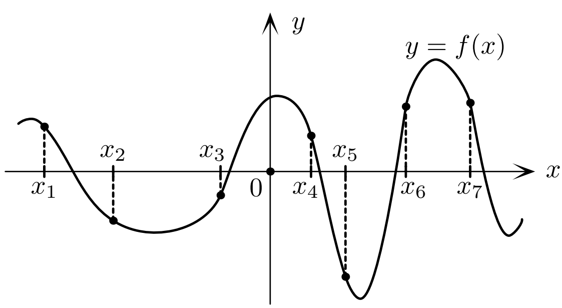


45.10. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 2 м/с?

45.11. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

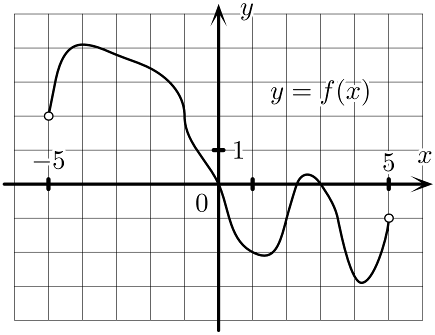
Домашнее задание

45.12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди отмеченных точек те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

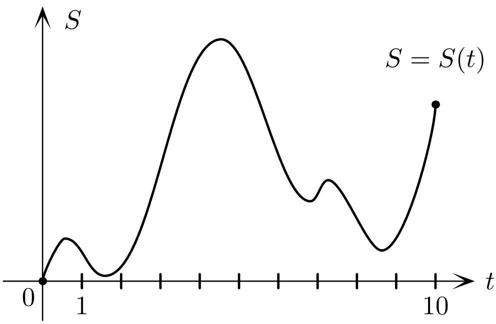


45.13. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

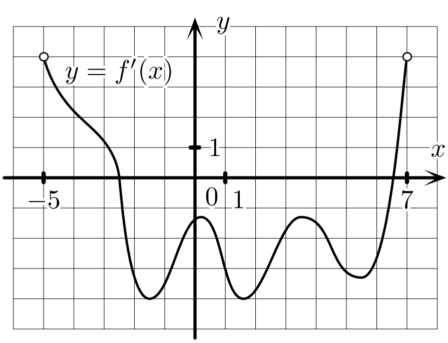
45.14. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



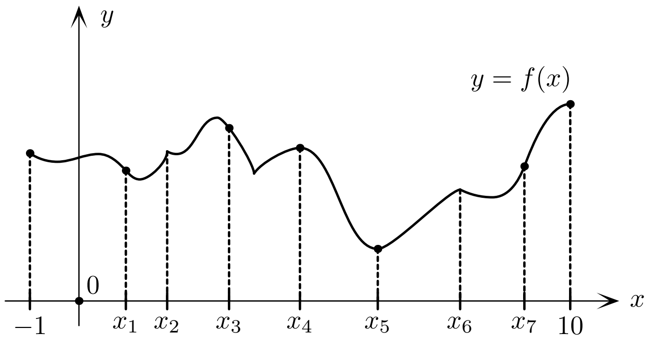
45.15. Материальная точка **M** начинает движение из точки **A** и движется по прямой на протяжении 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки **A** до точки **M** со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние S в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки **M** обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



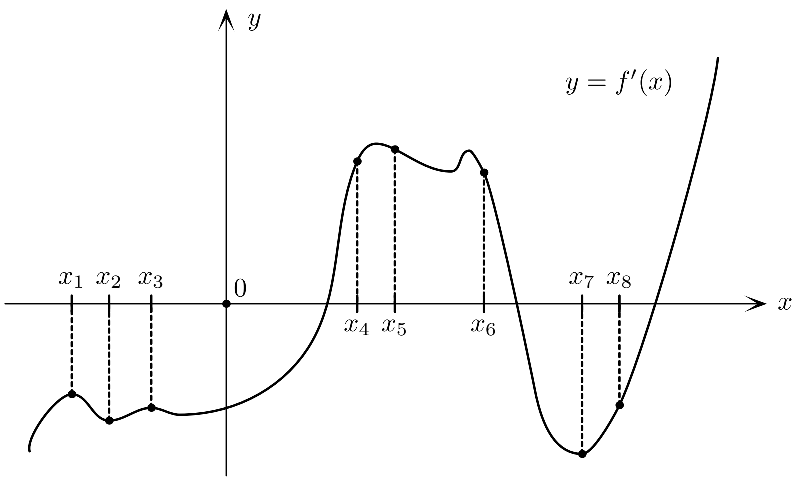
45.16. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



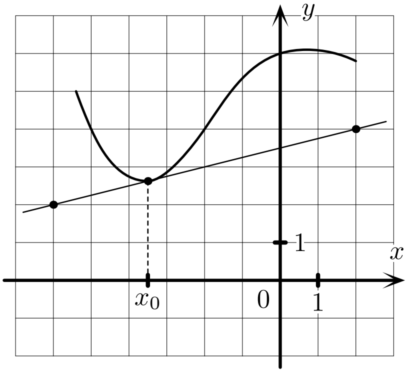
45.17. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-1; 10)$. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, $x_2, \ldots, x_7$ те точки, в которых производная функции $f(x)$ равна 0. В ответ запишите количество найденных точек.



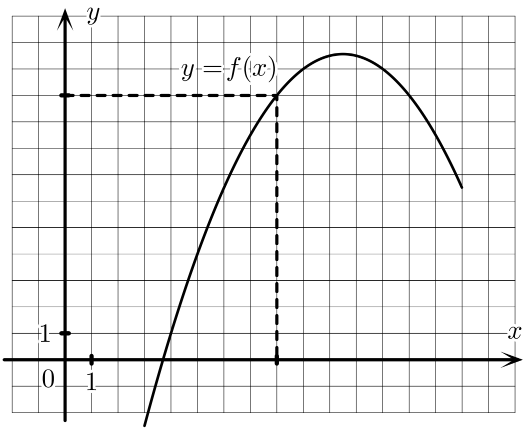
45.18. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



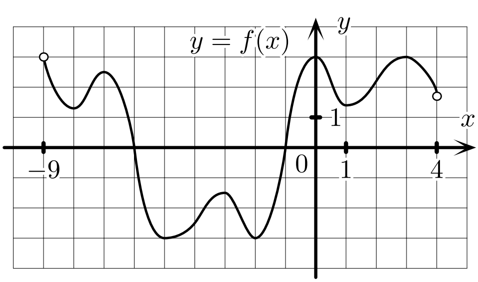
45.19. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



45.20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 8$.



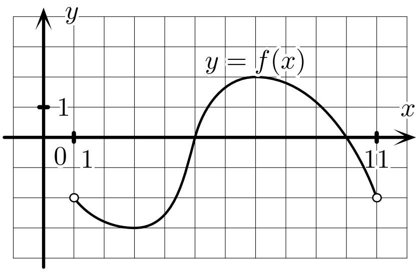
45.21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.



45.22. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

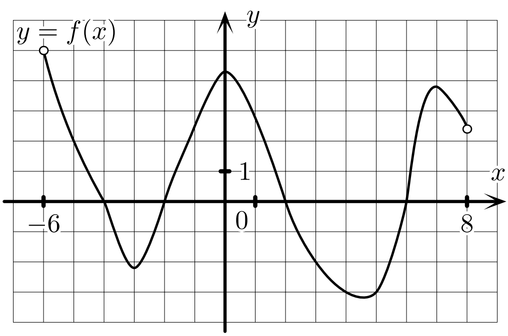
45.23. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

45.24. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(1; 11)$. По рисунку найдите корень уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащий интервалу $(5; 11)$.



45.25. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

45.26. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Урок №46. Дифференцирование и интегрирование. Часть 2.

Правила вычисления производных

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$
$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Таблица производных

const	x^α	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти стационарные и критические точки. Обычно внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называют стационарными, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная функции не существует, — критическими.
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4) Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.

3) Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b.
4) Выбрать среди этих значений наименьшее значение ($y_{\text{наим.}}$) и наибольшее значение ($y_{\text{наиб.}}$).

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:
а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{\text{наиб.}} = f(x_0)$;
б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{\text{наим.}} = f(x_0)$.

Интегрирование

Правило 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Правило 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Правило 3. Если $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(kx + m)dx = \frac{F(kx + m)}{k} + C.$$

Определённый интеграл

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций: $\displaystyle\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:
$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$$

Свойство 3. Если $a < c < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Таблица интегралов

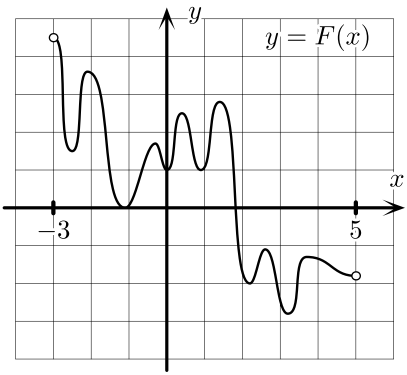
1	$\int 0 \cdot dx = C$
2	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \forall \alpha \neq -1$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \forall a > 0, a \neq 1$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
11	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
12	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Геометрический смысл определённого интеграла

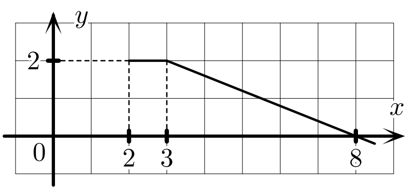
Площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$ и графиками функций $y = f(x), y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что $g(x) \leqslant f(x)$ для всех x из отрезка $[a; b]$, вычисляется по формуле: $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Задания

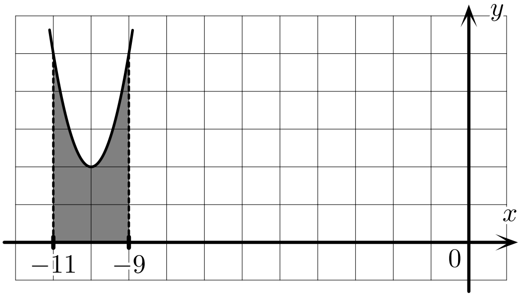
46.1. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



46.2. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



46.3. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



46.4. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 12)e^{x-11}$ на отрезке $[10; 12]$.

46.5. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

46.6. Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 7\operatorname{tg} x - 3{,}5\pi + 11$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

46.7. Найдите точку максимума функции $y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 10$, принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

46.8. Найдите точку максимума функции $y = (x + 16)e^{16-x}$.

46.9. Найдите точку максимума функции $y = (x - 2)^2(x - 4) + 5$.

46.10. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{22}; \dfrac{5}{22}\right]$.

46.11. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5) - 2x + 9$.

46.12. Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

46.13. Найдите точку минимума функции $y = (x + 3)^2 e^{2-x}$.

46.14. Найдите наибольшее значение функции $y = -\sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

46.15. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 100}{x}$.

46.16. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1$.

46.17. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \dfrac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

46.18. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$.

46.19. Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-7-6x-x^2}$.

46.20. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 2e^x + 8$ на отрезке $[-2; 1]$.

46.21. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3$.

46.22. Найдите наибольшее значение функции $x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-6; 1]$.

Домашнее задание

46.23. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 8)$.

46.24. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$ на отрезке $\left[\dfrac{13}{14}; \dfrac{15}{14}\right]$.

46.25. Найдите точку минимума функции $y = 18 + 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

46.26. Найдите наибольшее значение функции $y = 11 + 24x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[63; 65]$.

46.27. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

46.28. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 289}$.

46.29. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+6)^8 - 8x$ на отрезке $[-5{,}5; 0]$.

46.30. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

46.31. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

46.32. Найдите точку максимума функции $y = 11^{6x - x^2}$.

Урок №47. Экономическая задача. Банковские задачи на известный закон выплат.

Чаще всего банковские задачи на кредиты относятся к одному из двух характерных типов:

Первый тип. Выплаты кредита производятся равными платежами. Эта схема ещё называется «аннуитет».

Второй тип. Выплаты кредита подбираются так, что сумма долга уменьшается равномерно. Это так называемая «схема с дифференцированными платежами».

Рассмотрим первый тип задач. Пусть S — сумма кредита, n — количество платёжных периодов, X — очередная выплата, r — процент по кредиту.

Коэффициент $k = 1 + r/100$ показывает во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Тогда схема погашения кредита:

$$\Big(\big((S \cdot k - X) \cdot k - X\big) \cdot k - X\Big) \cdot \ldots \cdot k - X = 0.$$

Раскроем скобки:

$$S \cdot k^n - X(k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1) = 0.$$

Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S \cdot k^n - X \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0.$$

В более общем случае платежи могут быть неравными, но о них есть некоторая информация, которую необходимо использовать.

Также встречаются задачи не на платежи, а на пополнение счёта.

Задания

47.1. В июле планируется взять кредит на сумму 4 026 000 рублей. Условия его возврата таковы:

1. Каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года.
2. С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью выплачен равными платежами за четыре года, по сравнению со случаем, если кредит будет полностью выплачен равными платежами за два года?

47.2. Оля хочет взять кредит на 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, быть может, последней) после начисления процентов. Ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

47.3. Фермер получил кредит в банке под определённый процент годовых. Через год фермер в счёт погашения кредита вернул в банк три четверти от всей суммы, которую он должен банку к этому времени. А ещё через год в счёт полного погашения кредита он внёс в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

47.4. Первого декабря 2016 года Валерий взял в банке кредит 523 тыс. руб. под 10% годовых сроком на 3 года. Схема выплаты кредита следующая: 30 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем с 1 по 30 декабря Валерий выплачивает банку часть долга. По договорённости с банком было определено, что второй платёж будет в три раза меньше первого, а третий — в два раза меньше второго. Сколько рублей должен будет выплатить банку Валерий в декабре 2018 года?

47.5. В банк был положен вклад под банковский процент 10%. Через год хозяин вклада снял со счёта 2000 рублей, а ещё через год внёс 2000 рублей. Однако, вследствие этих действий через три года со времени первоначального вложения вклада он получил сумму меньше запланированной. На сколько рублей меньше запланированной суммы получил в итоге вкладчик?

47.6. Руслан вложил 1 миллион рублей в банк под 14% годовых (начисление в конце года на общую сумму). При этом каждый месяц он снимает по x тысяч рублей на проживание (начиная со второго года) в течении четырёх лет, и в конце пятого года после начисления процентов сумма оказалась не менее одного миллиона. Определите, какую максимальную сумму он мог снимать ежемесячно. В ответе укажите целочисленное значение в тысячах рублей.

47.7. Вклад в размере 12 миллионов рублей планируется открыть на 4 года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 20% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x миллионов рублей, где x — целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за 4 года начислит на вклад более 15 миллионов рублей.

Домашнее задание

47.8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму в 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

1. Каждый январь долг возрастает на a% по сравнению с концом предыдущего года,
2. с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число a, если известно, что кредит был полностью погашен за 2 года, причём в первый год было переведено 55 000 рублей, а во второй — 69 000 рублей.

47.9. В июле 2016 года планировалось взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным 4,2 млн рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн рублей.

47.10. По вкладу **А** банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу **Б** — увеличивать эту сумму на 7% в первый год, и на одинаковое целое число $n\%$ за второй и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад **Б** окажется выгоднее вклада **А** при одинаковых суммах первоначальных взносов.

47.11. 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года, если по 4 392 000 рублей — то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

47.12. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн. руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придётся 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придётся выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съёмную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Урок №48. Экономическая задача. Банковские задачи на известный закон изменения долга.

Рассмотрим второй тип задач — дифференцированный платёж, это такой способ погашения кредита, при котором заёмщиком выплачивается основная сумма займа («тело кредита») равными частями, а начисление процентов осуществляется только на остаток задолженности в конкретный момент времени.

Если в задаче присутствуют слова «долг уменьшается на одну и ту же величину», то, скорее всего, речь идёт о дифференцированном платеже.

Отметим, что в этом случае платежи отличаются между собой.

Схема погашения кредита для n платёжных периодов:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr] & & S\cdot\frac{n-1}{n} \arrow[dr] & & S\cdot\frac{n-2}{n} \arrow[dr] & & S\cdot\frac{1}{n} \arrow[dr] & & 0 \\
& S\cdot k \arrow[ur, "\text{1-я выплата}"'] & & S\cdot k\cdot\frac{n-1}{n} \arrow[ur, "\text{2-я выплата}"'] & & \dots \arrow[ur] & & S\cdot k\cdot\frac{1}{n} \arrow[ur, "n\text{-я выплата}"'] &
\end{tikzcd}$$

1-я выплата: $Z_1 = S\cdot k - S\cdot\dfrac{n-1}{n}$

2-я выплата: $Z_2 = S\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot k - S\cdot\dfrac{n-2}{n}$

...

n-я выплата: $Z_n = S\cdot\dfrac{1}{n}\cdot k.$

Сумма всех выплат

$$Z = Z_1 + \dots + Z_n =$$

$$= S\cdot k\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

После применения формулы суммы арифметической прогрессии:

$$Z = S\cdot k\cdot\frac{n+1}{2} - S\cdot\frac{n-1}{2} = S + S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{r}{100} = S + \Pi,$$

где Π — величина переплаты.

В более общем случае долг может уменьшаться неравномерно, но о нём есть некоторая информация, которую необходимо использовать.

Задания

48.1. Василий хочет взять кредит на сумму 1 325 535 рублей на 5 лет под 20% годовых. Банк предложил ему два варианта:

1. Василий отдаёт одну и ту же сумму каждый год (аннуитетные платежи).
2. Василий производит платежи так, чтобы долг уменьшался после каждого платежа на одну и ту же сумму (дифференцированные платежи).

На сколько рублей меньше Василий отдаст банку, если выберет второй вариант?

48.2. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн. рублей?

48.3. 1 июля планируется взять кредит в банке на сумму 300 тыс. рублей на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

— 15 числа каждого месяца долг возрастает на 10% по сравнению с началом текущего месяца;

— с 16 по 28 число каждого месяца необходимо выплачивать часть долга;

— 1 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем долг на 1 число предыдущего месяца.

На сколько месяцев был взят кредит, если известно, что сумма выплат за первый год оказалась на 144 тыс. рублей больше, чем сумма выплат за второй год? Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

48.4. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $n+1$ месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15 числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тыс. руб. меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15 числа n-го месяца долг составит 200 тыс. руб.;

— к 15 числу $n+1$ месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тыс. рублей.

48.5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн. рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите a, если известно, что наибольший годовой платёж составляет не более 1,9 млн. рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн. рублей.

Домашнее задание

48.6. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

48.7. Эльвира взяла в кредит 1 млн. рублей на срок 36 месяцев. По договору она должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Эльвирой банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Эльвирой, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. На сколько тысяч рублей больше Эльвира выплатит банку в течение первого года нежели в течении третьего года?

48.8. В банке планируется взять кредит на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с предыдущим месяцем;

— со 2-ого по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— на 15-ое число каждого месяца (с 1-го по 30-й) долг становится меньше на 20 тыс. руб. по сравнению с предыдущим месяцем;

— в 31-й месяц долг полностью погашается.

Какова была величина долга на 30-й месяц, если суммарная величина выплат после полного погашения кредита равна 1348 тыс. рублей?

48.9. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн. рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн. рублей.

48.10. Банк предоставляет кредит сроком на 10 лет под 19% годовых на следующих условиях: ежегодно заёмщик возвращает банку 19% от непогашенной части кредита и 0,1 от суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает 0,1 суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает 0,1 суммы кредита и 19% от 0,9 суммы кредита и т.д. Во сколько раз сумма, которую выплатит банку заёмщик, будет больше суммы кредита, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита?

Урок №49. Экономическая задача. Задачи оптимизации.

Математическая модель задачи оптимизации обычно представляет собой одно или два линейных уравнения или неравенства относительно двух неизвестных и одно линейное или простейшее нелинейное уравнение, связывающее неизвестные и величину (**целевую функцию**), для которой нужно найти максимум или минимум.

Логический перебор в задачах оптимизации

49.1. У фермера есть два поля, по 10 га каждое. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле — 400 ц/га, на втором поле — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле — 300 ц/га, на втором поле — 400 ц/га. Цена картофеля — 10 000 руб./ц, цена свёклы — 11000 руб./ц.

Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение: Один га второго поля, засаженный свёклой принесёт $11000 \cdot 400$ рублей. Один га второго поля, засаженный картофелем принесёт $10000 \cdot 300$ рублей. Следовательно, второе поле выгодно всё засеять свёклой. Аналогично получаем, что первое поле выгодно всё засеять картофелем. Т.о. наибольший возможный доход фермера равен $11000 \cdot 400 \cdot 10 + 10000 \cdot 400 \cdot 10 = 84$ млн. руб.

49.2. Бизнесмен купил здание и собирается открыть в нём отель с одноместными номерами по 16 кв.м и стоимостью 3200 руб./сутки и двухместными номерами по 20 кв.м и стоимостью 3800 руб./сутки. Площадь отеля — 812 кв.м.

Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки бизнесмен?

Решение: Один квадратный метр площади одноместного номера приносит в сутки $3200/16 = 200$ руб., а кв. м двухместного — $3800/20 = 190$ руб. $\text{НОК}(16, 20) = 80$. На 800 кв. м выгодно разместить 50 одноместных номеров, получив 12 кв. м в остатке. Заменив три одноместных номера более выгодными двухместными, мы используем полностью всю площадь. Таком образом получаем 47 одноместных номера и 3 двухместных, и максимально возможный суточный доход — $47 \cdot 3200 + 3 \cdot 3800 = 161\,800$ рублей.

Задачи оптимизации с квадратичными целевыми функциями

49.3. Строительство нового завода стоит 75 миллионов рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0{,}5x^2+x+7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение. Из условия следует, что ежегодная прибыль фирмы (в млн. рублей) равна

$$a = -0{,}5x^2 + (p-1)x - 7.$$

График этой функции — парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения эта функция принимает в точке x_0, равной абсциссе вершины параболы: $x_0 = p - 1$. Тогда наибольшее значение функции составит $\dfrac{(p-1)^2}{2} - 7$. Строительство завода окупится не более, чем за три года, если $3 \cdot \left(\dfrac{(p-1)^2}{2} - 7\right) \geqslant 75$, откуда $p = 9$.

49.4. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 35 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $7t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект направлено x рабочих, тогда их суточная зарплата равна $7x^2$ д. е., тогда на второй объект направится $35-x$ рабочих и их суточная зарплата составит $3\cdot(35-x)^2$ д. е. Суммарная суточная зарплата составит $a = 10x^2 - 210x + 3675$ д. е. Минимум этой квадратичной функции достигается в точке, являющейся абсциссой вершины $x_0 = 10{,}5$. Это число не является целым, поэтому ищем значения a для $x = 10$ и $x = 11$. $a(10) = a(11) = 2575$ д. е.

Ответ. На первый объект нужно направить 10 рабочих, а на второй — 25 рабочих, либо на первый объект нужно направить 11 рабочих, а на второй объект — 24 рабочих; выплаты составят 2575 д. е.

49.5. Зависимость объёма Q купленного у фирмы товара от цены P (в рублях) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leqslant P \leqslant 15000$. Доход от продажи товара составляет $P \cdot Q$ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют

$$3000Q + 5000000 \text{ рублей.}$$

Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако прибыль не изменилась.

На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение.

Прибыль $D = P \cdot Q - 3000Q - 5000000 = -P^2 + 18000P - 50000000$. Фирма уменьшила цену продукции на 20%, но прибыль не изменилась, значит $-P^2 + 18000P - 50000000 = -(0{,}8P)^2 + 18000(0{,}8P) - 50000000$, отсюда следует, что $0{,}8P = 8000$ рублей. Увеличив новую цену на a процентов, получим цену, равную $8000 \cdot \left(1 + \dfrac{a}{100}\right)$ рублей, и прибыль, равную

$$D(a) = -8000^2\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2 + 18000 \cdot 8000\left(1 + \frac{a}{100}\right) - 50000000$$

рублей.

Так как $D(a)$ — квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффициентом, наибольшее значение достигается в его вершине при $\left(1 + \dfrac{a}{100}\right) = \dfrac{9}{8}$, следовательно, $a = 12{,}5$.

Задачи оптимизации, требующие применения производной

49.6. Евлампия является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Евлампия платит рабочим 100 д. е. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 15 изделий. Какую наименьшую сумму (в д. е.) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся $25x^3$ часов, а на заводе, расположенном во втором городе, $9y^3$ часов. Тогда за неделю будет произведено $x+y$ единиц изделий, а затраты на оплату труда составят $100\cdot(25x^3+9y^3)$ д. е. Т. о. необходимо найти наименьшее значение целевой функции $a = 100\cdot(25x^3+9y^3)$ при условии $x+y=15$. Тогда $a = 100\cdot(25x^3+9(15-x)^3)$, где $0\leqslant x\leqslant 15$. Производная данной функции обращается в 0 при $x=5{,}625$ или $x=-22{,}5$. Заданному ограничению удовлетворяет только первый корень, легко доказать, что это — точка минимума. Так как 5,625 не является целым числом, то находим $a(5)=1212500$ и $a(6)=1196100$. Последнее является ответом.

Задачи оптимизации с линейными целевыми функциями и ограничениями

49.7. Бизнесмен купил здание и собирается открыть в нём отель со стандартными номерами по 27 кв. м и стоимостью 3000 руб./сутки и номерами «люкс» по 36 кв. м и стоимостью 5000 руб./сутки. Площадь отеля — 1100 кв. м.

Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки бизнесмен?

Решение: Пусть x — число стандартных номеров, y — число номеров «люкс», a — суточный доход бизнесмена.

Тогда

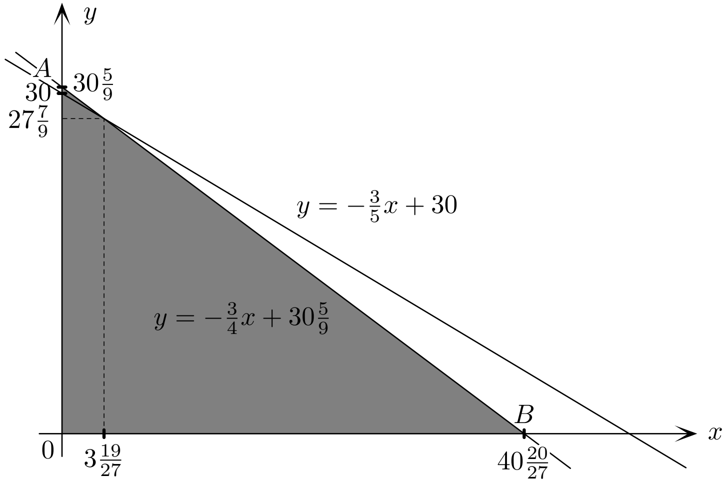
$$\begin{cases} 27x+36y\leqslant 1100,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} y\leqslant -\dfrac{3}{4}x+30\dfrac{5}{9},\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

При этом $a=3000x+5000y$. Пусть $b=\dfrac{a}{5000}=\dfrac{3}{5}x+y$, откуда $y=-\dfrac{3}{5}x+b$ — уравнение целевой прямой.

Требуется найти максимальное значение $b\geqslant 0$, при котором целевая прямая будет иметь с областью ограничений хотя бы одну общую точку с целочисленными координатами. Поскольку модуль углового коэффициента целевой прямой меньше углового коэффициента прямой AB (см. рисунок), значение b будет максимальным, если целевая прямая проходит через точку A.



Но ордината точки A не является целым числом. Опорной точкой в данном случае будет точка $(0;30)$, а уравнением опорной целевой прямой — уравнение $y=-\dfrac{3}{5}x+30$.

Найдём координаты точки пересечения опорной прямой и прямой AB:

$$-\frac{3}{5}x+30=-\frac{3}{4}x+30\frac{5}{9},$$

откуда $x=3\frac{19}{27}$, а $y=27\frac{7}{9}$. Следовательно, допустимыми ординатами являются 30, 29, 28. Найдём ограничения для соответствующих абсцисс. Для $y=30$ при ограничении $27x+36y\leqslant 1100$, получаем $x\leqslant\frac{20}{27}$. Единственным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x=0$. Для $y=29$ получаем $x\leqslant 2\frac{2}{27}$. Максимальным неотрицательным целым решением последнего неравенства будет $x=2$. Для $y=28$ получаем $x\leqslant 3\frac{11}{27}$. Максимальным неотрицательным целым решением этого неравенства является $x=3$.

Вычислим значения целевой функции в найденных точках.

$a(0;30)=150000, a(2;29)=151000, a(3;28)=149000.$

Ответ: 151000.

Домашнее задание

49.8. Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

49.9. Строительство нового завода стоит 220 млн. руб. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн. руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн. руб.) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции $p = 9$ тыс. руб. за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

49.10. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1, 2 \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

49.11. Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%. В течении какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

49.12. В январе 2000 года ставка по депозитам в Банке «Возрождение» составила $x\%$ годовых, тогда, как в январе 2001 года — $y\%$ годовых, причём известно, что $x + y = 30\%$. В январе 2000 года вкладчик открыл счёт в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счёта пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счёте вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

49.13. В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Урок №50. Комплексные числа.

При решении алгебраических уравнений встречаются ситуации, когда уравнение не имеет корней в множестве действительных чисел. Например, квадратное уравнение не имеет действительных корней, если его дискриминант отрицательный.

Расширением понятия числа является понятие комплексного числа. Введено число i, которое считают решением квадратного уравнения $x^2+1=0$, то есть считают справедливым равенство $i^2+1=0$ или $i^2=-1$. Число i называют **мнимой** единицей.

Комплексными числами называют выражения вида $z=a+bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица ($i^2=-1$). При этом число a называется **действительной частью** комплексного числа z, число b — **мнимой частью** комплексного числа z и обозначается $a=\mathrm{Re}\ z$, $b=\mathrm{Im}\ z$.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

Если $a=0$, то число $z=0+bi=bi$ называется **чисто мнимым**. Если $b=0$, то число $a+0=a$ отождествляется с действительным числом a, а это означает, что множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, то есть $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются **равными** $z_1=z_2$ тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $a_1=a_2, b_1=b_2$. Понятие «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Два комплексных числа $z=a+bi$ и $\overline{z}=a-bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **комплексно сопряжёнными**.

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат точки координатной плоскости Oxy. Плоскость называется комплексной, если каждому комплексному число $z=a+bi$ ставится в соответствие точка $M(a;b)$. И наоборот, каждую точку $M(a;b)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=a+bi$. Ось Ox называют **действительной** осью, так как на ней лежат действительные числа $z=a+0i=a$, а ось Oy, на которой расположены чисто мнимые числа $z=0+bi=bi$ — **мнимой** осью.

Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел выполняются аналогично соответствующим операциям над многочленами, учитывая, что $i^2=-1$.

- Сумма (разность) комплексных чисел определяется равенством

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

- Произведение комплексных чисел определятеся равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 =$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \text{ так как } i^2 = -1.$$

- Деление двух комплексных чисел определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

- Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$ или r. Очевидно, что $|z| \geqslant 0$.

Задания

50.1. Найдите разность и сумму комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - 3i$.

50.2. Найдите произведение и частное чисел $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 1 - i$.

50.3. Вычислить $\dfrac{i^{326} - 1}{i^{545} + 1}$.

50.4. Даны числа $z = 3 + i$, $t = 1 + i$, $w = 2 - 3i$, $s = -1 + 2i$. Найти число $|z \cdot 3t - 2w \cdot s|$.

50.5. Найти расстояние между комплексными числами $z = 2 - 3i$ и $w = -3 + 2i$.

50.6. Какова средняя точка отрезка, образованного числами $z = 6 - 3i$ и $w = 2 + 5i$.

50.7. Пусть s будет суммой комплексных чисел $z = 2 + 3i$ и $w = 1 - 4i$ и пусть r является разностью этих чисел. Найдите среднюю точку между s, r.

50.8. Про комплексное число z известно, что $|z - 4 - 7i| = |z + 4 - i|$. Найдите наименьшее значение $|z|$.

Урок №51. Параметры. Линейные уравнения и неравенства. Подготовительные задачи на разные темы.

Линейные уравнения и неравенства с параметрами

При решении линейного уравнения с параметрами $f(a) \cdot x = g(a)$ необходимо учитывать три случая:

Если $f(a) = 0, g(a) = 0$, то корнем уравнения является любое действительное число.

Если $f(a) = 0, g(a) \neq 0$, то корней нет.

Если $f(a) \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{g(a)}{f(a)}$.

При решении линейного неравенства с параметром $f(a) \cdot x \bigvee g(a)$, где символ $\bigvee$ заменяет один из знаков: $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, необходимо рассматривать три случая:

Если $f(a) > 0$, то при делении обеих частей неравенства на $f(a)$ знак неравенства не меняется.

Если $f(a) < 0$, то при делении обеих частей на $f(a)$ знак неравенства меняется на противоположный.

Если $f(a) = 0$, то решение неравенства зависит от $g(a)$.

В случае введения новой переменной не забывать учитывать её ограничения.

51.1. Найдите все пары чисел $(a; b)$, для каждой из которых имеет не менее трёх корней уравнение

$$(a-2)x + b(x-2) = (2b-1)x + (2x-1)a.$$

51.2. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$2xa^2 - (5x+2)a + 2x + 1 \geqslant 0.$$

51.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6\log_{0,25} \sin x + a^2 + 6a + 8 = a \log_4 \sin x.$$

51.4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases}(3a^2-13a)x+8y=3a^2-16a-8,\\ 5x+4y=2.\end{cases}$$

Подготовительные задачи на разные темы

51.5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+2x+a=17$ и $x^2+5x=3a+18$ имеют хотя бы один общий корень.

51.6. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x-3a-1}{x+2a-2}\leqslant 0$ выполняется при каждом значении x таком, что $2\leqslant x\leqslant 3$?

51.7. При каждом значении a решить неравенство $\dfrac{(x-1)(x-a)}{(x-\frac{a+1}{2})}>0.$

51.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+\sqrt{x^2-4ax-7a}=3$ имеет хотя бы один корень.

51.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\cos 2x-(a^2-8a+6)\sin x=3$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно четыре корня.

51.10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2\leqslant\log_2(3x+4)$ является решением неравенства $81x^2\leqslant 16a^4$.

51.11. При каком наименьшем положительном значении b функция

$$y=\sin\left(20x+\frac{b\pi}{150}\right)$$

имеет минимум в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$?

51.12. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}x^2+y=2x\\ \log_a y=(x^2-2x)^2\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

51.13. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

51.14. Найдите значения параметра a, при которых уравнение $x - a = ||2x| - 1|$ имеет ровно три корня.

51.15. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_5 (25^x - \log_5 a) = x$$

имеет единственное решение.

51.16. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

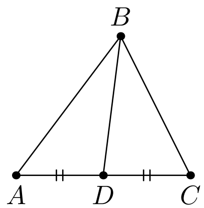
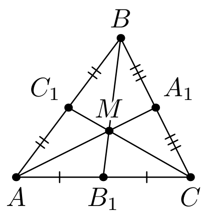
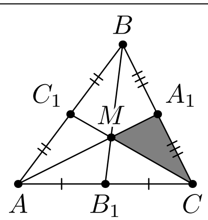
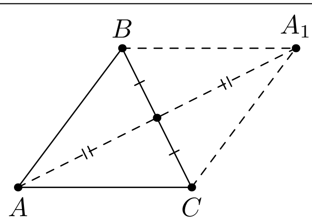
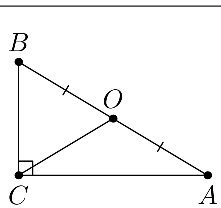
51.17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left| x + \frac{a^2}{x} + 1 \right| + \left| x + \frac{a^2}{x} - 1 \right| = 2$$

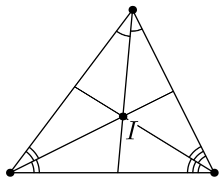
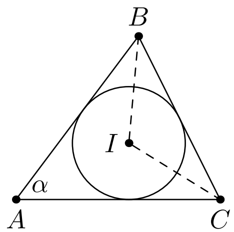
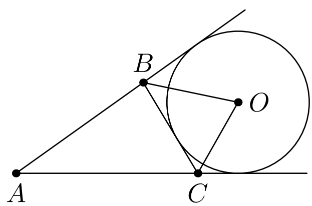
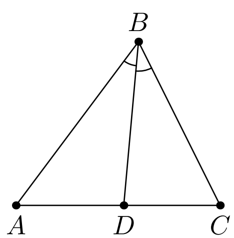
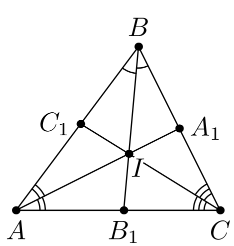
имеет хотя бы один корень.

Урок №52. Сложная планиметрия. Треугольник: средняя линия, медианы, высоты, биссектрисы. Параллелограмм. Трапеция.

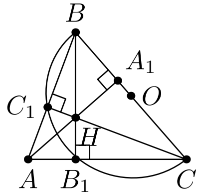
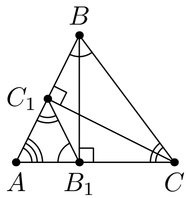
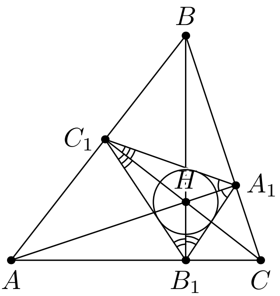
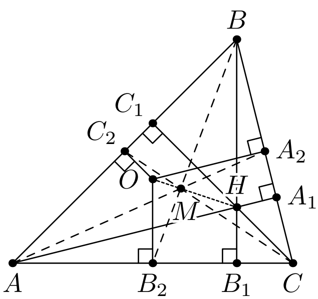
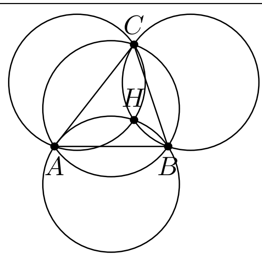
Медианы

	$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$
	Медианы треугольника пересекаются в одной точке $\dfrac{AM}{MA_1} = \dfrac{BM}{MB_1} = \dfrac{CM}{MC_1} = \dfrac{2}{1}$
	Медианы треугольника разбивают его на 6 равновеликих треугольников
	«Удвоение медианы»: ABA_1C — параллелограмм
	$m_c = R = \dfrac{1}{2}c = OC$, верно и обратное: **Признак прямоугольного треугольника:** если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник — прямоугольный.

Биссектрисы

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке I — центре вписанной в треугольник окружности</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\angle CIB = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC, то выполняется равенство:
$\angle COB = 90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$
$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \dfrac{AB}{BC}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\dfrac{AI}{IA_1} = \dfrac{b+c}{a}$
$\dfrac{BI}{IB_1} = \dfrac{a+c}{b}$
$\dfrac{CI}{IC_1} = \dfrac{a+b}{c}$
$AA_1^2 = BA \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C$</td>
</tr>
</table>

Высоты

	Точки B, C, B_1, C_1 — лежат на одной окружности, причём BC — её диаметр
	Треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACC_1. Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\lvert\cos\angle A\rvert$.
	$\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$, $\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B$, $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$, H — центр окружности вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$
	Точки O, H и точка M пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой, (прямая Эйлера) причём точка M лежит на отрезке OH и $OM : MH = 1 : 2$
	Если H — ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH равны между собой.

52.1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

52.2. Через основание биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC с вершиной B проведён перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающий прямую AC в точке E. Найдите отрезок AE, если известно, что $CD = 4$.

52.3. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

52.4. Внутри равностороннего треугольника ABC в произвольном месте поставлена точка M.

а) Докажите, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника ABC равна высоте этого треугольника.

б) Найдите расстояние от точки M до стороны AB, если расстояния от точки M до сторон AC и BC соответственно равны $10\sqrt{133}$ и $3\sqrt{133}$, а площадь треугольника ABC равна $14364\sqrt{3}$.

52.5. Докажите теорему: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

52.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

52.7. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.

52.8. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8, а основания — 3 и 6.

52.9. Докажите теорему: точка пересечения диагоналей любой трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

52.10. Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

52.11. Вычислите биссектрису треугольника ABC, проведённую из вершины A, если $BC = 18, AC = 15, AB = 12$.

52.12. (ОММО 2014 №7). Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

52.13. Докажите теорему: середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

52.14. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

52.15. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC образует со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

52.16. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 40°. Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B. Найдите угол AHD.

52.17. Трапеция $ABCD$ разделена прямой, параллельной её основаниям AD и BC, на две равновеликие трапеции. Найти отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, если основания трапеции равны a и b.

52.18. Дана трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите углы трапеции.

Урок №53. Параметры. Квадратный трёхчлен.

Квадратные уравнения и неравенства с параметрами

Знак дискриминанта ($D < 0$, $D = 0$, $D > 0$) определяет количество действительных корней.

Не забывать исследовать случай, когда коэффициент перед x^2 равен 0, и уравнение становится линейным.

Учитывать ОДЗ при исследовании количества корней.

Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$:

имеет два корня разных знаков $\Leftrightarrow ac < 0$;

имеет два различных корня одного знака $\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ ac > 0; \end{cases}$

имеет два различных положительных корня $\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ ac > 0, \\ ab < 0; \end{cases}$

имеет два различных отрицательных корня $\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ ac > 0, \\ ab > 0; \end{cases}$

имеет на интервале $(m; M)$ ровно один корень, если $f(m)f(M) < 0$.

53.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$ имеет ровно два различных корня.

53.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2(a^2 - 4a + 1)x + 4 = 0$ имеет ровно два различных отрицательных корня.

53.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $121^x + (3a^2 - a + 4) \cdot 11^x - 5a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

53.4. Найдите наименьшее значение параметра a, для которого существует хотя бы одна пара $(x; y)$ таких x и y, что $x^2 + 2y^2 - xy - ax + ay + a^2 \leqslant 1$.

Расположение корней квадратного трёхчлена

Пусть квадратичная функция имеет вид $f(x) = \alpha(a)x^2 + \beta(a)x + \gamma(a)$, где $\alpha(a), \beta(a), \gamma(a)$ — выражения, зависящие от параметра a или числа, причём $\alpha(a) \neq 0$, $x_0 = -\dfrac{\beta(a)}{2\alpha(a)}$ — абсцисса вершины параболы. Пусть корни уравнения

$$\alpha(a)x^2 + \beta(a)x + \gamma(a) = 0 \tag{1}$$

есть x_1 и x_2, $x_1 \leqslant x_2$, а дискриминант $D = \beta^2(a) - 4\alpha(a)\gamma(a)$.

Рассмотрим несколько вариантов расположения корней квадратного уравнения (1) на координатной оси.

(1) Для того, чтобы оба корня квадратного уравнения (1) были меньше числа d ($x_1 < x_2 < d$), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ \alpha(a) \cdot f(d) > 0, \\ x_0 < d. \end{cases} \tag{2}$$

(2) Для того, чтобы оба корня квадратного уравнения (1) были больше числа d, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ \alpha(a) \cdot f(d) > 0, \\ x_0 > d. \end{cases} \tag{3}$$

(3) Для того чтобы оба корня квадратного уравнения (1) находились в интервале $(d; e)$ ($d < x_1 \leqslant x_2 < e$), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ \alpha(a) \cdot f(d) > 0, \\ \alpha(a) \cdot f(e) > 0, \\ d < x_0 < e. \end{cases} \tag{4}$$

(4) Для того чтобы число d находилось между корнями квадратного уравнения (1) ($x_1 < d < x_2$), необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\begin{cases} D > 0 \\ \alpha(a) \cdot f(d) < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что в системе (5) первое неравенство является избыточным условием, т.к. существование различных корней здесь уже обеспечивается непрерывностью квадратичной функции.

(5) Для того чтобы отрезок $[d;e]$ лежал внутри интервала $(x_1;x_2)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} D > 0, \\ \alpha(a)\cdot f(d) < 0, \\ \alpha(a)\cdot f(e) < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, условие $D > 0$ в системе (6) является избыточным.

53.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$ будет выполнено для любого значения $x \in (0;4)$.

53.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $(a-2)x^2 - (2a+3)x + a + 1 > 0$ принадлежит отрезку $[-1;1]$.

53.7. Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения

$$\arcsin(ax^2 - ax - 1) + \arcsin(x) = 0.$$

53.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 2} > 0$ выполнено для любых значений переменной x из отрезка $[-1;1]$.

53.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

53.10. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 + \sqrt{p^2 + 4p}\cdot x + p - 1 = 0$ имеет корни, а сумма квадратов корней минимальна?

53.11. При каких значениях b уравнение $(b-1)\cdot 4^x - (2b-1)\cdot 2^x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

53.12. При каких значениях a неравенство $4^{\sin x} - 2\cdot(a-3)\cdot 2^{\sin x} + a + 3 > 0$ выполняется для всех x?

53.13. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 4|x| + 3| = a$ имеет ровно 8 решений?

53.14. При каких значениях a функция $\dfrac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ имеет минимум при $x = 6$?

53.15. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x^2 + ax - 1 < 0$ является интервалом длины 5?

53.16. При каких значениях параметра a уравнение $5x^2 + (4a - 6)x + 1 = 0$ имеет два корня, причём один из корней больше (-1), а второй — меньше (-1)?

53.17. При каких a уравнение $(2a-2)x^2 + (a+1)x + 1 = 0$ имеет корни, и все они принадлежат интервалу $(-2; 0)$?

53.18. При каких значениях a уравнение $(a-1) \cdot 4^x + (2a-3) \cdot 6^x = (3a-4) \cdot 9^x$ имеет единственное решение?

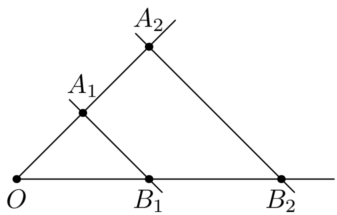
53.19. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 + 3x}{x - a^2} = 0$$

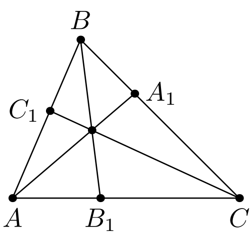
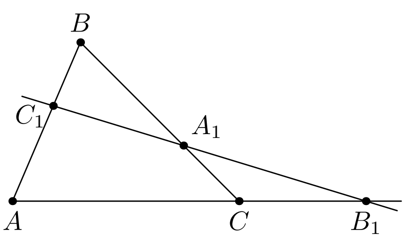
имеет ровно два различных корня.

Урок №54. Сложная планиметрия. Отношение отрезков. Отношение площадей.

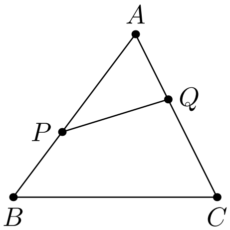
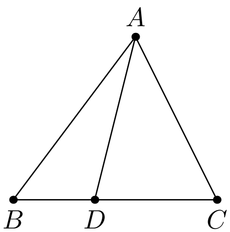
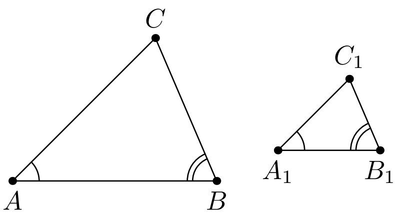
Пропорциональные отрезки

	Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, то $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$; $\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}$

Свойства произвольного треугольника

	**Теорема Чевы** отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$
	**Теорема Менелая** $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

Соотношения между площадями треугольников

	$\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{AP}{AB} \cdot \dfrac{AQ}{AC}$
	$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \dfrac{BD}{DC}$
	$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2}$

Задания

54.1. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $AC = 2CN$. Точка M находится на стороне BC, причём $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

54.2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K, так, что $AM : MB = 2 : 3, AK : KC = 2 : 1, BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

54.3. Длины сторон треугольника различны и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна одной из сторон треугольника.

54.4. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

54.5. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних равны S_1 и S_2.

54.6. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

54.7. (ОММО 2011 №5) Три правильных пятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух пятиугольников равны 4 и 12. Третий пятиугольник делит площадь фигуры, заключённой между первыми двумя, в отношении $1:3$, считая от меньшего пятиугольника. Найдите сторону третьего пятиугольника.

54.8. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

54.9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны.

а) Докажите, что точки A и D одинаково удалены от прямой BC.
б) Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что $AB = 13, BC = 10, CD = 15, DA = 24$.

54.10. В ромб вписана окружность Θ. Окружности W_1 и W_2 (разного радиуса) расположены так, что каждая касается окружности Θ и двух соседних сторон ромба.

а) Докажите, что площадь круга, ограниченного окружностью Θ, составляет менее 80% площади ромба.
б) Найдите отношение радиусов окружностей W_1 и W_2, если известно, что диагонали ромба относятся, как $1 : 2$.

54.11. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

54.12. Диагонали разбивают выпуклый четырёхугольник на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 и S_4 (S_1 и S_3 — площади треугольников, прилежащих к противоположным сторонам четырёхугольника). Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

54.13. Из точки на основании треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Они разбивают треугольник на параллелограмм и два треугольника с площадями S_1 и S_2. Найдите площадь параллелограмма.

54.14. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K, при этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC$ равен 30°.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC = \sqrt{21}$.

Урок №55. Параметры. Применение свойств функций.

(1) Использование свойств функции: монотонность, ограниченность, область определения.

55.1. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + a\cos x = 2a$ имеет хотя бы одно решение?

55.2. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $64x^6 - (3x+a)^3 + 4x^2 - 3x = a$ имеет более одного корня.

55.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + a = 6\sin x \\ y^4 + z^2 = 6a \\ (a-3)^2 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x + 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

55.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2 + 7|x| + 49\log_7(2x^2+7) = 7a + 3|2x - 7a|$ имеет хотя бы один корень.

55.5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке от $[-1; 1)$.

55.6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5x + |2x - |x+a|| = 10|x+1|$$

имеет хотя бы один корень.

55.7. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

(2) Для чётной функции $f_a(x)$ уравнение (или неравенство) $f_a(x) = 0$ ($f_a(x) \geqslant 0$ или $f_a(x) \leqslant 0$) имеет единственное решение, если $x = 0$ — решение задачи и кроме него решений нет.

55.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

55.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

55.10. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x - 1 + a| + |x + 1 - a|$$

имеет единственный корень.

55.11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

55.12. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

(3) При симметрии относительно прямой $x = b$ удобно сделать замену $z = x - b$ и свести задачу к пункту 2.

55.13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x+7)^4 + (a-5)^4} = |x + a + 2| + |x - a + 12|$ имеет единственный корень.

(4) В случае симметричных функций $f(x, y) = f(y, x)$ для единственности решения необходимо выполнение равенства $x = y$.

55.14. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка действительных чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z, \\ x + y + 2z = 2a. \end{cases}$$

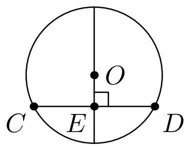
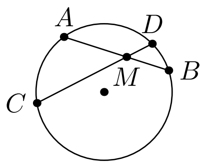
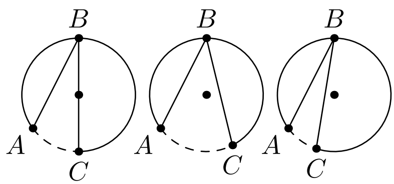
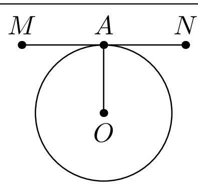
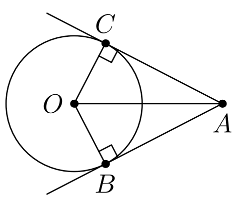
55.15. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

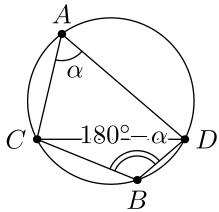
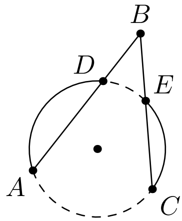
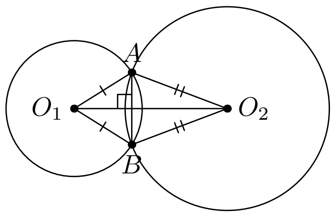
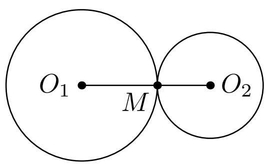
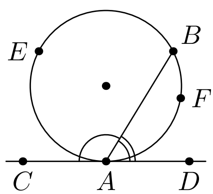
$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$

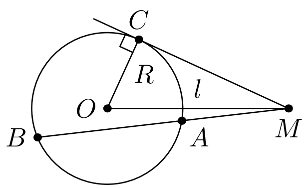
имеет единственное решение.

Урок №56. Сложная планиметрия. Касательная к окружности. Касающиеся и пересекающиеся окружности.

Окружность. Свойства хорд и углов

	$CE = ED$ (O — центр окружности)
	$AM \cdot MB = CM \cdot MD$
	$\angle ABC = \dfrac{1}{2} \smile AC$
	MN касается окружности в точке $A \Rightarrow MN \perp OA$; если MN проходит через точку A окружности и $MN \perp OA$ $\Rightarrow MN$ — касательная
	$AC = AB$, $\angle CAO = \angle BAO$

<table>
<tr><td>
</td><td>$\angle CAD + \angle CBD = 180^\circ$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\angle ABC = \dfrac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Линия центров двух касающихся окружностей проходит через их точку касания</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\angle BAC = \dfrac{1}{2} \smile AEB$

$\angle BAD = \dfrac{1}{2} \smile AFB$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$MA \cdot MB = MC^2$

$MA \cdot MB = l^2 - R^2$</td></tr>
</table>

56.1. Из точки M, лежащей вне окружности с центром O и радиусом R, проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания). Прямые OA и MB пересекаются в точке C. Найдите OC, если известно, что отрезок OM делится окружностью пополам.

56.2. Угол при вершине A треугольника ABC равен $120°$. Окружность радиуса R касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите периметр треугольника ABC.

56.3. Даны окружности радиусов R и r, $R > r$. Расстояние между их центрами равно a, $a > R + r$. Найдите отрезки общих касательных, заключённые между точками касания.

56.4. Окружности различных радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке K. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая прямая — в точках D и C соответственно.

1) Найдите AB и отрезок MN общей касательной окружностей, проходящей через точку их касания, заключённый между общими внешними касательными AB и CD.

2) Докажите, что $\angle AKB = \angle O_1MO_2 = 90°$.

3) Докажите, что $ABCD$ — описанная трапеция, и найдите её высоту.

56.5. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и двух сторон треугольника касается меньшая окружность. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

56.6. Докажите, что линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.

56.7. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, а общая хорда равна 24. Найдите расстояние между центрами.

56.8. Две окружности пересекаются в точках A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD, причём хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

56.9. Две окружности касаются внутренним образом в точке A так, что меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке K. Прямые AB и AC вторично пересекают меньшую окружность в точках P и M соответственно.

а) Докажите, что $PM \parallel BC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $PM = 12$, а радиус большей окружности равен 20.

56.10. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB — в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N, а вторую в точке M_1.

а) Докажите, что точка N — середина отрезка MM_1.

б) Найдите длину отрезка MN, если известно, что $CN = 6, DN = 13{,}5$.

56.11. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

56.12. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K. Прямая p касается первой окружности в точке M, а второй — в точке N.

а) Докажите, что расстояние от точки K до прямой p равно $\dfrac{MK \cdot KN}{MN}$.

б) Найдите площадь треугольника MNK, если известно, что радиусы окружностей равны соответственно 12 и 3.

56.13. В большей из двух концентрических окружностей проведена хорда, равная 32 и касающееся меньшей окружности. Найдите радиус каждой из окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8.

56.14. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

56.15. Две равные окружности касаются изнутри третьей и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большей окружности.

56.16. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внешним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.

56.17. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC, если известно, что точка A лежит на отрезке BC.

56.18. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

56.19. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне $BC = a$, и пересекающая окружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах, в точках M и N, отличных от A. Найдите MN.

56.20. Равносторонний треугольник ABC и три одинаковые окружности расположены таким образом, что каждая окружность касается двух сторон треугольника и двух других окружностей.

а) Докажите, что точки попарного касания окружностей являются вершинами равностороннего треугольника.

б) Найдите радиус окружностей, если известно, что $AB = 4$.

Урок №57. Параметры. Графические методы.

① Преобразование графиков.

57.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b} = x + 3$ имеет единственное решение?

57.2. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решения?

57.3. Найдите значения параметра a, при которых уравнение

$$|x^2 - 5x + 6| = ax$$

имеет ровно три различных решения.

57.4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.

57.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x - a| + 3$ имеет ровно три различных корня.

② Метод областей.

57.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leqslant 12, \\ a + 4x \geqslant x^2, \\ a \leqslant x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решение системы для каждого значения a.

57.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 \operatorname{ctg}^2 x - 9a + a^2 = 4a \sin x$$

имеет хотя бы один корень.

57.8. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $8 \sin^3 x = p + 9 \cos 2x$ не имеет решений.

57.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$ имеет единственный корень на отрезке от $[-2; 2]$.

③ Геометрические идеи.

57.10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \big((x-3)^2+(y+3)^2-32\big)\big((2x+3)^2+(2y-13)^2\big)\leqslant 0 \\ ax+y=2 \end{cases}$$

не имеет решений.

57.11. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2-|x-a^2|-3x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

57.12. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+64-16x}+\sqrt{x^2+y^2+36+12y}=10, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

57.13. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1|\leqslant 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

57.14. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ 3|x|+2|y|=12 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

57.15. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2}\leqslant \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x-2y\geqslant 1 \end{cases}$$

имеет решения.

57.16. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ a(x - |x|) = |x - y| + |x + y| \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

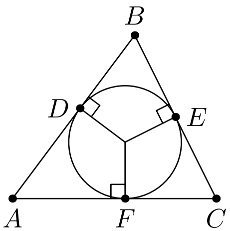
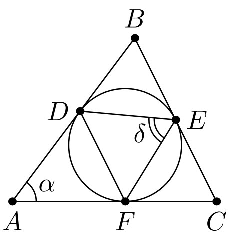
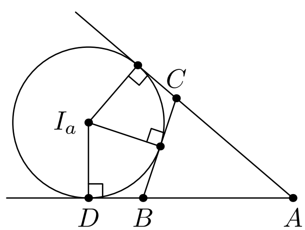
57.17. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

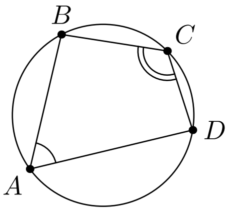
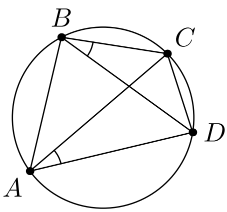
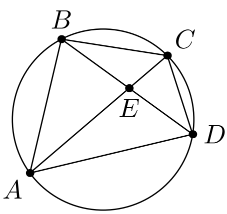
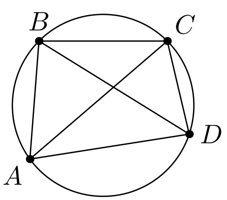
имеет единственное решение.

Урок №58. Сложная планиметрия. Комбинации многоугольников и окружностей. Пропорциональные отрезки в окружности.

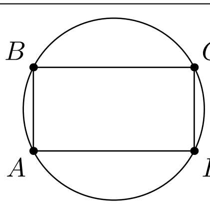
Вписанная и вневписанная окружность

<table>
<tr><td>
</td><td>$AF = AD = p - a$
$BD = BE = p - b$
$CE = CF = p - c$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках D, E и F, то $\angle DEF = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$AD = p$, где точка D — точка касания вневписанной окружности, касающейся продолжения AB</td></tr>
<tr><td>Формула Эйлера</td><td>$IO^2 = R^2 - 2rR$</td></tr>
</table>

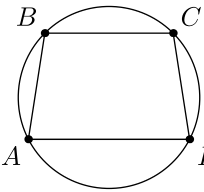
Вписанный четырёхугольник

	$\angle BAD + \angle BCD = 180°$
	$\angle DAC = \angle DBC$
	$AE \cdot EC = BE \cdot ED$
	**Теорема Птолемея** $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

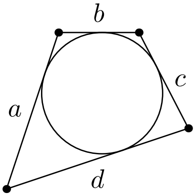
Вписанный параллелограмм

	Вписанный параллелограмм является прямоугольником: $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90°$

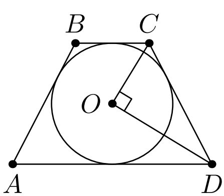
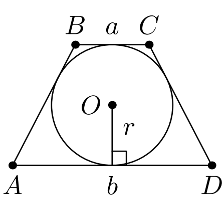
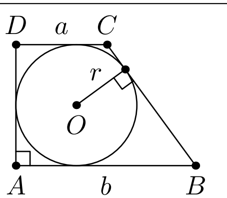
Вписанная трапеция

	Вписанная трапеция является равнобокой: $AB = DC$

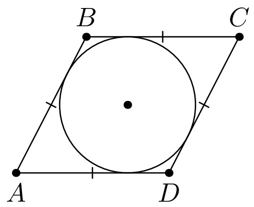
Описанный четырёхугольник

	$a + c = b + d$

Описанная трапеция

	$\angle DOC = 90^\circ$ O — центр окружности
	Если $AB = CD$, то $r = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$
	$r = \dfrac{ab}{a+b}$

Описанный параллелограмм

	Описанный параллелограмм является ромбом: $AB = BC = CD = DA$

58.1. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 13, 13, 24 и расстояние между центрами этих окружностей.

58.2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, b.

58.3. Расстояние от точки P до центра окружности радиуса 11 равно 7. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P.

58.4. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

58.5. Окружность S_1 проходит через центр окружности S_2 и пересекает её в точках A и B. Хорда AC окружности S_1 касается окружности S_2 в точке A и делит первую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $5 : 7$. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность S_2 делится окружностью S_1.

58.6. Докажите, что угол между секущими, проведёнными к окружности из точки, лежащей вне окружности, равен полуразности угловых величин дуг, содержащихся внутри этого угла.

58.7. Докажите, что угол между пересекающимися хордами равен полусумме угловых величин противоположных дуг, высекаемых на окружности этими хордами.

58.8. Известно, что BM и CN — высоты треугольника ABC, при этом $MN = 10$ и $BC = 26$. Найдите расстояние между серединами отрезков MN и BC.

58.9. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

58.10. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10. Найдите радиус окружности, описанной около исходного треугольника.

58.11. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром O. Углы AOB и COD равны. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

58.12. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами AD и BC. Угол между основанием AB и боковой стороной трапеции AD равен $60°$.

а) Докажите, что EK параллельно AB.

б) Найдите площадь трапеции $ABKE$, если радиус окружности равен $\sqrt{131}$.

58.13. Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB.

58.14. Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

58.15. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке O, причём касательная к окружности, проходящая через точку C, параллельна BD.

а) Докажите, что $DC^2 = AC \cdot CO$.

б) Найдите площадь треугольника CDO, если известно, что $AB : BO = 3 : 1$, а площадь треугольника ACD равна 36.

58.16. Около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC.

58.17. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен $2p$. Найдите проекцию диагонали трапеции на большее основание.

58.18. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

58.19. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведена высота CD. Угол BAC равен α. Радиус окружности, проходящей через точки A, C, D равен R. Найдите площадь треугольника ABC.

58.20. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 21, а высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

58.21. Точка M удалена от центра окружности радиуса R на расстояние d. Прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках A и B. Найдите произведение $AN \cdot BM$.

58.22. В прямоугольном треугольнике ABC угол A — прямой, катет AB равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD.

58.23. Точка O —центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABKC$ — вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

Урок №59. Параметры. Другие методы.

(1) Использование параметра как переменной.

Этот метод применяется при решении некоторых задач с параметрами, когда непосредственный поиск переменной затруднён, и в этом случае параметр является переменной, относительно которой проводится решение. В частности, этот метод эффективен в тех случаях, когда степень переменной относительно высока, а наибольшая степень параметра равна двум.

59.1. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^7 - 4x^6 + 11x^5 - 18x^4 + 25x^3 - 2(a+16)x^2 + 25x - 5a - 23 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

59.2. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^4 - 10x^3 + 24x^2 - 2px - p^2 = 0$ имеет три различных корня.

59.3. Найдите все значения параметра a, при котором среди решений неравенства $(a - x^2)(a + 2x - 8) < 0$ нет ни одного решения неравенства $x^2 < 4$.

(2) Полезно знать следующие неравенства:

неравенство	случай равенства
$\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$	$a_1 = a_2 = \dots = a_n$
$x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$	$x = 1$
$x + \dfrac{1}{x} \leqslant -2$ при $x < 0$	$x = -1$
$x + y \geqslant 2\sqrt{xy},\ x, y \geqslant 0$	$x = y$
$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$	$x = y$
$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz,\ x, y, z > 0$	$x = y = z$
$\lvert x\rvert + \lvert 1 - x\rvert \geqslant 1$	$x \in [0; 1]$
$\lvert a \sin x + b \cos x\rvert \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$	

59.4. При каких значениях y уравнение

$$\frac{25}{\sqrt{x-1}}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}=14-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}$$

имеет решения?

(3) Тригонометрические уравнения и неравенства.

59.5. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $3\cos 2x-2\sin 2x=b$ имеет решение.

59.6. При каких значения параметра a уравнение $(1+\sin(3ax))\sqrt{5\pi x-x^2}=0$ имеет ровно 5 различных корней?

(4) Задачи на один корень на отрезке.

59.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(3x-a)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

59.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;2]$.

59.9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

59.10. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)\operatorname{tg}^2 x-\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}+a=0$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

(5) Разные задачи.

59.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x^4 - y^4 = 10a - 24 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

59.12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$ имеет ровно 3 различных решения.

59.13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |2a - 4| \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Урок №60. Сложная планиметрия. Многоугольники. Векторы.

60.1. Четырёхугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.

а) Докажите, что квадрат диаметра окружности равен сумме квадратов противоположных сторон четырёхугольника.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{7}$.

60.2. Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол ABC на три равные части.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 6\sqrt{21}$.

60.3. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

60.4. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N , причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках C, N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

60.5. (ОММО 2013, №4) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

60.6. (ОММО 2010, №7) Вершины K, L, M, N четырёхугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырёхугольника $KLMN$, если известно, что $AK = 2$, $BK = 4$ и $AN = ND$.

60.7. (ОММО 2014, №4) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

60.8. (ОММО 2015 №4) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов AD и BC.

60.9. (ОММО 2016 №4) В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

60.10. (ОММО 2017 №4) Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

60.11. (ОММО 2015 №7) Прямая c задаётся уравнением $y = x + 1$. Точки A и B имеют координаты $A(1; 0)$ и $B(3; 0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Урок №61. Теория чисел. Чётность. Основная теорема арифметики. Признаки делимости.

61.1. На квадратной доске $(2n+1) \times (2n+1)$ расположены 2017 шашек, причём для любой из шашек есть симметричные относительно каждой из главных диагоналей (если шашка лежит на диагонали, то она в том числе отображается сама в себя). Докажите, что одна из шашек должна располагаться в центральной клетке.

61.2. На доске написано 2017 целых чисел от 1 до 2017. Каждым ходом Дормидонт стирает с доски два числа и записывает на доску модуль их разности. Может ли последнее оставшееся на доске число равняться нулю?

61.3 (Турнир городов. Весенний тур. 2010-2011.8-9.1). По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочерёдно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.

61.4 (ОММО 2011, №3). Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и блокнот — на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит чётное число рублей? Каждый из этих предметов стоит целое число рублей.

61.5. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно а) 1980; б) 1990; в) 2000; г) 2018?

61.6. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников 2009 года, задача №1) Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

61.7. («Математический праздник» — 1995.7.1) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

61.8. («Математический праздник» — 1996.7.6) Произведение последовательных чисел от 1 до n называется *n-факториал* и обозначается $n!$ $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!)$. Можно ли вычеркнуть из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

61.9. Может ли число, составленное из 13 единиц, 13 двоек и 13 троек, быть полным квадратом?

61.10. Найдите четырёхзначное число, являющееся полным квадратом, первые 2 цифры которого равны между собой и последние 2 тоже.

61.11. Найдите наибольшее четырёхзначное число, делящееся на 2, 5, 9 и 11, все цифры которого различны.

61.12. (ОММО 2013, №3) Докажите, что число $2^{2014}+1$ можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.

61.13. (ОММО 2015, №3) Четырёхзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N.

61.14. (ОММО 2017, №3) Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 24z + 2017$. Найдите все возможные тройки чисел (x, y, z).

61.15. По кругу посажены 19 кустов ландышей.

а) Докажите, что обязательно найдутся два соседних куста, общее количество колокольчиков на которых чётно.

б) Всегда ли можно найти два соседних куста, общее количество колокольчиков на которых кратно 3?

61.16. Дано трёхзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 89?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 86?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

61.17. а) Может ли произведение двух различных натуральных чисел оказаться в 5 раз больше, чем разность этих чисел?

б) Может ли произведение двух различных натуральных чисел оказаться в 5 раз больше, чем разность квадратов этих чисел?

в) Найдите все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых в 5 раз больше, чем сумма попарных произведений его цифр.

61.18. Коля умножил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число и получил произведение, равное m. Вова умножил некоторое чётное натуральное число на соседнее чётное натуральное число и получил произведение, равное n.

а) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел m и n?

61.19. а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

61.20. Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 23$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 23$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 83$?

Урок №62. Теория чисел. Сравнение по модулю. НОД. НОК. Простые числа. Дроби.

Один из мощнейших инструментов для решения задач в целых числах — модульная арифметика.

Определение. Говорят, что числа a и b сравнимы по модулю x, если их разница делится на x. Записывают это следующим образом:

$$a \equiv b \pmod{x}, \text{ или } a = b \pmod{x}.$$

Нетрудно убедиться в равносильном утверждении.

Утверждение. Числа a и b сравнимы по модулю x, тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый остаток при делении на x.

Сравнивать по модулю можно также и отрицательные числа.

Например, $13 \equiv 7 \pmod{3}$ или $11 \equiv -3 \pmod{7}$.

Если $a \equiv 0 \pmod{x}$, то a делится на x.

Со сравнениями по модулю можно работать так же, как и с обычными равенствами: их можно складывать, умножать и возводить в степень.

Если $a \equiv b \pmod{x}$ и $c \equiv d \pmod{x}$, то

- $a + c \equiv b + d \pmod{x}$;
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{x}$;
- $a^n \equiv b^n \pmod{x}$ для любого натурального n.

Пусть полученное с помощью основной теоремы арифметики разложение чисел M и N на простые множители выглядит следующим образом:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \text{ и } M = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}.$$

Тогда их наибольший общий делитель равен

$$\text{НОД}(M, N) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}.$$

Наименьшее общее кратное чисел M и N равно

$$\text{НОК}(M, N) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}.$$

Отсюда, в частности, следует формула: $\text{НОК}(M, N) \cdot \text{НОД}(M, N) = M \cdot N$.

Иногда удобно применять *алгоритм Евклида* для нахождения НОД двух чисел: $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a-b,b)$, если $a > b$ (каждым его шагом будет вычитание из большего числа меньшего). Естественным его улучшением является *обобщённый алгоритм Евклида*, в котором числа не вычитаются, а делятся друг на друга с остатком. Например, $\text{НОД}(315,100) = \text{НОД}(100,15) = \text{НОД}(15,10) = \text{НОД}(10,5) = \text{НОД}(5,0) = 5$.

62.1. Найти остаток от деления $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^3$ на 7.

Решение. Найдём остаток от деления 2013 на 7. Разумеется, это можно сделать, использовав деление в столбик, но вспомним красивый факт: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, откуда число 2002 делится на 7, то есть $2002 \equiv 0 \pmod 7$, но $11 \equiv 4 \pmod 7$, откуда $2002 + 11 \equiv 0 + 4 = 4 \pmod 7$.

Значит, $2014 \equiv 5 \pmod 7$ и $2015 \equiv 6 \pmod 7$ $\Rightarrow$ $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \equiv 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \equiv 1 \pmod 7$. Так как $2016 \equiv 0 \pmod 7$, то $2016^3 \equiv 0^3 \pmod 7$.

Окончательно: $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^3 \equiv 1 + 0 = 1 \pmod 7$.

62.2. Доказать, что ни при каких целых n число $n^2 + 3n + 4$ не делится на 9.

Решение. Целое число может давать остатки 0,1,2,...,8 при делении на 9. Переберём все эти случаи. Для удобства запишем остатки в виде таблицы.

$n \pmod 9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 \pmod 9$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$3n \pmod 9$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
$n^2 + 3n + 4 \pmod 9$	4	8	5	4	5	8	4	2	2

Рассмотрим, например, случай, когда n даёт остаток 5 при делении на 9. Тогда $n \equiv 5 \pmod 9$, откуда

$$n^2 + 3n + 4 \equiv 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 25 + 15 + 4 \equiv 7 + 6 + 4 = 17 \equiv 8 \pmod 9.$$

Остальные случаи разбираются аналогично. Видим, что ни в одном случае не получился остаток 0, а это значит, что данное выражение не делится на 9 ни при каких целых n.

62.3. Может ли число, составленное из 13 двоек, 13 троек, 13 четвёрок и 13 пятёрок быть полным квадратом?

Решение. Докажем, что это невозможно. Так как речь в задаче идёт о числе, цифры которого известны, но не известен их порядок, воспользуемся признаком делимости на 3. Обозначим число за N.

Тогда сумма цифр числа N равна $13(2+3+4+5)$. По признаку делимости, получаем: $N \equiv 13 \cdot 14 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \pmod 3$.

Посмотрим, может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 по модулю 3, как и в предыдущей задаче, разберём случаи.

$x \pmod 3$	0	1	2
$x^2 \pmod 3$	0	1	1

Делаем вывод — квадрат натурального числа не может давать остаток 2 по модулю 3, значит, составить квадрат из всех данных цифр невозможно.

62.4. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$ (то есть, образуют «Пифагорову тройку»). Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

62.5. (Московская математическая олимпиада — 1949.7-8.4) Сколько существует таких пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, что $x^2 + y^2$ делится на 7.

62.6. (Московская математическая регата — 2011/2012.8.3) Сколько существует таких натуральных n, не превосходящих 2012, что сумма

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

оканчивается на 0?

62.7. (Московская математическая регата — 2012/2013.11.5) Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

62.8. Каким может быть число

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc},$$

если известно, что это целое число и a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа?

62.9. Если в выражение $n^2 + n + 41$ подставлять числа $n = 1, 2, 3, 4, 5$, то получатся простые числа 43, 47, 53, 61, 71. Верно ли, что при подстановке в это выражение любого натурального числа n получится простое число?

Решение. Встретив такую задачу на олимпиаде, вы можете ужаснуться, потому что не существует никаких явных признаков того, что число является простым (в то время, как доказать, что число не является простым, иногда бывает очень просто). Так вот — такая формулировка задачи и является для вас очевидной подсказкой — не стоит доказывать, что все числа такого вида простые, достаточно привести пример не простого числа.

Заметим, что первые 2 слагаемых делятся на n, а третье равно 41. Если мы возьмём n, делящееся на 41, сумма чисел будет делиться на 41, образуя контрпример, что завершает решение задачи.

62.10. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число и $p > 3$.

Решение. Применим формулу разности квадратов: $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Поскольку p — простое и $p > 3$, p — нечётное.

Возможные остатки от деления p на 4: 1 и 3. Тогда остатки чисел $p-1$ и $p+1$ от деления на 4 будут 2 и 0, то есть $(p-1)(p+1)$ гарантированно делится на 8.

Аналогично с остатками по модулю 3: остаток от деления p равен 1 или 2, раз оно простое и больше 3, но тогда одно из чисел $p-1$ или $p+1$ гарантированно делится на 3. То есть $(p-1)(p+1)$ делится и на 3, и на 8, но тогда оно, так как 3 и 8 — взаимно простые числа, делится и на 24.

62.11. («Математический праздник» — 2017.6.2) На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

62.12. Докажите, что дробь $\dfrac{1}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби только в том случае, если n в разложении на простые множители содержит только двойки и пятёрки.

62.13. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\dfrac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $\dfrac{1}{9}$?

62.14. (ОММО 2010, №1) Десятичная запись натурального числа n содержит 63 цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четвёрки, других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четвёрок. Найти остаток от деления числа n на 9.

62.15. (ОММО 2012, №3) Найдите последнюю цифру числа

$$7^{(2012^{2011})} - 3^{(12^{11})}.$$

62.16. (ОММО 2014, №2) Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше 1. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше 2014.

62.17. Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{8}{25}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем значение выражения $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 6d$?

62.18. а) Пусть произведение восьми различных натуральных чисел равно A, а произведение этих же чисел, увеличенных на 1, равно B. Найдите наибольшее значение $\dfrac{B}{A}$.

б) Пусть произведение восьми натуральных чисел (не обязательно различных) равно A, а произведение этих же чисел, увеличенных на 1, равно B. Может ли значение выражения $\dfrac{B}{A}$ равняться 210?

в) Пусть произведение восьми натуральных чисел (не обязательно различных) равно A, а произведение этих же чисел, увеличенных на 1, равно B. Может ли значение выражения $\dfrac{B}{A}$ равняться 63?

62.19. Четыре натуральных числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

а) Могут ли все числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 9?

в) Найдите все возможные наборы чисел, среди которых ровно два числа равны.

62.20. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\dfrac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

62.21. а) Можно ли записать полный квадрат, использовав по 10 раз цифры 1, 2, 3?

б) Можно ли записать полный квадрат, использовав по 10 раз цифры 2, 3, 6?

в) Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

62.22. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

62.23. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из 10 пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Урок №63. Теория чисел. Доказательство от противного. Принцип Дирихле. Оценка+пример. Метод математической индукции. Инвариант.

Доказательство от противного

Название этого метода («Доказательство от противного»), в принципе, говорит само за себя. Это частный случай метода, известного как «доведение до абсурда» — «reductio ad absurdum» (лат.), или «апагогия».

Если в задаче требуется доказать некоторое утверждение A, мы будем предполагать, что оно неверное, то есть верно отрицание A. После этого каким-то образом нужно прийти к противоречию, что будет означать, что наше предположение было неверно, и задача решена.

63.1. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Принцип Дирихле

Одна из его популярных формулировок: «Если в N клетках сидит не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов». Воспользуемся методом «от противного» — предположим, что «это не так», то есть в каждой клетке сидит **менее** двух кроликов, то есть 1 или 0. Тогда в N клетках максимально будет сидеть $N \cdot 1 = N$ кроликов, что меньше, чем $N+1$. В большинстве англоязычной литературы этот принцип называется «pigeon principle» и формулируется для голубей.

Естественным обобщением можно считать следующее утверждение: «Если в N клетках сидит не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит хотя бы $k+1$ кроликов».

В действительности вы вряд ли встретите задачу, в которой и вправду придётся рассаживать кроликов по клеткам. В каждой конкретной задаче нужно понять, что играет роль кроликов, а что — роль клеток.

63.2. Дано 6 целых чисел. Доказать, что среди них можно выбрать два, разность которых делится на 5.

Решение. Числа, данные в условии задачи, намекают на то, что она решается с помощью принципа Дирихле. «Кроликов» должно быть на один больше, чем «клеток», а 6 на один больше, чем 5. Следовательно «кроликами» являются сами числа. Осталось понять, каким образом выбираются «клетки».

«Клеток» должно быть 5 штук, а в условии задачи идёт речь о делимости на 5. Возможных остатков при делении на 5 как раз ровно 5 штук: 0, 1, 2, 3, 4. То есть мы сажаем «кролика»-число в «клетку»-остаток при делении на 5. По принципу Дирихле какие-то два «кролика» сидят в одной «клетке» — значит, какие-то два числа имеют одинаковый остаток при делении на 5, а это значит, что их разность делится на 5.

63.3. Числа от 1 до 9 разбили на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп произведение чисел будет не меньше, чем 72.

Решение. Воспользуемся принципом «от противного». Пусть то, что требуется доказать, не верно. Это значит, что в каждой группе произведение будет меньше 72, что равносильно меньше или равно 71. Но 71 — число простое, то есть оно не может быть произведением указанных чисел. Отсюда следует, что произведение всех чисел меньше либо равно 70^3. С другой стороны, произведение всех чисел равно $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 = (3\cdot4\cdot6)\cdot(2\cdot5\cdot7)\cdot(8\cdot9) = 72\cdot70\cdot72$, что больше, чем 70^3. Полученное противоречие завершает решение задачи.

63.4. Докажите, что среди любых шести человек обязательно будут либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение. В данном случае «кролики» — это люди. «Клетки» — это знакомства или незнакомства. Представим 6 людей в виде точек на плоскости и будем соединять две точки красным отрезком, если соответствующие люди знакомы, иначе — синим. Задача сводится к тому, чтобы доказать существование хотя бы одного треугольника. Рассмотрим произвольную точку. Она должна быть соединена одним из отрезков с каждой из оставшихся 5 точек. По принципу Дирихле не менее, чем с тремя точками, она будет соединена отрезком одного цвета (допустим, красным). Тогда, если какие-то две точки из них соединены также красным отрезком, то мы увидим красный треугольник. В противном случае эти три точки образуют синий треугольник.

63.5. Докажите, в любой компании найдутся двое с одинаковым числом знакомых из этой компании.

Решение. Снова найдём «кроликов» и «клетки». Нетрудно догадаться, что в качестве «кроликов» будут выступать люди, а в качестве «клеток» — количество их знакомств. У любого человека может быть от 0 до $n-1$ знакомых, где n — количество людей в компании. Значит клетки будут иметь номера от 0 до $n-1$. Казалось бы — и «клеток», и «кроликов» — поровну, так что же, принцип Дирихле тут не работает? Работает, но с небольшой модификацией. Заметим, что в клетках 0 и $n-1$ не могут одновременно сидеть кролики. Действительно, тогда будет человек, который не знаком ни с кем, и человек, который знаком со всеми, чего не может быть. Следовательно, непустых клеток, оказывается, у нас $N-1$. То есть, принцип Дирихле в данной задаче всё же сработал.

Полученное противоречие завершает решение задачи.

Оценка+пример

Данная тема стоит некоторым «особняком» в олимпиадной математике: по сути, это даже не отдельная тема — задача на практически любую тему может быть на оценку+пример.

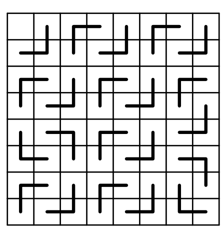
Обнаружить данную тему помогут слова «наибольшее» или «наименьшее» в условии задачи. Например, задача может быть такого типа: найдите наибольшее число, которое обладает заданным свойством. Что подразумевает решение такой задачи? Зачастую приходится видеть решения подобного типа: «это число подходит», далее идёт доказательство, что оно подходит, и на этом решение заканчивается. Но требовалось найти именно наибольшее число, а не любое подходящее. Приведённая часть решения называется примером. Но требуется также доказать и оценку, что данное число действительно наибольшее. Обычно по критериям за пример ставят менее половины баллов, но человек уже думает, что решил задачу, и переходит к следующей, потеряв остальные баллы.

Гораздо обиднее обратная ситуация, когда была доказана оценка, а пример человек счёл очевидным и вообще не стал про него писать. К сожалению, по критериям выставления оценок проверяющий не может поставить за такое решение полный балл.

63.6. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

Решение. Оценка. В квадрате 64 клетки. Поэтому вырезать 22 и более уголков не получится: ведь тогда суммарное число клеток в них будет не меньше $22 \cdot 3 = 66$. Значит, число уголков не больше 21.

Пример. Вырезать 21 уголок можно — пример приведён на рисунке ниже.



Следовательно, наибольшее возможное количество уголков равно 21. Логика рассуждения ясна: мы показали, что количество уголков не превосходит числа 21 (**оценка**) и иногда ему равно (**пример**). Значит, 21 и есть максимум числа уголков.

63.7. Каким наименьшим числом монет в 3 и 5 копеек можно набрать сумму 37 копеек?

Решение. Если число монет не превосходит семи, то сумма окажется не более $7 \cdot 5 = 35$ копеек. Поэтому семи и менее монет нам не хватит. Предположим, что монет восемь. Все они не могут быть пятикопеечными ($8 \cdot 5 = 40$). Семь пятикопеечных монет и одна трёхкопеечная дают в сумме 38 копеек. Если же пятикопеечных монет не более шести, то сумма не превосходит $6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 36$ копеек. Значит, восемью монетами набрать 37 копеек также не получается. Итак, монет должно быть не менее девяти. Приведём пример подходящего набора из девяти монет: пять пятикопеечных и четыре трёхкопеечных

$$5 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 37.$$

Следовательно, наименьшее возможное число монет равно девяти.

Обратите внимание: вы никому не обязаны объяснять, как вы додумались до примера! При записи решения пример достаточно просто привести (и показать, если это неочевидно, что он подходит). Описывать, из каких соображений ваш пример построен, не нужно.

63.8. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников 2018 года, задача №3) Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в гирлянде, если всего лампочек 50?

Метод математической индукции

Метод математической индукции используется для доказательства цепочки утверждений, при которых каждое следующее утверждение доказывается из предыдущего:

$$Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to \ldots \to Y_n \to Y_{n+1} \to \ldots$$

Первое утверждение называется *базой индукции.*

Каждая стрелка — индукционный переход: если истинно n-е утверждение и корректен переход, то истинно и $n+1$-е утверждение. Таким образом, индукция работает следующим образом: из первого утверждения следует второе, из второго — третье, и так далее, вплоть до любого n. При этом обычно корректность всех переходов доказывается единым образом.

63.9. (Шень, Математическая индукция.) Доказать с помощью математической индукции, что (при любом $n \geqslant 1$):

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. База индукции: $n = 1$. Очевидно, что

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Переход: используя утверждение

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

докажем, что

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Действительно, так как $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$, прибавим к обеим частям части $n + 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Инвариант

Пусть в задаче присутствует некоторый «процесс», например, на доске заданы числа, которые можно менять по какому-то правилу, или позиция, из которой можно делать некоторые ходы. Можно сказать, что это игра, в которой участвует один игрок. Именно по таким признакам можно определить, что задача именно на инвариант, а не на другую тему.

Определение: ***Инвариант*** — это математическая величина или математическое свойство, которое остаётся постоянным, то есть не изменяется при некотором преобразовании.

Зачастую инвариантом является чётность (остаток при делении на 2) или остаток от деления на какое-либо число комбинации некоторых чисел, связанных с данной задачей. Рассмотрим одну из типичных задач на инвариант.

63.10. На доске написано 6 чисел — 3, 14, 15, 9, 2, 6. За одну операцию к любым двум числам можно прибавить 1. Можно ли сделать все числа одинаковыми?

Решение. При взгляде на условие задачи первой идеей будет пытаться увеличивать маленькие числа, чтобы они достигли больших. Но, немного помучившись, мы легко уравняем пять чисел, а вот шестое будет от них отличаться. Использовать перебор для решения задачи не получится, так как случаев бесконечно много (вдруг они, например, уравняются в миллионе). Доказать, что это сделать невозможно, поможет принцип инварианта.

Как найти инвариант? Нужно проследить некоторую закономерность. Что не поменялось, если к двум числам была прибавлена единица? Нетрудно понять, что сумма всех чисел увеличится на 2, поэтому сумма — **не** инвариант. Но мы знаем, что если к числу прибавить 2, то его чётность не изменится. Таким образом, чётность суммы всех чисел всегда остаётся неизменной и равной тому, чему она была вначале. А какая она была? Так как среди чисел $3, 14, 15, 9, 2$ и 6 нечётное число нечётных чисел, то и сумма всех чисел будет нечётной. Но ведь нам нужно, чтобы все числа стали равными друг другу, следовательно, их сумма должна делиться на 6 (их количество), то есть должна быть чётной. Отсюда и следует то, что эти числа невозможно сделать равными.

63.11. По кругу записаны числа $1, 2, 3, 2, 2, 0$. За один ход можно к любым двум соседним числам прибавить по единице. Можно ли все числа сделать равными?

63.12. (ОММО 2011, №2) Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:

— Прибавить по баллу за каждый экзамен.

— За один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

63.13. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 34, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 9 до 20 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 1, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

63.14. Каждое из чисел $2, 3, \ldots, 7$ умножают на каждое из чисел $13, 14, \ldots, 21$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Урок №64. Сложные уравнения и неравенства.

64.1. (ОММО 2010, №8) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

64.2. (ОММО 2011, №8) Решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61, \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$$

64.3. (ОММО 2011, №10) Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству:

$$(|x| + |4 - |y|| - 4)^2 \leqslant 4.$$

Нарисуйте фигуру W и найдите её площадь.

64.4. (ОММО 2012, №6) Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 3. \end{cases}$$

64.5. (ОММО 2013, №5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

64.6. (ОММО 2014, №5) Найдите все решения уравнения

$$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

64.7. (ОММО 2015, №5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10, \\ 10x^2 + 18xy + 8y^2 = 6. \end{cases}$$

64.8. (ОММО 2016, №5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

64.9. (ОММО 2017, №5) Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2 - 4xy = 0, \\ y + z + 2 - 4yz = 0, \\ z + x + 2 - 4zx = 0. \end{cases}$$

64.10. (ОММО 2011, №1) Решите уравнение

$$2|x-1|\sin x = x - 1.$$

64.11. (ОММО 2012, №5) Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(0;\pi)$.

64.12. (ОММО 2009, №10) Пусть x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leqslant 5, \\ y + 4x \leqslant -5, \\ 3y + 2x \geqslant -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать функция $x^2 + y^2$.

64.13. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

64.14. Решите уравнение

$$2 + \log_2^2\big(2 + |(x-2)(x-3)|\big) = 3^{\frac{5+4x-x^2}{9}}.$$

64.15. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 16x + 89}.$$

Урок №65. Планиметрия. Разные задачи.

65.1. Из точки M, взятой на окружности с центром в точке O, на диаметры AB и CD опущены перпендикуляры MK и MP соответственно.

а) Докажите, что существует точка, одинаково удалённая от точек M, O, P, K.

б) Найдите площадь треугольника MKP, если известно, что $\angle MKP = 30^\circ$, $\angle AOC = 15^\circ$, а радиус окружности равен 4.

65.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и BP.

а) Докажите, что углы AKP и ABP равны.

б) Найдите длину отрезка PK, если известно, что $AB = 5, BC = 6, CA = 4$.

65.3. Хорда AB окружности параллельна касательной, проходящей через точку C, лежащую на окружности. Прямая, проходящая через точку C и центр окружности, вторично пересекает окружность в точке P.

а) Докажите, что треугольник ABP равнобедренный.

б) Найдите отношение, в котором хорда AB делит диаметр CP, если известно, что угол APB равен 150°.

65.4. В прямоугольном треугольнике ABC известно, что $BC = 2 \cdot AC$. На гипотенузе AB вне треугольника построен квадрат $ABEF$. Прямая CE пересекает AB в точке O.

а) Докажите, что $OA : OB = 3 : 4$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOE.

65.5. Окружность ω с центром в точке O касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений сторон AB и AC. Вписанная в этот треугольник окружность с центром в точке E касается стороны BC в точке K.

а) Докажите, что $BK = CM$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OKEM$, если известно, что $AC = 5, BC = 6, AB = 4$.

65.6. Высота равнобедренной трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) равна длине её средней линии.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите радиус окружности, касающейся сторон AB, BC и CD трапеции, если известно, что $BC = 4, AD = 6$.

65.7. В треугольнике ABC $BA = 8, BC = 7$, угол B равен $120°$. Вписанная в треугольник окружность ω касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что $AM = BC$.

б) Найдите длину отрезка с концами на сторонах AB и AC, перпендикулярного AB и касающегося окружности ω.

65.8. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

65.9. Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E, F последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

65.10. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BA и BC в точках E и F.
а) Докажите что центр окружности, вписанной в треугольник BEF, лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.
б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $BE = 13$, $EF = 10$.

65.11. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

65.12. Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T. Точка O лежит внутри трапеции $ABCD$.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

65.13. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

65.14. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если угол CDB вдвое меньше угла ADB.

65.15. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

65.16. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в неё окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 75^\circ$.

65.17. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $CP = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 4$ и $BC = 7$.

65.18. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E. Окружности w_1 и w_2, вписанные в треугольники ABE и CBE, касаются прямой BE в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что $KM = \dfrac{1}{2} \cdot |CE - AE|$.

б) Определите, на сколько радиус окружности w_2 больше радиуса окружности w_1, если известно, что $AE = 9$, $CE = 15$, а радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4.

Урок №66. Теория чисел. Задачи на вычисление сумм. Последовательности. Прогрессии.

Задачи на вычисления суммы решаются «сворачиванием» суммы и/или применением известных соотношений:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

66.1. (ОММО 2015, №1) Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 3 : 2. Найдите количество членов этой прогрессии.

66.2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма её квадратов равна 48. Найдите сумму первых 10 членов этой прогрессии.

66.3. В арифметической прогрессии S_n — сумма первых n членов. Известно, что $S_n = S_m$ $(n \neq m)$. Найдите S_{n+m}.

66.4. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите $a_1 a_2 \dots a_n$, если $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$, а $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = Q$.

66.5. (ОММО 2013, №6) Пусть

$$S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1).$$

Найдите S_{2013} для $f_x = \dfrac{25^x}{25^x + 5}$.

66.6. Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$.

66.7. Найдите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

66.8. Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1 + 2a_3b_3 = 4a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1 + a_4b_4 = 3a_2b_2$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1 + a_4b_4 \leqslant 210$?

66.9. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, при всех натуральных $n \geqslant 2$.

а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 50S_1$?

б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 30S_2$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{S_4^2}{S_1S_8}$?

66.10. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

66.11. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ для всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n$?

Урок №67. Теория чисел. Разные задачи.

67.1. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5100.

а) Может ли быть записано число 250?

б) Можно ли обойтись без числа 11?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть на доске?

67.2. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

67.3. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принять сумма четырёх чисел на доске?

67.4. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

67.5. В ряд выписаны числа $1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «−» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 69$?

в) 0, если $N = 64$?

г) 5, если $N = 90$?

67.6. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше 37,05?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

67.7. Каждый из группы учащихся сходил в кино или театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $2/11$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $2/5$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б).

67.8. На доске написали несколько (не обязательно различных) двузначных натуральных чисел, не имеющих нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры.

а) Приведите пример чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел получиться ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

67.9. На доске написали 30 (не обязательно различных) натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое всех написанных чисел равно 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, вдвое меньшее первоначального. Числа, оказавшиеся после этого меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, стать больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, стать больше 12, но меньше 13?

в) Найдите максимальное возможное значение среднего арифметического оставшихся на доске чисел.

67.10. Ученики писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались трудными, всем участникам теста добавили по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Мог ли средний балл участников, не сдавших тест, понизиться?

б) Мог ли средний балл участников, сдавших тест, понизиться и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизиться?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест — 79. При каком минимальном числе участников теста возможна такая ситуация?

67.11. а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр десятичной записи которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

67.12. Три вещественных числа назовём замечательной тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три вещественных числа назовём прекрасной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной замечательной тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три прекрасные тройки?

в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое максимальное количество прекрасных троек может оказаться среди них?

67.13. Числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16$ произвольно делят на три непустые группы. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли получиться одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли получиться одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите минимальное возможное значение максимального из получаемых средних арифметических.

67.14. Бухгалтеру требуется выдать премии сотрудникам на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — натуральное число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 10 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий (не исключено, что кому-то премии вообще не выписали)?

67.15. На доске написаны 20 чисел: пять единиц, пять двоек, пять троек и пять четвёрок. Эти числа разбивают на две группы (в каждой группе не менее одного числа). Пусть среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, а среднее арифметическое чисел во второй группе равно B.

а) Может ли среднее арифметическое всех 20 чисел оказаться равным $\dfrac{A+B}{2}$?

б) Может ли среднее арифметическое всех 20 чисел оказаться меньше, чем $\dfrac{A+B}{2}$?

в) Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{A+B}{2}$.

67.16. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которые в сумме могли набрать девочки, если $m = 3, d = 2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$?

в) Каковы все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

Урок №68. Параметры. Разные задачи.

68.1. (ОММО 2012, №9) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |y| + ||x| - |y|| = 6, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

68.2. (ОММО 2013, №8) При каких значениях параметра a уравнение

$$5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$$

имеет хотя бы один целый корень?

68.3. (ОММО 2014, №8) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|\ln|x|| = ax$ имеет три решения.

68.4. (ОММО 2015, №8) При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(x+a) - 4(x+a)^2 + a = 0$$

имеет единственный корень?

68.5. (ОММО 2016, №8) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$$

имеет единственное решение?

68.6. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + ay - 5)(x + ay - 5a) = 0, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

68.7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 9|x-3| + 3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4a + 2|x - 2a - 3|$$

имеет хотя бы один корень.

68.8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$$

имеет ровно два различных корня.

68.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$$

не имеет действительных решений.

68.10. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$|x-2|=a\log_2|x-2|$$

имеет ровно два решения.

68.11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2xy+a}=x+y+5$$

не имеет корней.

68.12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|(x-1)^2+2^{1-a}\right|+|x-1|+(1-x)^2+2^{a-1}=4+4^a$$

имеет единственный корень. Найдите это решение для каждого значения a.

68.13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-8x=2|x-a|-16$$

имеет ровно три различных решения.

68.14. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множеством решения неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\leqslant 2$ является отрезок.

68.15. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\geqslant 0\\ ax>4\end{cases}$$

не имеет решений.

68.16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left((x+5)^2+y^2-a^2\right)\ln(9-x^2-y^2)=0\\ \left((x+5)^2+y^2-a^2\right)(x+y-a+5)=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

68.17. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big(|x-2|+|x-a|\big)^2+(a-30)\big(|x-2|+|x-a|\big)+90a-12a^2=0$$

имеет не менее четырёх различных решений.

68.18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=26(y\sin a-x\cos a)\\ x^2+y^2=26(y\cos 2a-x\sin 2a)\end{cases}$$

существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 24.

68.19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$$

имеет решения.

Ответы

Урок №1.

1.1. 11 этажей. **1.2.** 60. **1.3.** а, в, г, д. **1.4.** 1/3.
1.5. Правильная дробь. **1.6.** 24. **1.7.** Нет. **1.8.** Нет.
1.10. Одним нулём. **1.11.** Чётное, нечётное, чётное. **1.12.** 4.
1.13. Их произведение. **1.14.** $m \leqslant 0$. **1.15.** 3; 47952. **1.16.** 17.
1.17. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$.

Урок №2.

2.1. 1. **2.2.** 4. **2.3.** 160. **2.4.** 30. **2.5.** 5. **2.6.** 51. **2.7.** 37.
2.8. 108. **2.9.** 4. **2.10.** 82. **2.11.** 6. **2.12.** 120. **2.13.** 2,5. **2.14.** 2.
2.15. 56.

Урок №3.

3.1. 20. **3.2.** 15. **3.3.** 27. **3.4.** 530000. **3.5.** 190. **3.6.** 320000.
3.7. 35000. **3.8.** 10. **3.9.** 11. **3.10.** 47088. **3.11.** 1050; 2500.
3.12. 96. **3.14.** 20. **3.15.** 56. **3.16.** 1560000. **3.17.** 90. **3.18.** 1000.
3.19. 0,(5); 1,12. **3.20.** 7.

Урок №4.

4.6. 160. **4.7.** 5. **4.8.** 90. **4.9.** 20. **4.10.** 28. **4.11.** 10. **4.12.** 48.
4.13. 10. **4.14.** 23. **4.15.** 141,75. **4.16.** 45. **4.17.** 5. **4.18.** 42.
4.19. 76,5. **4.20.** 10. **4.21.** 14. **4.22.** 0,5. **4.23.** 12. **4.24.** 9.
4.25. 94. **4.26.** 4.

Урок №5.

5.2. $(5x-2)(6x-5c)$. **5.4.** $(b^2-5)(b^2+1)$. **5.5.** $(b+1)(b-4)$. **5.6.** 74.
5.7. 18. **5.8.** 943; 37; 45; 279. **5.9.** 10. **5.10.** 2. **5.11.** -2.
5.12. 6. **5.13.** 1. **5.14.** 15; $\frac{1}{15}$; 31; $\frac{22}{15}$. **5.15.** 1; 3; 5. **5.16.** $2q-5p$.
5.18. $(x-2k)(18xz-10ky)$. **5.19.** $\frac{a(5b-4a)}{2b}$. **5.20.** 200; 160.

5.21. 15; 10. **5.22.** 200. **5.23.** 2. **5.24.** 414. **5.25.** 0. **5.26.** -12.
5.27. 0,25.

Урок №6.

6.1. 148. **6.2.** 16. **6.3.** 42. **6.4.** 56. **6.5.** 3. **6.6.** 4. **6.7.** $6\sqrt{6}$.
6.8. 49. **6.9.** 31. **6.10.** 40. **6.11.** 32. **6.12.** 49. **6.13.** 61.
6.14. 1. **6.15.** 45. **6.16.** 36.

Урок №7.

7.1. 2. **7.2.** 12. **7.3.** 2. **7.4.** 2. **7.5.** 20. **7.6.** 4. **7.7.** 2. **7.8.** 0,25. **7.9.** 4. **7.10.** 1. **7.11.** 0. **7.13.** 38. **7.14.** $-\frac{16}{\sqrt{14}}$.

7.16. 1. **7.17.** 9. **7.18.** $a > b$. **7.19.** 2. **7.20.** 1. **7.21.** 3025. **7.22.** 0,25. **7.23.** 2. **7.24.** 5. **7.25.** 32. **7.26.** 243. **7.27.** 4.

Урок №8.

8.1. 8. **8.2.** 10. **8.3.** -8. **8.4.** 10. **8.5.** 5. **8.6.** 0. **8.7.** 6. **8.8.** 4,5. **8.9.** -1. **8.10.** 21. **8.11.** 12. **8.12.** 200. **8.13.** 8. **8.14.** -4. **8.15.** 8. **8.16.** 40. **8.17.** 45. **8.18.** 3. **8.19.** -6. **8.20.** -0,75. **8.21.** 6. **8.22.** 5. **8.23.** 5. **8.24.** 0. **8.25.** 12. **8.26.** -8. **8.27.** 10. **8.28.** 5.

Урок №9.

9.1. 2. **9.2.** 5; 7,5. **9.3.** $x \in \emptyset$. **9.4.** -6; 6. **9.5.** $\pm 2\sqrt{6}$. **9.6.** 0; 36. **9.7.** ± 4. **9.8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}+\sqrt{2}$. **9.9.** -1,5. **9.10.** -1. **9.11.** -1. **9.12.** 1; 7. **9.13.** -8; 1. **9.14.** $x \in \emptyset$. **9.15.** 17. **9.16.** -9; -8. **9.17.** 531. **9.18.** $x \in \emptyset$. **9.19.** 2. **9.20.** -47,5. **9.21.** -7; 1. **9.22.** 2. **9.23.** $x \in \emptyset$. **9.24.** 1,4. **9.25.** 0,8; 2. **9.26.** $x \in [1{,}4; +\infty)$. **9.27.** $x \in (-\infty; 1{,}4]$. **9.28.** 1. **9.29.** -2; 2. **9.30.** 25. **9.31.** 1. **9.32.** 50. **9.33.** 36. **9.34.** 7. **9.35.** 120. **9.36.** 1,4. **9.37.** 0,125. **9.38.** 2. **9.39.** 2. **9.40.** 20. **9.41.** 5000. **9.42.** 20. **9.43.** 4000. **9.44.** 18. **9.45.** 751. **9.46.** 180000. **9.47.** 0,71. **9.48.** 10. **9.49.** 7,3.

Урок №10.

10.1. 40. **10.2.** 30. **10.3.** 6. **10.4.** 60. **10.5.** 6. **10.6.** 110. **10.7.** 7. **10.8.** 46. **10.9.** 118. **10.10.** 150. **10.11.** 40. **10.12.** 4. **10.13.** 2. **10.14.** 24. **10.15.** 0,25. **10.16.** 3. **10.17.** 36. **10.18.** 36. **10.19.** 36. **10.20.** 100. **10.21.** 1. **10.22.** 35. **10.23.** 122. **10.24.** 122. **10.25.** 90. **10.26.** 52. **10.27.** 26. **10.28.** 20. **10.29.** 135. **10.30.** 22. **10.31.** 45. **10.32.** 2,5. **10.33.** 105. **10.34.** 3. **10.35.** 45.

Урок №11.

11.1. $x \in [-0{,}25; +\infty)$. **11.2.** $x \in \emptyset$. **11.3.** $x = 0$. **11.4.** $x \neq 0$. **11.5.** $x \in \mathbb{R}$. **11.6.** $x \in \emptyset$. **11.7.** $x \in \emptyset$. **11.8.** $x \in \mathbb{R}$. **11.9.** $x \in \mathbb{R}$. **11.10.** $x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$. **11.11.** $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

11.12. $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$. **11.13.** $x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

11.14. $x \in \emptyset$. **11.15.** $x = 0$. **11.16.** $x \neq 0$. **11.17.** $x \in \mathbb{R}$. **11.18.** $x \in \emptyset$. **11.19.** $x \in \emptyset$. **11.20.** $x \in \mathbb{R}$. **11.21.** $x \in \mathbb{R}$. **11.22.** $x \in (-5; 5)$. **11.23.** $x \in [-5; 5]$. **11.24.** $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

11.25. $x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. **11.26.** $x \in \emptyset$. **11.27.** $x = 0$. **11.28.** $x \in (0; +\infty)$. **11.29.** $x \in [0; +\infty)$. **11.30.** $x \in \emptyset$. **11.31.** $x \in \emptyset$.

11.32. $x \in [0; +\infty)$. **11.33.** $x \in [0; +\infty)$. **11.34.** $x \in [0; 25)$.

11.35. $x \in [0; 25]$. **11.36.** $x \in (25; +\infty)$. **11.37.** $x \in [25; +\infty)$.

11.38. $x \in [5; 7{,}5]$. **11.39.** $x \in (-\infty; 5) \cup (7{,}5; +\infty)$. **11.40.** $x \in \emptyset$.

11.41. $x \in \emptyset$. **11.42.** $x \in \mathbb{R}$. **11.43.** $x \in \mathbb{R}$. **11.44.** $x = 5$.

11.45. $x \in \emptyset$. **11.46.** $x \neq 5$. **11.47.** $x \in \mathbb{R}$. **11.48.** $x \in (-\infty; 0) \cup (36; +\infty)$.

11.49. $x \in (-\infty; 1] \cup [7; 12)$. **11.50.** $x \in (-\infty; -8) \cup (-\frac{7}{5}; -\frac{5}{7}) \cup (1; +\infty)$.
11.51. 1,8. **11.52.** 90. **11.53.** 2. **11.54.** 4. **11.55.** 6. **11.56.** 30.
11.57. 5. **11.58.** 2. **11.59.** 400. **11.60.** 2,5. **11.61.** 5. **11.62.** 390.
11.63. 0,2. **11.64.** 30.

Урок №12.

12.1. 8. **12.2.** 24. **12.3.** 2. **12.4.** 1. **12.5.** 22,5. **12.6.** 9. **12.7.** 50.
12.8. 2. **12.9.** 5. **12.10.** 30. **12.11.** 13. **12.12.** 3. **12.13.** 48.
12.14. 8. **12.15.** 2. **12.16.** 30. **12.17.** 6. **12.18.** 8. **12.19.** 1.
12.21. $\frac{S}{25}$. **12.22.** 25; 25; 10. **12.23.** 8. **12.24.** 6. **12.25.** 0,5.
12.26. 12. **12.27.** 4. **12.28.** 1. **12.29.** 48. **12.30.** 10,5. **12.31.** 8.
12.32. 2. **12.33.** 96. **12.34.** 6. **12.35.** 30. **12.36.** 6. **12.37.** 1,5.
12.38. 1. **12.39.** 4.

Урок №13.

13.1. 1. **13.2.** 4. **13.3.** 32. **13.4.** 45. **13.5.** 90. **13.6.** 12.
13.7. 25. **13.8.** 80. **13.9.** 240. **13.10.** 22. **13.11.** 70. **13.12.** 38,4.
13.13. 88. **13.14.** 5. **13.15.** 6. **13.16.** 300. **13.17.** 240. **13.18.** 70.
13.19. 90. **13.20.** 108. **13.21.** 1. **13.22.** 3. **13.23.** 42. **13.24.** 8.
13.25. 11. **13.26.** 20. **13.27.** 59. **13.28.** 10. **13.29.** 616. **13.30.** 70.
13.31. 600. **13.32.** 400. **13.33.** 4. **13.34.** 50. **13.35.** 800. **13.36.** 4.
13.37. 4.

Урок №14.

14.1. 0,48. **14.2.** 0,25. **14.3.** 1. **14.4.** 0,5. **14.5.** 17,5. **14.6.** 0,25.
14.7. 3. **14.8.** -0,5. **14.9.** 0,5. **14.10.** 7. **14.11.** 5. **14.12.** 2.
14.13. -1. **14.14.** 0,5. **14.15.** 0,8. **14.16.** 0,28. **14.17.** 0,7.
14.18. 5. **14.19.** -0,25. **14.20.** 8,4. **14.21.** 18. **14.22.** 0,7.
14.23. 21. **14.24.** 1. **14.25.** 15. **14.26.** 2. **14.27.** 28. **14.28.** 3.
14.29. 25.

Урок №15.

15.1. -4; -11; -18; -25; -32. **15.2.** -3; 1; -3; 1; -3; 1. **15.3.** 5.
15.5. $-1; 3; \ldots$ **15.6.** 65422. **15.8.** $\frac{96}{2^{n-1}}$. **15.9.** 3; 9; 27.

15.10. 1; 5; 25. **15.11.** 2. **15.12.** 40500000001. **15.13.** 16. **15.14.** 8. **15.15.** 18. **15.16.** 18. **15.17.** 30. **15.18.** 320000. **15.19.** 35000.

Урок №16.

16.1. 1,5. **16.2.** 5. **16.3.** 3. **16.4.** 1. **16.5.** 6. **16.6.** 18. **16.7.** 2.

Урок №17.

17.1. 10. **17.2.** 20. **17.3.** 100. **17.4.** 9. **17.5.** 60. **17.6.** 18. **17.7.** 9. **17.8.** 10. **17.9.** 24. **17.10.** 25. **17.11.** 16. **17.12.** 1; 7. **17.13.** Объёмы равны. **17.14.** Нет. **17.15.** 6. **17.16.** 25. **17.17.** 5. **17.18.** 21. **17.19.** 8. **17.20.** 9. **17.21.** 6. **17.22.** 30. **17.23.** 8,4.

Урок №18.

18.1. 3. **18.2.** 340. **18.3.** 144. **18.4.** 12. **18.5.** 9. **18.6.** 48. **18.7.** 10. **18.8.** 4. **18.9.** 1. **18.10.** 6. **18.11.** 240. **18.12.** 3. **18.13.** 96. **18.14.** 12. **18.15.** 4. **18.16.** 4. **18.17.** 1,5. **18.18.** 18. **18.19.** 60. **18.20.** 48. **18.21.** 4,5. **18.22.** 13,5. **18.23.** 60. **18.24.** 54. **18.25.** 2. **18.26.** 4. **18.27.** 13. **18.28.** 9. **18.29.** 10. **18.30.** 3. **18.31.** 4. **18.32.** 13. **18.33.** 128. **18.34.** 5. **18.35.** 72. **18.36.** 24. **18.37.** 4,5. **18.38.** 3. **18.39.** 288. **18.40.** 4. **18.41.** 3. **18.42.** 5. **18.43.** 1,5. **18.44.** 64. **18.45.** 2,25. **18.46.** 7. **18.47.** 2. **18.48.** 10. **18.49.** 12. **18.50.** 3. **18.51.** 144. **18.52.** 256. **18.53.** 24. **18.54.** 2.

Урок №19.

19.1. 6. **19.2.** -21. **19.3.** 5. **19.4.** -16. **19.5.** 18. **19.6.** 14. **19.7.** 6. **19.8.** 22,08. **19.9.** 4. **19.10.** 0,6. **19.11.** 7. **19.12.** -4. **19.13.** -9. **19.14.** 8. **19.15.** 6. **19.16.** 1. **19.17.** -28. **19.18.** 4. **19.19.** 10. **19.20.** а) +; б) -. **19.21.** 1.

Урок №20.

20.1. 3. **20.2.** 60. **20.3.** 17. **20.4.** 0,6. **20.5.** 60. **20.6.** 45. **20.7.** 84. **20.8.** 7. **20.9.** 96. **20.10.** 1,5. **20.11.** 124. **20.12.** 7,5. **20.13.** 1080. **20.14.** 1,5. **20.15.** 0,95. **20.16.** 0,6. **20.17.** 30. **20.18.** 27. **20.19.** 6. **20.20.** 50. **20.21.** 45. **20.22.** 5. **20.23.** 2. **20.24.** 60. **20.25.** 60. **20.26.** 60. **20.27.** 60. **20.28.** 60. **20.29.** 1,5. **20.30.** 2. **20.31.** 152. **20.32.** 10. **20.33.** 6. **20.34.** 30. **20.35.** 3.

Урок №21.

21.1. 96. **21.2.** 432. **21.3.** 3612. **21.4.** 190. **21.5.** 276; 12144. **21.6.** 720; 60. **21.7.** 0,5. **21.8.** 0,14. **21.9.** 0,156. **21.10.** 0,5. **21.11.** 0,35. **21.12.** 0,35. **21.13.** 0,25. **21.14.** 0,5. **21.15.** 0,13. **21.16.** 0,4. **21.17.** 0,0625. **21.18.** 0,2. **21.19.** 0,498. **21.20.** 0,25. **21.21.** 4. **21.22.** 0,06. **21.23.** 0,02. **21.24.** 0,17. **21.25.** 0,3. **21.26.** 0,1. **21.27.** 0,25. **21.28.** 0,9. **21.29.** 0,2. **21.30.** 0,2. **21.31.** 0,5. **21.32.** 0,12. **21.33.** 0,11. **21.34.** 0,64.

Урок №22.

22.1. 152. **22.2.** 56. **22.3.** 5. **22.4.** 572. **22.5.** 31,5. **22.6.** 450. **22.7.** 3. **22.8.** 4. **22.9.** 10. **22.10.** 12. **22.11.** 1,125. **22.12.** 4. **22.13.** 2. **22.14.** 5. **22.15.** 125. **22.16.** 1,28. **22.17.** 0,9025. **22.18.** 4. **22.19.** 36. **22.20.** 7. **22.21.** 9. **22.22.** 10. **22.23.** 3. **22.24.** 24. **22.25.** 12. **22.26.** 2. **22.27.** 48. **22.28.** 120. **22.29.** 0,25. **22.30.** 39304. **22.31.** 0,25. **22.32.** 16. **22.33.** 184. **22.34.** 12. **22.35.** 60. **22.36.** 4,5. **22.37.** 4. **22.38.** 3. **22.39.** 1,5. **22.40.** 9. **22.41.** 4. **22.42.** 665,5. **22.43.** 9. **22.44.** 15. **22.45.** 8. **22.46.** 36. **22.47.** 4. **22.48.** 36. **22.49.** 3.

Урок №23.

23.1. 0,019. **23.2.** 0,52. **23.3.** 0,52. **23.4.** 0,91. **23.5.** 0,08. **23.6.** 0,75. **23.7.** 0,0296. **23.8.** 0,36. **23.9.** 0,25. **23.10.** 0,0545. **23.11.** 0,392. **23.12.** 0,13. **23.13.** 0,38. **23.14.** 0,93. **23.15.** 0,02. **23.16.** 0,408. **23.17.** 0,4. **23.18.** 0,5. **23.19.** 0,07. **23.20.** 0,035. **23.21.** 0,006. **23.22.** 0,4. **23.23.** 0,5. **23.24.** 0,48. **23.25.** 0,33. **23.26.** 0,32. **23.27.** 5. **23.28.** 0,33. **23.29.** 0,375. **23.30.** 0,6. **23.31.** 0,9975. **23.32.** 0,027. **23.33.** 0,8836. **23.34.** 0,6. **23.35.** 0,1. **23.36.** 0,98.

23.37. 0,05. **23.38.** 5. **23.39.** 0,2. **23.40.** 1,05. **23.41.** 0,3. **23.42.** 0,5. **23.43.** 0,125. **23.44.** 0,63. **23.45.** 0,42. **23.46.** 1,2. **23.47.** 0,25. **23.48.** 0,8.

Урок №24.

24.1. 0,7. **24.2.** 90. **24.3.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **24.4.** $\sqrt{2}$. **24.5.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
24.6. б) $\frac{2\sqrt{15}}{7}$. **24.7.** б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{34}}{2}$. **24.8.** б) $\arccos\frac{5}{16}$. **24.9.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.
24.10. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **24.11.** $\arccos\frac{1}{6}$.

Урок №25.

25.1. π. **25.6.** -8. **25.7.** 61. **25.8.** -10 **25.9.** -15 **25.10.** 0,15
25.11. 1 **25.12.** 16 **25.13.** 4

Урок №26.

26.1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **26.2.** $\sqrt{7}$. **26.3.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **26.4.** $\frac{3\sqrt{39}}{13}$. **26.5.** б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
26.6. б) 2. **26.7.** б) $\frac{2\sqrt{43}}{3}$. **26.8.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **26.9.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **26.10.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
26.11. а) 48; б) $\frac{36}{\sqrt{111}}$.

Урок №27.

27.1. -4. **27.2.** -1. **27.3.** 0,5. **27.4.** 30. **27.5.** 30. **27.6.** 50.
27.7. 30. **27.8.** 30. **27.9.** 15. **27.10.** 60. **27.11.** 60. **27.12.** 60.
27.13. 30. **27.14.** 60. **27.15.** 45. **27.16.** 60. **27.17.** 0,0025.
27.18. 0,67.

Урок №28.

28.1. $\frac{1}{7}$. **28.2.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **28.3.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **28.4.** $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **28.5.** $2\sqrt{2}$.
28.6. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **28.7.** б) $\frac{21\sqrt{39}}{25}$. **28.8.** б) $\frac{27\sqrt{39}}{7}$. **28.9.** б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.
28.10. б) $\arccos\frac{1}{7}$. **28.11.** б) $\frac{6\sqrt{2}-6}{7}$. **28.12.** $\sqrt{2}$. **28.13.** 90.
28.14. $\frac{1}{\sqrt{33}}$. **28.15.** $\frac{7}{11}$. **28.16.** 0,6.

Урок №29.

29.1. 2. **29.2.** $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. **29.3.** $-1; \frac{1}{5}; 5$. **29.4.** $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$. **29.5.** $-1; \frac{\pm3\pm\sqrt{5}}{2}$.
29.6. $\frac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$. **29.7.** -9; -1. **29.8.** 1; 16. **29.9.** 1. **29.10.** -1.
29.11. $(2;3)$. **29.12.** $0; \sqrt[3]{2}$. **29.13.** 0,5. **29.14.** ±4. **29.15.** $-3; 5$.
29.16. $x \in (-\infty;-5] \cup [\frac{11-\sqrt{233}}{2}; 4] \cup [\frac{11+\sqrt{233}}{2}; +\infty)$.

29.17. $\{-3\} \cup [3;+\infty)$. **29.18.** 1; 5. **29.19.** 1; -7. **29.20.** 2. **29.21.** 2.
29.22. 3. **29.23.** 2; -4. **29.24.** 1. **29.25.** $-3; \frac{3}{2}$. **29.26.** $\frac{9}{7}$.
29.27. 3. **29.28.** 1. **29.29.** -1,6; 2. **29.30.** 2. **29.31.** $\frac{-3\pm\sqrt{14}}{2}; 1; 1{,}5$.
29.32. а) 1; 4; 9 б) 4. **29.33.** [4; 8].

Урок №30.

30.1. 45. **30.2.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **30.3.** $6\sqrt{6}$. **30.4.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **30.5.** б) 54. **30.6.** б) 30°. **30.7.** 45°. **30.8.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **30.9.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **30.10.** б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Урок №31.

31.1. 294. **31.2.** -0,5. **31.3.** -3. **31.4.** 2. **31.5.** 4. **31.6.** 81. **31.7.** 1. **31.8.** 6. **31.9.** 1. **31.10.** 0. **31.11.** -1. **31.12.** 64. **31.13.** 2. **31.14.** -14. **31.15.** 3.

Урок №32.

32.1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **32.2.** 50. **32.3.** $\frac{1}{4}$. **32.4.** $\sqrt{3}$. **32.5.** б) 1,5. **32.6.** б) $\frac{3\sqrt{30}}{5}$. **32.7.** б) $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **32.8.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **32.9.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **32.10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **32.11.** б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **32.12.** б) $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Урок №33.

33.1. $\log_{\frac{2}{3}} 3$. **33.2.** $1 \pm \sqrt{2}$. **33.3.** $2; \log_2 7$. **33.4.** $\log_2(6 \pm \sqrt{35})$. **33.5.** $-\log_2 3; 0$. **33.6.** $\log_{\frac{3}{2}} 3; \log_{\frac{3}{2}} 4$. **33.7.** $\log_{2+\sqrt{3}}(1 \pm \sqrt{2})$. **33.8.** 0. **33.9.** 3. **33.10.** $x \in \{-1\} \cup [0; \log_2 15 - 1] \cup (3; \log_2 15)$. **33.11.** {-1;2,5;3,5}. **33.12.** 0. **33.13.** $x \in [-3; -2) \cup (-2; -\log_2 3) \cup \{0\} \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$.

33.14. а) 1; $\log_{2015} 2016$; б) 1. **33.15.** $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

33.16. а) $x \in \emptyset$; б) $x \in \emptyset$; в) 27; г) $x = 24 + \log_9 25$; д) $x = 24 + \log_{0,4} 25$; е) 26; ж) 3,25; з) -2. **33.17.** а) $x \in \emptyset$; б) $x \in \mathbb{R}$; в) $x \in \emptyset$; г) $x \in \mathbb{R}$; д) $\in (-\infty; 27)$; е) $x \in (-\infty; 24 + \log_9 25)$; ж) $x \in (-\infty; 26]$. **33.18.** 2. **33.19.** $x \in (-\infty; \log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{2} - 1))$.

Урок №34.

34.1. $8\sqrt{5}$. **34.2.** 0,25. **34.3.** $1\frac{5}{16}$. **34.4.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. **34.5.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **34.6.** $\frac{\pi}{4}$. **34.7.** 96. **34.8.** б) 399. **34.9.** б) $12 + 6\sqrt{3}$. **34.10.** б) $3\sqrt{15}$. **34.11.** 12. **34.12.** б) $\frac{5\sqrt{291}}{4}$. **34.13.** б) $2\sqrt{95}$. **34.14.** б) $12\sqrt{3}$. **34.15.** 144. **34.16.** б) $\frac{30}{\sqrt{86}}$. **34.17.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **34.18.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **34.19.** 24. **34.20.** 12π. **34.21.** π. **34.22.** а) 5 : 1; б) $2\sqrt{14}$.

Урок №35.

35.1. -3; 2. **35.2.** $\sqrt{2}; 4$. **35.3.** $3^{\pm 2\sqrt{3}}$. **35.4.** 100; 0,1. **35.5.** 10. **35.6.** 3. **35.7.** 3. **35.8.** 3. **35.9.** -5.

35.10. а) 1; $\frac{\sqrt{3}}{8}$; б) нет таких.

35.11. $x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 6) \cup (6; +\infty)$.

35.12. $x \in (2 - \sqrt{2}; 1] \cup [3; 2 + \sqrt{2})$. **35.13.** $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

35.14. -1. **35.15.** $x \in (0{,}5; 1)$. **35.16.** $x \in (-1; 1] \cup [3; 5)$.

35.17. а) 24; б) 4; в) $x \in \emptyset$; г) -19,25; д) 17/6; е) 2; ж) 12; з) 6.

35.18. а) $x \in (-8; 24)$; б) $x \in [4; 7)$; в) $x \in (17; +\infty)$; г) $x \in (5; 6) \cup (12; +\infty)$.

35.19. а) $\sqrt{2}; 4$; б) 4. **35.20.** 2. **33.21.** 30. **35.22.** 2.

Урок №36.

36.1. 0,7. **36.2.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **36.3.** $\arccos\frac{1}{6}$. **36.4.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$. **36.5.** $2\sqrt{2}$.
36.6. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **36.7.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **36.8.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **36.9.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **36.10.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
36.11. $\sqrt{2}$. **36.12.** 0,6. **36.13.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

Урок №37.

37.1. $x \in (-\infty; 1] \cup (2; 3)$. **37.2.** $x \in [2; 4)$. **37.3.** $x \in \{-2\} \cup [2; 3{,}5)$.
37.4. $x \in [5; 6]$. **37.5.** $x \in (-\infty; 2]$. **37.6.** $x \in [0{,}5; +\infty)$.
37.7. $x \in [1{,}4; +\infty)$. **37.8.** $x \in (-\frac{6}{5}; \frac{2}{7})$. **37.9.** $x \in [2; 3]$.
37.10. $x \in [-0{,}4; -\frac{1}{3}] \cup [0{,}5; 1]$. **37.11.** $x \in (2; 2{,}5]$.
37.12. $x \in (-\infty; -4] \cup \{4\}$. **37.13.** $x \in \{-2\}$. **37.14.** $x \in \{0\} \cup [1; 2]$.
37.15. $x \in [-31{,}5; -7)$. **37.16.** $x \in \mathbb{R}$. **37.17.** $x \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.
37.18. $x \in (2; +\infty)$. **37.19.** $x \in (-\infty; \frac{5}{7}]$. **37.20.** $x \in (\frac{5}{7}, +\infty)$.
37.21. $x \in \mathbb{R}$. **37.22.** $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
37.23. $x \in (-2; -1] \cup [3; 4)$. **37.24.** $x \in [0; 1] \cup [4; 16) \cup (16; +\infty)$.
37.25. $x \in [-1 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; 1 + 2\sqrt{6}]$. **37.26.** $x \in [-2; 3] \cup \{8\}$.

Урок №38.

38.1. $\sqrt{6}/3$. **38.2.** $\sqrt{5}/5$. **38.3.** $(3\sqrt{39})/13$. **38.4.** $\sqrt{6}/3$. **38.5.** 50.
38.6. $\frac{1}{4}$. **38.7.** $\sqrt{6}/3$. **38.8.** $\sqrt{2}/4$. **38.9.** $\sqrt{3}/3$. **38.10.** $\sqrt{6}/6$.
38.11. б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Урок №39.

39.1. $\frac{\pi}{3} + \pi n$. **39.2.** $\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n$. **39.3.** $\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

39.4. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **39.5.** $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$. **39.6.** $\frac{\pi n}{4}; (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$.

39.7. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$. **39.8.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n$. **39.9.** $\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$.
39.10. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$. **39.11.** $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$. **39.12.** πn.

39.13. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **39.14.** $-\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

39.15. $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} - \frac{\arcsin\frac{3}{5}}{16}; \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} + \frac{\arcsin\frac{3}{5}}{14}$. **39.16.** $\frac{\pi n}{2}$. **39.17.** 2.

39.18. а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.

39.19. а) $\pi - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n$; б) $-3\pi - \arccos\frac{4}{5}$. **39.20.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

39.21. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi n;$ б) $2\pi; 3\pi; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$. **39.22.** $\frac{\pi}{2}k$.
39.23. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n \geqslant 1$. **39.24.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.
39.25. а) $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$.

Урок №40.

40.1. б) $3\sqrt{61}$. **40.2.** б) $51\sqrt{3}$. **40.3.** а) $\arccos\frac{1}{7}$; б) $\frac{49\sqrt{3}}{4}$.
40.4. б) $20\sqrt{14}$.
40.5. б) $\frac{7+2\sqrt{10}}{18}$. **40.6.** б) $11\sqrt{3}$. **40.7.** б) $\arcsin\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{127}}$. **40.8.** б) $\frac{16\sqrt{3}}{5}$.
40.9. б) $\frac{19}{35}$. **40.10.** б) 1. **40.11.** б) 2,5. **40.12.** б) 3. **40.13.** б) $\frac{6}{5}$.
40.14. б) 30°. **40.15.** б) $\dfrac{25\sqrt{39}}{36}$.

Урок №41.

41.1. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$. **41.2.** $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$. **41.3.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n; -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$; б) $\frac{7\pi}{4}; -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi$. **41.4.** а) $\frac{-5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi k$; б) $\frac{19\pi}{6}$.
41.5. $\frac{4}{3}+4n; \frac{2}{5}+\frac{4k}{5}$. **41.6.** 0. **41.7.** $\frac{\pi n}{4}; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **41.8.** 0.
41.9. $\frac{9\pi}{4}$. **41.10.** $\frac{\pi}{4}+\pi n; -\frac{5\pi}{6}+2\pi n$.
41.11. а) $\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n$; б) $\frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}$.
41.12. а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; б) $\frac{89\pi}{6}$. **41.13.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}$. **41.14.** а) $\frac{5\pi}{12}+\pi n$; б) $\frac{17\pi}{12}; \frac{29\pi}{12}; \frac{41\pi}{12}$. **41.15.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$.
41.16. а) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{6}$.
41.17. а) $-2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $2\pi-2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

Урок №42.

42.1. $x \in (1; +\infty)$. **42.2.** $x \in [\sqrt{6}-1; 2) \cup (2; 5]$.
42.3. $x \in [-7/24; -1/4) \cup (1; 7/3]$. **42.4.** $x \in (1/10; 1/2]$.
42.5. $x \in (1-\log_3 28; -2] \cup (-1; 1]$. **42.6.** $x \in (1; 1000)$.
42.7. $x \in (\log_3 10; +\infty)$. **42.8.** $x \in (0; 1) \cup [2; +\infty)$.
42.9. $x \in (1; 3/2) \cup (2; 5/2) \cup (3; +\infty)$. **42.10.** $x \in (0; 1/9) \cup (1; 3]$.
42.11. $x \in (-1; 0] \cup (1; 2)$. **42.12.** $x \in (\log_2\frac{5}{4}; \log_2 3;)$.
42.13. $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$. **42.14.** $(-4/3; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 5] \cup (6; 7)$.

Урок №43.

43.1. 2. **43.2.** 0. **43.3.** 0. **43.4.** 3. **43.5.** 1. **43.6.** $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{11}{6}$.
43.7. $0; 5$. **43.8.** 1,2; 2. **43.9.** $\frac{\pi n}{4}; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **43.10.** 2. **43.11.** $-\frac{1}{3}; 1$.
43.12. 1. **43.13.** (3; 2),(2; 3),(5; 1),(1; 5).

43.14. $(\sqrt{10};\sqrt{10}),(-\sqrt{10};-\sqrt{10}),(4;2),(-4;-2)$.

43.15. $(20;\frac{3\pi}{4}+2\pi n)$. **43.16.** $(-1;\pi n)$. **43.17.** $(2;1),(\pi;-\frac{\pi}{2})$.

43.18. $(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi n),(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi n)$.

43.19. $(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n),(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n)$. **43.20.** $(2\pi n;0),(\frac{\pi}{2}+2\pi k;-1)$.
43.21. $(-4;-1)$. **43.22.** $-4;4$. **43.23.** $(-0{,}5;-0{,}5;0{,}5)$.

43.24. $-5;-3;10/3;6$. **43.25.** а)$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

43.26. а)$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; б) $-\frac{17\pi}{4};-\frac{13\pi}{4}$.

Урок №44.

44.1. $\{-3\}\cup[1;2)$. **44.2.** $[2;4]$. **44.3.** $[1;5{,}5)$.

44.4. $(-\infty;1)\cup(\log_2 7;\log_2 10)$. **44.5.** $(-\frac{6}{5};\frac{2}{7})$. **44.6.** $(2;4)$.

44.7. $(-\infty;-1)$. **44.8.** $(3;3{,}5)$. **44.9.** $[-2;0)\cup(2;+\infty)$.
44.10. $(0{,}75;4]$. **44.11.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\pi n$. **44.12.** $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup(1;\sqrt{3}]\cup[2;4]$.
44.13. $(\frac{1}{2};1)\cup(1{,}6;\frac{5}{3})\cup(\frac{7}{4};2)\cup(2;3)$.

44.14. $[0;\frac{27}{16}]$. **44.15.** $[-1;0]\cup[2;3]$. **44.16.** $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n];\pi+2\pi n$.
44.17. $[-8;-3]\cup(2;3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$. **44.18.** $(0;1]$. **44.19.** $(-4;2]\cup[-1;1]$.
44.20. $(0;\frac{1}{4}]\cup[4;+\infty)$. **44.21.** 3. **44.22.** $(0{,}4;0{,}5)\cup(1;2]$.

44.23. $[\log_4 3;1]\cup[5;+\infty)$. **44.24.** $[\frac{2}{9};\log_2\frac{3}{2}]$. **44.25.** $[-1-2\sqrt{6};0)\cup(0;5)$.
44.26. $[\sqrt{6};\frac{5}{2}]\cup(3;+\infty)$. **44.27.** $[-1;0)\cup\{1\}\cup[3;\sqrt{10}]$. **44.28.** $[2;3]\cup\{8\}$.
44.29. -3. **44.30.** 1,2. **44.31.** $[-7;-6]\cup(-5;\sqrt{8}-7)$.

44.32. $(1;2)\cup[3;4)\cup(4;11]$.

Урок №45.

45.1. 0,5. **45.2.** 4. **45.3.** -1. **45.4.** 44. **45.5.** -3. **45.6.** 1.
45.7. 5. **45.8.** -2. **45.9.** -3. **45.10.** 7. **45.11.** -33. **45.12.** 5.
45.13. 0,5. **45.14.** 4. **45.15.** 6. **45.16.** 18. **45.17.** 2. **45.18.** 3.
45.19. 0,25. **45.20.** 1,25. **45.21.** -21. **45.22.** 0,125. **45.23.** 7.
45.24. 7. **45.25.** 20. **45.26.** 4.

Урок №46.

46.1. 10. **46.2.** 7. **46.3.** 6. **46.4.** -1. **46.5.** 9. **46.6 .** 4. **46.7.** 1,5.
46.8. -15. **46.9.** 2. **46.10.** 8. **46.11.** $-4{,}5$. **46.12.** 10. **46.13.** -3.
46.14. -1. **46.15.** -10. **46.16.** 9. **46.17.** -6. **46.18.** -4. **46.19.** 9.
46.20. 7. **46.21.** 4. **46.22.** 48. **46.23.** -2. **46.24.** -3. **46.25.** -2.
46.26. 523. **46.27.** 4. **46.28.** -17. **46.29.** 40. **46.30.** 2. **46.31.** 3.
46.32. 3.

Урок №47.

47.1. 950400. **47.2.** 6. **47.3.** 120. **47.4.** 133100. **47.5.** 220. **47.6.** 13. **47.7.** 1. **47.8.** 15. **47.9.** 10. **47.10.** 12. **47.11.** 20. **47.12.** 125 месяцев.

Урок №48.

48.1. 95304. **48.2.** 80.5. **48.3.** $30; 765$ тыс.руб. **48.4.** 3. **48.5.** 25. **48.6.** 1. **48.7.** 800. **48.8.** 500. **48.9.** 7. **48.10.** 2,045.

Урок №49.

49.8. 90. **49.9.** 120. **49.10.** $43/441 < r < 41/400$. **49.11.** В течение шестого года. **49.12.** 25. **49.13.** 40.

Урок №50.

50.1. $z_1 + z_2 = 3 - 2i$; $z_1 - z_2 = -1 + 4i$. **50.2.** $z_1 \cdot z_2 = 9 + i$; $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}i$. **50.3.** $-1 + i$. **50.4.** $2\sqrt{2}$. **50.5.** $5\sqrt{2}$. **50.6.** $4 + i$. **50.7.** $2 + 3i$. **50.8.** 2,4.

Урок №51.

51.1. $(-2/3; -1/3)$. **51.2.** $x \in [1/(a-2); +\infty)$ при $a \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$; $x \in (-\infty; +\infty)$ при $a = 0{,}5$; $x \in (-\infty; 1/(a-2)]$ при $a \in (0{,}5; 2)$; $x \in \emptyset$ при $a = 2$.

51.3. $a \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2]$. **51.4.** $a = -\frac{2}{3}$. **51.5.** $a = -\frac{73}{16}; a = 2$. **51.6.** $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$.

51.7. Если $a < 1$, то $x \in (a; \frac{a+1}{2}) \cup (1; +\infty)$.
Если $a = 1$, то $x \in (1; +\infty)$.
Если $a > 1$, то $x \in \left(1; \frac{a+1}{2}\right) \cup \left(a; +\infty\right)$.

51.8. $a \in (-\infty; \frac{9}{19}] \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$. **51.9.** $0; 2; 6; 8$. **51.10.** $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **51.11.** 225. **51.12.** $a \in (0; 1)$. **51.13.** $a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

51.14. $a \in \{-1\} \cup \{-0{,}5\}$. **51.15.** $a \in \{1/\sqrt[4]{5}\} \cup [1; +\infty)$. **51.16.** $a \in \{2; 6\}$. **51.17.** $a \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Урок №52.

52.1. 4. **52.2.** 8. **52.3.** $\frac{3}{4}S$. **52.4.** б) $5\sqrt{133}$. **52.6.** 1. **52.7.** 37,2. **52.8.** $12\sqrt{5}$. **52.10.** $\dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. **52.11.** 10. **52.12.** $\sqrt{3}$. **52.14.** $3; 4; 5$. **52.15.** 2. **52.16.** 110°. **52.17.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **52.18.** $45^\circ, 135^\circ$.

Урок №53.

53.1. $a \in (-\infty; -5] \cup [-3{,}2; 0] \cup \{-4; 4\}$. **53.2.** $a \in (1; 3)$.

53.3. $a \in (-0{,}4; +\infty)$. **53.4.** $-\sqrt{1{,}4}$. **53.5.** $a \in [-6; -2]$.

53.6. $a \in (-\frac{17}{16}; -\frac{1}{2}]$.

53.7. $x \in \{-\frac{1}{a}; 1\}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$; $x \in \{1\}$ при $a \in [-1; 1)$.

53.8. $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **53.9.** $a \in [2; +\infty)$. **53.10.** $p = 0$.

53.11. $b \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2})$. **53.12.** $b \in (-\infty; \frac{19}{3})$. **53.13.** $b \in (0; 1)$.

53.14. $a = 12$. **53.15.** $a = \pm\sqrt{2}1$. **53.16.** $a \in (3; +\infty)$.

53.17. $a \in \{1\} \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$. **53.18.** $a \in (-\infty; 1] \cup \{\frac{5}{4}\} \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$.

53.19. $a \in (-\frac{9}{8}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2); \cup (2; +\infty)$.

Урок №54.

54.1. 1:9, считая от точки B. **54.2.** 6:7 **54.4.** 60. **54.5.** $\frac{S_1+S_2}{2}$.
54.6. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. **54.7.** $4\sqrt{3}$. **54.8.** $\frac{1}{10}$. **54.9.** б) $\frac{720}{17}$.

54.10. б) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ или $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$. **54.11.** $\frac{5}{12}$. **54.13.** $2\sqrt{S_1 S_2}$. **54.14.** б) 14.

Урок №55.

55.1. $a \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$. **55.2.** $a \in (-\frac{9}{16}; +\infty)$.

55.3. $(\pi n; 0; 0), n \in \mathbb{Z}$ при $a = 0$;
$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0; -6), k \in \mathbb{Z}$ при $a = 6$;
при прочих a решений нет.

55.4. $a \in \{-7\} \cup [14 - 7\sqrt{3}; 14 + 7\sqrt{3}]$. **55.5.** $a \in [-0{,}5; 0{,}5)$.

55.6. $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. **55.7.** $a \in (\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6})$. **55.8.** $a = \frac{4}{3}$.

55.9. $a \in \{0; 2\sin 1\}$. **55.10.** $a \in \{-1; 3\}$. **55.11.** $a = 4$. **55.12.** $a = 2$.
55.13. $a \in \{3; 7\}$. **55.14.** $a \in \{-0{,}5\}$.

55.15. при $a = \frac{1}{8}$ $x = y = \frac{1}{2}$.

Урок №56.

56.1. $2R$. **56.2.** $(2R\sqrt{3})/3$.

56.3. $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}, \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. **56.4.** 1)$2\sqrt{Rr}$; 3)$\frac{4Rr}{R+r}$. **56.5.** $6r\sqrt{3}$.
56.7. 14 или 4. **56.8.** $\sqrt{ab}$. **56.9.** б) 48. **56.10.** б) 9. **56.11.** б) 3,2.
56.12. б) 28,8. **56.13.** $12; 20$. **56.14.** $8; 15$. **56.15.** 9. **56.16.** 2.
56.17. 24. **56.18.** $2\sqrt{3}$. **56.19.** a. **56.20.** б) $\sqrt{3} - 1$.

Урок №57.

57.1. $b \in 2{,}75 \cup (3; +\infty)$. **57.2.** $a \in (-\infty; \sqrt{2})$. **57.3.** $a = 5 - 2\sqrt{6}$.

57.4. $a \in \{0\} \cup [-2/3; -2/7)$. **57.5.** $\frac{1}{12}; -2$.

57.6. Решений нет при $a \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$;
$x = 2$ при $a = -4$;
$x = 3$ при $a = 3$;
$x \in [2 - \sqrt{a+4}; 2 + \sqrt{a+4}]$ при $a \in (-4; 0]$;
$x \in [a; (12-a)/3]$ при $a \in (0; 3)$.

57.7. $[0; 13]$. **57.8.** $(-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$. **57.9.** $(-\infty; -7] \cup \{11\} \cup (15; +\infty)$.

57.10. $a \in (-1; -7/23)$. **57.11.** $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

57.12. $a \in [-8; -6) \cup (6; 8] \cup \{-\frac{24}{5}\} \cup \{\frac{24}{5}\}$. **57.13.** $a = -2; 3$.

57.14. $a \in (\frac{144}{13}; 16)$. **57.15.** $a \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$.

57.16. $\{-1\}$. **57.17.** $\{2; \sqrt{65} + 3\}$.

Урок №58.

58.1. 16,9; 2,4; 14,3. **58.2.** $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$. **58.3.** 12; 6. **58.5.** $150°; 210°$.
58.8. 12. **58.9.** $\frac{9}{2}$. **58.10.** 10. **58.12.** б) $\frac{1179\sqrt{3}}{4}$. **58.13.** 13 или 20.
58.14. 26 или $24\sqrt{2}$. **58.15.** б) 4. **58.16.** $\sqrt{\frac{299}{11}}$. **58.17.** $\frac{p}{2}$.

58.18. $30°$ или $150°$. **58.19.** $R^2 \operatorname{tg} \alpha$. **58.20.** $\frac{85}{8}$.

58.21. $|R^2 - d^2|$. **58.22.** $\frac{2ar}{\sqrt{a^2 + r^2}}$. **58.23.** б) 14,4.

Урок №59.

59.1. $a = -20; -2$. **59.2.** $a \in \{-9; -5; 0; 4\}$. **59.3.** $(-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$.
59.4. $y = 6$. **59.5.** $b \in [-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$. **59.6.** $a \in \left(-\frac{13}{30}; -\frac{3}{10}\right] \cup \left[\frac{11}{30}; \frac{1}{2}\right)$.
59.7. $a \in (-2{,}4; -0{,}5) \cup [-0{,}3; 1{,}8)$. **59.8.** $a \in \left(\frac{7}{8}; \frac{5}{4}\right)$.

59.9. $a \in (0{,}25; 0{,}5] \cup [5{,}5; 5{,}75)$. **59.10.** $a \in [-\frac{3}{4}; 0] \cup \{\frac{1}{4}\}$.

59.11. $a \in (2; 4) \cup (6; +\infty)$. **59.12.** $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

59.13. $a \in (4 - 2\sqrt{2}; \frac{4}{3}) \cup (4; 4 + 2\sqrt{2})$.

Урок №60.

60.1. б) $\frac{\sqrt{35} + 2\sqrt{5}}{2}$. **60.2.** б) 3. **60.3.** б) 113. **60.4.** б) 14. **60.5.** 2013.
60.6. $\sqrt{13} + \sqrt{181}$. **60.7.** 1,75. **60.8.** 2015. **60.9.** 224.

60.10. точка K лежит вне шестиугольника; $\sqrt{3}$. **60.11.** $(1; 2)$.

Урок №61.

61.2. Не может. **61.4.** 4;22;14. **61.5.** а) нет; б) нет; в) да; г) нет.

61.6. 133. **61.7.** 57. **61.8.** можно; **61.9.** не может; **61.10.** 7744.

61.11. 8910. **61.13.** 11000. **61.14.** $(1;4;-83),(4;1;-83),(1;5;-79),(5;1;-79)$.
61.15. б) нет. **61.16.** а) да; б) нет; в) 91. **61.17.** а) да (20;4); б) нет; в) 145.

61.18. а) да; б) нет; в) все чётные натуральные числа.

61.19. а) да; б) нет; в) 110. **61.20.** а) да; б) нет; в) 199999999.

Урок №62.

62.5. 201614 пар. **62.6.** 1509. **62.7.** не существуют. **62.8.** 8;9;10.
62.11. не может. **62.13.** 437. **62.14.** 5 **62.15.** 0. **62.16.**

62.17. а) да, например, $a = 22; b = 60; c = 10; d = 40$; б) нет; в) $\frac{157}{29}$.

62.18. а) 9; б) нет; в) да, например для чисел 1;1;1;1;1;1;2;6;8.

62.19). а) да, например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$. б) да, например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$. в) $\{2;10;5;5\};\{2;4;8;8\};\{2;3;12;12\};\{3;6;4;4\};\{4;12;3;3\}$.

62.20. а) да, например, 13;7;8. б) нет. в) $\frac{35}{24}$.

62.21. а) нет; б) нет; в) нет. **62.22.** а) да (для чисел 17 и 10); б) нет; в) 4.
62.23. а) да; б) нет; в) 7.

Урок №63.

63.8. 33. **63.11.** нельзя. **63.12.** нет.

63.13. а) может; б) не может; в) $\left(\frac{23}{15}\right)^2$. **63.14.** 1; 4131.

Урок №64.

64.1. $(3;3;0;0);(-3;-3;0;0)$. **64.2.** $(4;3;6);(4;6;3)$. **64.3.** 120.

64.4. $(12/5;12/7;-12)$. **64.5.** $(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi l), n,k,l \in \mathbf{Z}$.

64.6. $(0;1);(2;1)$. **64.7.** $(-1;2);(-11;14);(1;-2);(11;-14)$.

64.8. $(-5;-3);(-3;-5);(3;5);(5;3)$. **64.9.** $(1;1;1);(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$.

64.10. $1;\frac{\pi}{6}+2\pi n, n=1,2,\dots -\frac{\pi}{6}+2\pi n, n=0,-1,-2,\dots;$
$\pm\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), n=0,1,2,\dots.$

64.11. $\frac{11\pi}{5}$. **64.12.** $[\frac{25}{17};17]$. **64.13.** $x=2$. **64.14.** $x=2$. **64.15.** $7\sqrt{2}$.

Урок №65.

65.1. б) $\sqrt{3}-1$. **65.2.** б) $\frac{45}{16}$. **65.3.** б) $7+4\sqrt{3}$ или $7-4\sqrt{3}$.
65.4. б) 0,3. **65.5.** б) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$. **65.6.** б) $\frac{2(\sqrt{26}+1)}{5}$. **65.7.** б) $\frac{14\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}$.
65.8. б) $\frac{43}{2}$. **65.9.** б) $117\sqrt{3}$. **65.10.** б) $\frac{65}{12}$. **65.11.** б) 180.
65.12. б) 6. **65.13.** б) $\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$.

65.14. б) $72°;126°;108°;54°$. **65.15.** б) 18. **65.16.** б) 165°.

65.17. б) $3\sqrt{3}$. **65.18.** б) 1.

Урок №66.

66.1. 18. **66.2.** $12\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$. **66.3.** 0. **66.4.** $(\frac{S}{Q})^{\frac{n}{2}}$. **66.5.** 1007. **66.6.** $(n+1)!-1$. **66.7.** 9. **66.8.** а)2,3,4 … 2,3,4; б) нет; в)68.

66.9. а)да, например, прогрессия 2,5,8 … 23 … ; б) нет; в)$\frac{9}{49}$.

66.10. а) да, например,1,2,3; б)4. **66.11.** а)да; б)нет; в)при $n=5$.

Урок №67.

67.1. а)нет; б)нет; в) 6 чисел. **67.2.** а)да, например, 5014, 5015, …, 5033; б)нет; в)11. **67.3.** а)нет; б)нет; в)35. **67.4.** а)нет; б)нет; в)4. **67.5.** а)да; б)нет; в)да; г)да. **67.6.** а)нет; б)нет; в)37,05.

67.7. а)да; б)9; в)$\frac{9}{17}$.

67.8. а)например, 15 раз число 19 и число 78; б)нет; в)1650.

67.9. а)да; б)нет; в)18,5. **67.10.** а)да; б)да; в)15. **67.11.** а)2529; б)нет; в)8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (12 чисел). **67.12.** а)да; б)нет; в)20. **67.13.** а)да; б)нет; в)$6\frac{1}{7}$. **67.14.** а)да; б)нет; в)26. **67.15.** а)да, например, если в каждой группе будет по 10 чисел; б)да, например, если в первой группе пять четвёрок, а во второй — все остальные числа; в)$\frac{34}{19}$, если в первой группе 1, а во второй — все остальные числа. **67.16.** а)14; б)90; в)1.

Урок №68.

68.1. (3,6). **68.2.** $0; \pm1; \pm\frac{5}{2}$. **68.3.** $a \in (-\frac{1}{e}; 0) \cup (0; \frac{1}{e})$. **68.4.** $a = \frac{3\ln 2+1}{2}$.

68.5. $a \in (-\infty; -8) \cup (-\frac{20}{3}; \frac{61}{8})$. **68.6.** $a \in (-\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}; 1) \cup (1; \frac{4}{3})$.

68.7. $a \in \left[4-\sqrt{10}; 4+\sqrt{10}\right]$. **68.8.** $a \in \{-42\} \cup (-2; 3)$. **68.9.** $a \in (4; +\infty)$. **68.10.** $a \in (-\infty; 0) \cup \{e\ln 2\}$. **68.11.** $a \in (-\infty; -12{,}5)$.

68.12. при $a=-1$ единственное решение $x=1$. **68.13.** $a \in \{3{,}5; 4; 4{,}5\}$. **68.14.** $a \in (-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right)$. **68.15.** $a \in (-2; 0]$. **68.16.** $a \in (1; 2] \cup [8; 9)$. **68.17.** $a \in [\frac{1}{2}; \frac{30}{7}) \cup (\frac{30}{7}; \frac{32}{5}]$. **68.18.** $-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin\frac{119}{169}+\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **68.19.** $[-\frac{1}{12}; 0]$.

Предметный указатель

Список литературы

[1] *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. А 2 ч. (базовый уровень)/ М.: Мнемозина, 2013

[2] *Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др.* Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы/ М.: ОАО «Московские учебники», по лицензии ОАО «Издательство «Просвещение», 2011

[3] *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый и профильный уровни/

[4] *Погорелов А. В.* Геометрия. 10-11 классы: базовый и профильный уровни./ М.: ОАО «Московские учебники», по лицензии ОАО «Издательство «Просвещение», 2011

[5] *Атанасян Л.С.* Геометрия. 10-11 классы: базовый и профильный уровни./ М.: ОАО «Московские учебники», по лицензии ОАО «Издательство «Просвещение», 2011

[6] *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами/ М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2002, 336 с.

[7] *Шестаков С.А., Захаров П.И.* ЕГЭ 2018. Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 13 (профильный уровень)/ Под ред. И.В. Ященко. М.: МЦНМО, 2018. – 176 с.

[8] *Шестаков С.А.* ЕГЭ 2018. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень)/ М.: МЦНМО, 2018. – 352 с.

[9] *Шестаков С.А.* ЕГЭ 2018. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) Под ред. И.В. Ященко. М.: МЦНМО, 2017. – 288 с.

[10] *Гордин Р.К.* ЕГЭ 2018. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень)/ М.: МЦНМО, 2018

[11] *Гордин Р.К.* ЕГЭ 2018. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень)/ М.: МЦНМО, 2018

[12] *Г.И. Вольфсон, М.Я. Пратусевич, С.Е. Рукшин, К.М. Столбов, И.В. Ященко.* ЕГЭ 2019. Математика. Алгебра и арифметика. Задача 19 (профильный уровень). Под редакцией И.В. Ященко. Москва, Издательство МЦНМО, 2019. — 102 с.

[13] *Колесникова С.И.* Экономические задачи ЕГЭ, М.:ООО"Азбука – 2000", 2016. — 32 с.

[14] *Шестаков С.А.* ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2017. — 208 с.

[15] Пособие по олимпиадной математике. Уровень А1. Под редакцией Татьяны Бабичевой. – М.: Эдитус, 2018. — 378 с.

[16] Сайт ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ по математике, профильный уровень — http://ege.fipi.ru/os11/xmodules/qprint/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B

[17] Сайт И.В. Яковлева – http://mathus.ru

[18] Сайт А.А. Ларина — http://alexlarin.net

[19] Сайт Д.Д. Гущина — https://ege.sdamgia.ru

[20] Сайт Б.В Трушина — http://trushinbv.ru