ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ИТ-ОБРАЗОВАНИЯ

Решебник
ПОСОБИЯ
по олимпиадной математике

Уровень А1

Бабичева Татьяна Сергеевна, Бабичев Дмитрий Сергеевич,
Бабичева Наталья Николаевна, Бабичев Сергей Леонидович,
Ботова Майя Юрьевна, Тарасевич Мария Александровна

Под редакцией Татьяны Бабичевой

Оглавление

Введение

О данной серии книг

В данной серии книг мы разбираем темы, необходимые для решения олимпиадных задач и просто трудные для самостоятельного освоения. Книга будет полезна как для школьников, самостоятельно готовящихся к олимпиадам по математике, так и для руководителей математических кружков.

Конечно, школьная математика — далеко не вся математика, но для понимания наших книг вам не потребуется более глубоких знаний.

В нашем курсе много тем, потому что, решая олимпиадные задачи, часто приходится разбираться с несколькими подзадачами разного типа. Например, для решения задачи, кажущейся чисто геометрической, может понадобиться комбинаторика, а для задачи на теорию чисел — инварианты и принцип Дирихле.

В каждом из рассматриваемых квантов есть теоретическая часть, дающая новый материал или дополняющая известный. В качестве иллюстрации мы приводим решение двух-трёх задач с подробными пояснениями. Также несколько задач предлагаем для закрепления, — их решения приведены в конце главы.

Мы разбили серию книг на уровни — по образцу международных уровней знания иностранного языка. Почему именно так? Во-первых, мы рассказываем о «языке» олимпиадной математики. Классическое разбиение по классам кажется нам неактуальным (зачастую для понимания темы достаточно математических знаний уровня начальной школы). К тому же, темы в книгах «переплетаются», и без прохождения темы уровня A1 иногда затруднительно понять ту же тему, расширенную на A2.

Что же вам предстоит на каждом из уровней?

Давайте пользоваться аналогией с иностранными языками:

Уровень **A1**. Вы понимаете (в общих чертах) иностранную речь, можете поговорить о семье, занятиях, хобби, путешествиях, погоде, купить что-нибудь. В общем, стандартный набор туриста.

Вы умеете спрягать базовые глаголы, знакомы с различными временами? Вас не вводит в ступор вопрос «Как дела?». Поздравляю, у вас хороший уровень A1! Этого достаточно для выживания.

Так же и в олимпиадной математике — вы сможете «выжить» на олимпиадах начального уровня, понять, что от вас требуется в задачах и сформулировать решение. Скорее всего, для понимания тем этого уровня вам не потребуются знания математики дальше седьмого класса. (Задача может быть из олимпиады 11-го класса, — методика решения не изменится).

На уровне **А2** вы можете обсудить предпочтения в искусстве, поговорить о культурных различиях, основных тенденциях в обществе и так далее.

Вы строите сложносочинённые предложения («Это Петя, чей папа работает в банке. Я о нем уже рассказывал»), можете написать другу в фейсбук, рассказать об отпуске и планах на будущее, понять суть любого разговора на языке.

В олимпиадной математике — вы можете быстро распознать, на какую тему, скорее всего, задача из олимпиады среднего уровня, составить решение, обойти типичные ошибки в его оформлении. Для понимания тем этого уровня вам не потребуется математических знаний глубже 7-8 класса.

Владея языком на уровне **B1**, вы можете обсудить сложный характер прабабушки, последние научные открытия (с точки зрения неспециалиста) и нового президента Франции. Вы знакомы с условным наклонением, без подготовки можете общаться в любой бытовой ситуации. Надо отметить, что время, необходимое на овладение очередным уровнем, растёт нелинейно и увеличивается с повышением сложности.

В олимпиадной математике — вы умеете решать задачи почти из любого ее раздела. Возможно, эти решения не всегда изящны, но для вас не представляет труда определить сложность задачи, а также использовать решения, затрагивающие несколько тем. Скорее всего, вы — призёр математических олимпиад, перешли в сильную математическую школу и задумываетесь о профессии, связанной с математикой. Для понимания тем этого уровня вам, вероятно, не потребуется знаний школьной математики выше 9-10 класса.

Уровень **B2** — пороговый уровень для поступления в иностранные университеты. Вы способны логически рассуждать и аргументировать позицию по любой востребованной в обществе теме. Можете написать статью, официальное письмо, объяснить точку зрения коллеге и доказать его неправоту. Просмотр фильмов на языке оригинала, конспектирование и понимание радиопередач не представляет для вас сложности. «Свободное владение языком» обычно подразумевает как раз уровень B2.

В олимпиадной математике — вероятно, вы прошли на финал всероссийской олимпиады по математике.

До следующего уровня — **C1** — доходят немногие. Для того, чтобы хорошо преподавать иностранный язык, требуется уровень не менее C1. Какое-то количество преподавателей иностранного языка имеют как раз этот уровень, но, к сожалению, это редкость, и остальные имеют уровень B2 или ниже.

Человек на уровне C1 в состоянии прочесть и понять научный текст, воспринять речь с сильным акцентом, написать доклад или диплом на иностранном языке.

В олимпиадной математике — скорее всего, вы призёр финала всероссийской олимпиады по математике, и все вокруг знают о вашей любви к науке. Вы побывали на нескольких сборах по олимпиадной математике и, возможно, опробовали себя в качестве преподавателя.

C2 — уровень образованного носителя-лингвиста. Он в состоянии воспринимать и производить тексты любых жанров — написать роман, диссертацию, подготовить речь для научной конференции физиков-ядерщиков и готов исправлять ошибки в речи и текстах урождённых носителей языка. Как правило, иностранцы считают обладателя C2 своим, только иногда могут сомневаться, из какого он региона.

В олимпиадной математике — это люди, которые не только способны решить задачи любой сложности, но и придумывают свои.

Мы подробно и последовательно разбираем материал. Но иногда мы позволяем себе немного поэкспериментировать и показываем задачи, относительно трудные для школьников средних классов. Мы специально не выделяем их звёздочками. Звёздочки перед задачами обычно пугают и мешают верить в свои силы, а ведь кто-то из не очень опытных мог бы понять эти сложные задачки. Для более опытных олимпиадников последовательное прочтение серии наших книг, начиная с данной, позволит освежить и углубить знания. Им эти сложные задачки будут приятными подарками и откроют уходящие в даль заманчивые математические просторы.

Введение к данному решебнику

Эта книга представляет из себя сборник решений всех заданий, предложенных в книге A1.

Для каждой из задач в данной книге указан источник. Олимпиадные задачи, включённые в данное пособие, имеют маркировку типа «Год.Класс.Номер». Например, задача с отметкой «Математический праздник 2010.6.4» — это задача под номером 4 из варианта за 6 класс Математического праздника 2010 года.

Указание номера задачи из олимпиады позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее. На Математическом празднике и Турнире Архимеда обычно предлагается по шесть задач, на Городской устной олимпиаде — девять.

Использованная литература

Мы начинаем список рекомендованной и использованной литературы с книги [1], которая, несмотря на то, что была издана больше 30 лет назад, является классической во всех смыслах. Вряд ли найдётся хотя бы один победитель международной олимпиады от команды России, который бы её не читал. Мы тоже присоединяемся к рекомендациям обязательно её прочитать.

Книга [12] выдержала уже три издания и содержит материалы популярнейшей в Москве (и не только) олимпиады «Математический праздник», в которой принимают участие ученики шестых и седьмых классов. Последнее, третье издание, содержит задачи до 2008 года.

Другой популярный турнир математиков 5-го и 6-го класса — весенний турнир Архимеда. Ему посвящена книга [7], в которой собраны все задачи до 2008 года включительно.

После школьного этапа Всероссийской Олимпиады по математике следует районный (муниципальный) этап. Хотя шестиклассники и семиклассники лишены возможности выйти в региональные этапы по своим классам, которые начинают проводиться только с восьмых классов, но получить опыт олимпиадной математики они могут. В книге [6] — много задач районного этапа, в том числе и для школьников, начиная с 6-го класса. Её первая глава посвящена решению классических задач олимпиадной математики.

С этой книгой перекликается [5], в которой приведены и разобраны задачи Московской областной олимпиады с 1992 по 2003 годы.

Задачи на теорию чисел часто представляют большую сложность для изучающих. В книге [4] имеется теоретический материал и много самих задач. Интересно, что последняя, 19-я задача в ЕГЭ как раз в основном посвящена задачам на теорию чисел, хотя её решение часто доступно ученикам 6-7 классов при надлежащей подготовке.

Хотя книга [3] в основном рассчитана на школьников 8-11 классов, методы, которые там рассматриваются, будут полезны всем изучающим олимпиадную математику.

По отдельным разделам математики, необходимым для решения олимпиадных задач, тоже написано много хороших книг и статей в журналах. Хорошим введением в математическую индукцию может служить, например, небольшая книга [11], по принципу крайнего — статья [8]. Впрочем, на различные темы, нас интересующие, очень много книг в своё время было опубликовано в серии «Библиотечка Кванта», один список которых, вероятно, потребовал бы десяток страниц. Тем не менее мы никак не можем пропустить книгу [10] из этой серии, содержащую 1001 интересную задачу для 5-8-х классов.

Для решения задач важно не только знать и понимать идеи решения, но уметь владеть техническими навыками, для чего требуется перерешать много технических задач, которых, к примеру, очень много в [2].

На некоторые печатные материалы сослаться явным образом не получилось, так как они, к сожалению, не были изданы или же не были найдены в продаже в виде книг и брошюр (но существуют но сайтах олимпиад). Это относится к материалам уральских турниров юных математиков, к зимнему туру турнира Архимеда, начиная с 2012 года, и к материалам Городской устной математической олимпиады для 6—7 классов с момента её появления (2002 год). Надеемся, что публикация этих материалов в данной книге позволит расширить их географию.

Благодарности

За описание уровней языковых компетенций и зарождение идеи о подобном разделении книг по олимпиадной математике — Надежду Соколову (её сайт — http://sokolova.pro/), преподавателя по французскому и итальянскому языкам.

За техническую сторону вопроса авторы сердечно благодарят Никиту Першукова, нашего администратора `Git`.

За вёрстку в TeX и коррекцию — Марию Тарасевич.

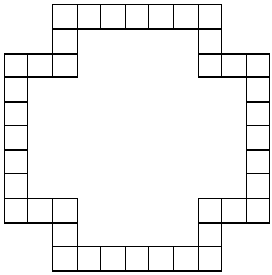
Также авторы благодарят всех своих учеников-вдохновителей, своих коллег, а также весь коллектив ЦРИТО МФТИ за неоценимую поддержку в процессе написания и издания данной книги.

Глава 1

Начала олимпиадной математики

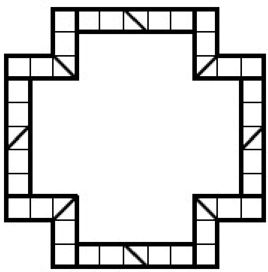
1 Разрезания

Задача 1.1.4. («Математический праздник» — 2012.6.1) Разрежьте рамку на 16 равных частей.



Подсказки. Сколько клеток в рамке? Сколько клеток должно быть в каждой части? Сколько угловых клеток в рамке?

Решение. Правильный вариант разрезания приведён на рисунке ниже.

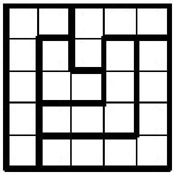


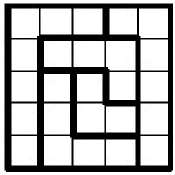
□

Задача 1.1.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.1) Покажите, как разрезать квадрат размером 5×5 клеток на «уголки» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из разного количества клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными).

Подсказки. Сколько клеток в квадрате? Сколько клеток в самом маленьком уголке?

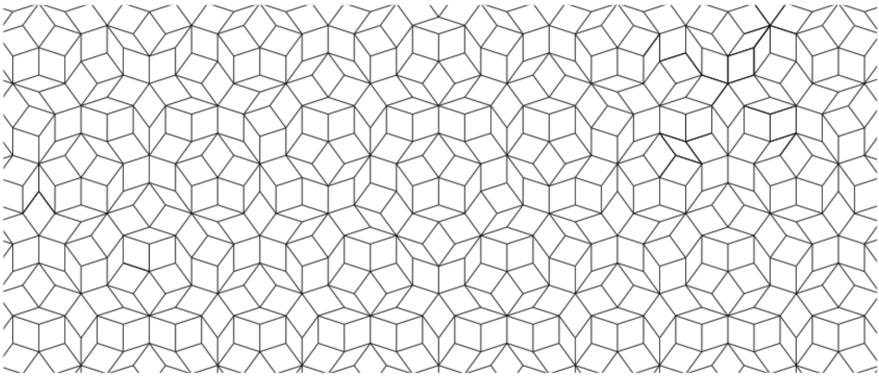
Решение. Площадь квадрата — 25 клеток, а самого маленького «уголка» — 3 клетки. Представим число 25 в виде суммы различных слагаемых, начиная с трёх: $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, и разрежем квадрат на пять «уголков» с таким количеством клеток. Возможные способы разрезания приведены на рисунках ниже.





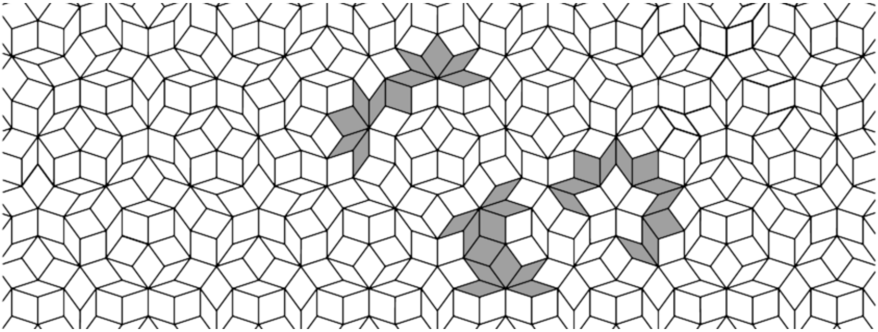
□

Задача 1.1.6. («Математический праздник» — 2011.7.1) На рисунке ниже приведён фрагмент мозаики, которая состоит из ромбиков двух видов: «широких» и «узких». Нарисуйте, как по линиям мозаики вырезать фигуру, состоящую ровно из 3 «широких» и 8 «узких» ромбиков. (Фигура не должна распадаться на части.)



Подсказки. Нам нужно включить в нашу фигуру намного больше «узких» ромбиков, чем «широких». На картинке же «широких» ромбиков явно больше. Каждый «узкий» ромбик граничит не более чем с одним другим «узким» ромбиком, а каждый «широкий» — не более чем с двумя «узкими». Для того, чтобы соединить восемь «узких» ромбиков (четыре пары) в один многоугольник, нам придётся включить не меньше трёх «широких». Теперь мы можем заштриховать в некоторой области мозаики все пары граничащих «узких» ромбиков, начать с какой-нибудь пары и попытаться три раза добавить какой-нибудь «широкий» ромбик, соединяющий выбранный кусок с ещё одной парой «узких» ромбиков.

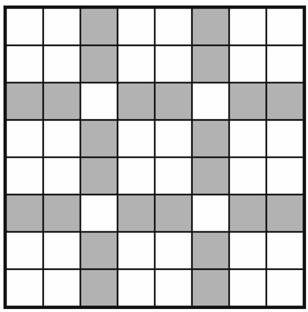
Решение. Некоторые решения приведены на рисунке ниже.



□

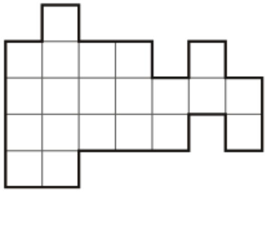
Задача 1.1.7. («Математический праздник» — 2015.1) Упорный Вася хотел из клетчатой доски 8×8 вырезать 12 прямоугольников 1×2 так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать прямоугольник 1×3. (Резать можно только по линиям сетки). И у него это получилось! Покажите на рисунке, как он мог это сделать.

Решение. На рисунке ниже приведено такое разрезание.

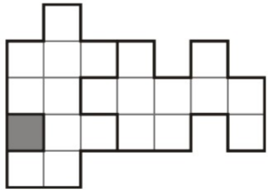


□

Задача 1.1.8. («Математический праздник» — 2016.1) Закрасьте на рисунке одну клетку и незакрашенную часть разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части.



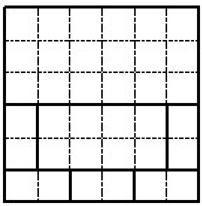
Решение. Требуемое разрезание приведено на рисунке ниже.

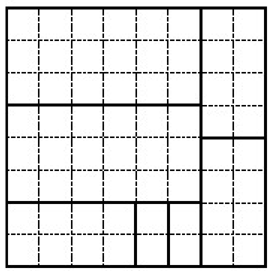


□

Задача 1.1.9. («Математический праздник» — 2016.7.1) Мальвина велела Буратино разрезать квадрат на 7 прямоугольников (необязательно различных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

Решение. На рисунке ниже показаны два примера: для клетчатых квадратов со сторонами 6 и 8 клеток соответственно.



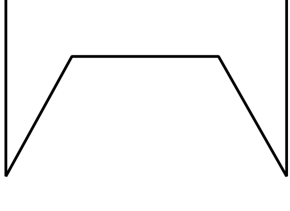


Существует много и других примеров. Значит, задание Мальвины выполнимо.

□

Задача 1.1.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.7.1) Нарисуйте шестиугольник, который жюри не сможет разрезать на два четырёхугольника.

Решение. На рисунке ниже приведён подходящий шестиугольник.



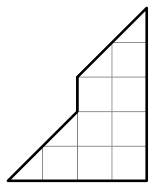
□

Задача 1.1.11. («Математический праздник» — 2003.7.1) На клетчатой бумаге нарисован квадрат. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники размером 1×6 клеток. Докажите, что этот квадрат можно также разрезать на уголки из трёх клеток.

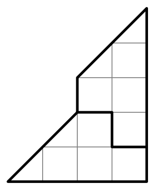
Подсказки. На какое число делится площадь квадрата? На какое число делится длина стороны квадрата?

Решение. Так как площадь квадрата делится на 6, то длина его стороны также делится на 6. Следовательно, квадрат можно разбить на прямоугольники размером 2×3. Любой такой прямоугольник состоит из двух уголков. $\square$

Задача 1.1.12. («Математический праздник» — 2006.6.2) Разрежьте фигуру на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

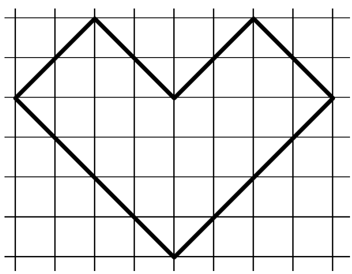


Решение. Требуемое разрезание приведено на рисунке ниже.

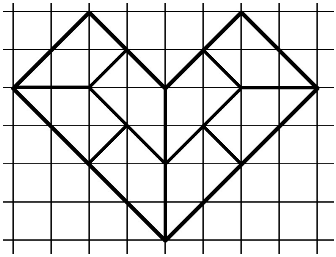


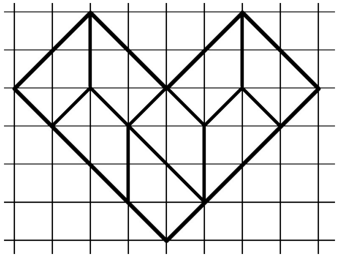
$\square$

Задача 1.1.13. («Математический праздник» — 2009.6.2) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на восемь одинаковых частей.



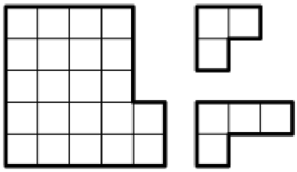
Решение. Разрезать фигуру можно несколькими способами. Два из них представлены на рисунке ниже.





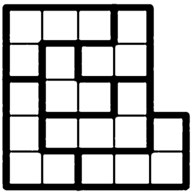
□

Задача 1.1.14. («Математический праздник» — 2002.6.2;7.2) Незнайка разрезал фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. Сколько трёхклеточных уголков могло получиться?

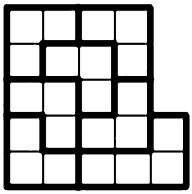


Подсказки. Сколько всего клеток в фигуре? Число трёхклеточных уголков будет чётным или нечётным?

Решение. Фигура состоит из 22 клеток. Пусть x — количество получившихся трёхклеточных уголков, а y — четырёхклеточных. Тогда $3x + 4y = 22$. Заметим, что x чётно и $x < 8$ (так как $3x$ не может быть больше 22), то есть, $x = 0, 2, 4$ или 6. Значения $x = 0$ и $x = 4$ не подходят, так как y получается нецелым. Оба оставшихся варианта для $x = 2$ и $x = 6$ реализуются, как показано на рисунке.



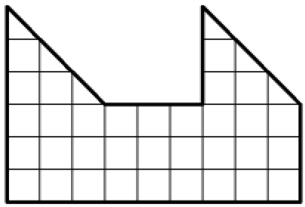
$x = 2$



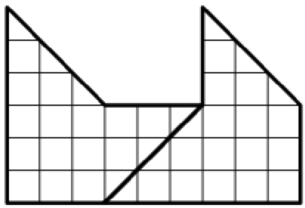
$x = 6$

□

Задача 1.1.15. («Математический праздник» — 1995.6.2) Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на две одинаковые части.

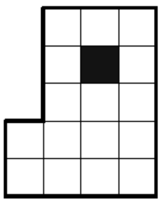


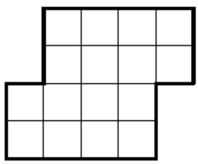
Решение. Искомое разрезание приведено на рисунке ниже.



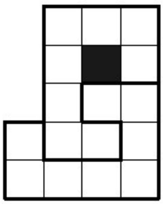
□

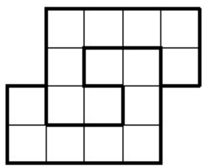
Задача 1.1.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.2) Разрежьте фигуру с вырезанным квадратиком на две одинаковые части, из которых можно составить вторую фигуру. Части разрешается и поворачивать, и переворачивать.





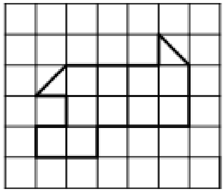
Решение. На рисунке ниже показано верное разрезание.



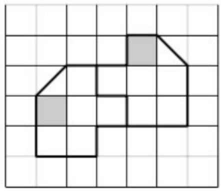


□

Задача 1.1.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.2) Добавьте к фигуре, изображённой на рисунке, две клетки (по линиям сетки) так, чтобы после этого её можно было разрезать по линиям сетки на две равные части.

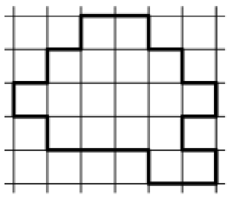


Решение. На рисунке ниже серым закрашены добавленные клетки.

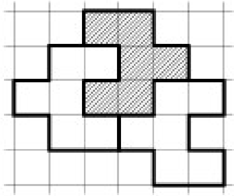


□

Задача 1.1.18. («Математический праздник» — 1999.7.2) Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.

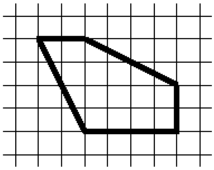


Решение. Искомое разрезание представлено на рисунке ниже.

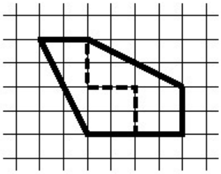


□

Задача 1.1.19. («Математический праздник» — 2006.7.2) Разрежьте изображённый на рисунке пятиугольник на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

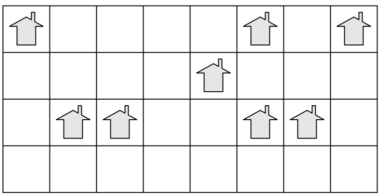


Решение. Данный пятиугольник можно разрезать на две одинаковые части следующим образом.

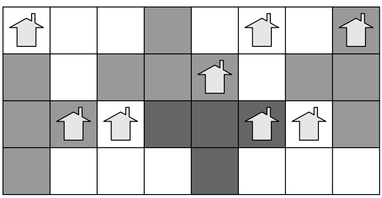


□

Задача 1.1.20. (Турнир Архимеда — 2012.2) Требуется разбить участок земли на 8 одинаковых дачных участков (то есть совпадающих как по площади, так и по форме). Границы участков должны проходить по линиям сетки, на каждом участке должен располагаться домик.



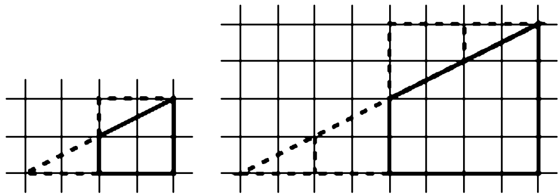
Решение. Один из возможных вариантов требуемого разбиения показан на рисунке ниже.



□

Задача 1.1.21. («Математический праздник» — 2012.7.2) Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим частям добавили ещё одну фигурку — и оказалось, что из нового набора фигурок тоже можно сложить как квадрат, так и треугольник. Покажите, как такое могло бы произойти (нарисуйте, как именно эти два квадрата и два треугольника могли бы быть составлены из фигурок).

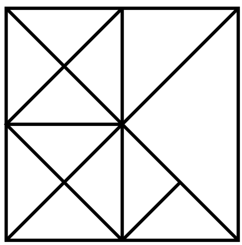
Решение. Такое могло произойти следующим образом.



□

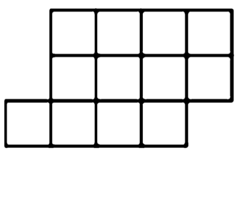
Задача 1.1.22. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.2) Квадрат разрезали на двенадцать прямоугольных треугольников. Могут ли десять из них оказаться равными друг другу, а два оставшихся — отличаться и от них, и друг от друга?

Решение. Могут, что и показано на рисунке ниже.

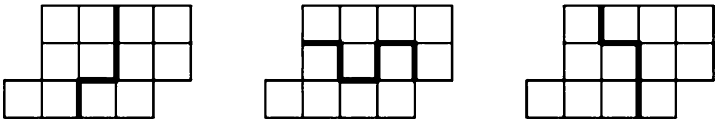


□

Задача 1.1.23. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.2) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две одинаковые части тремя способами (резать можно только по линиям сетки).



Решение. На рисунке ниже представлены искомые разрезания.



□

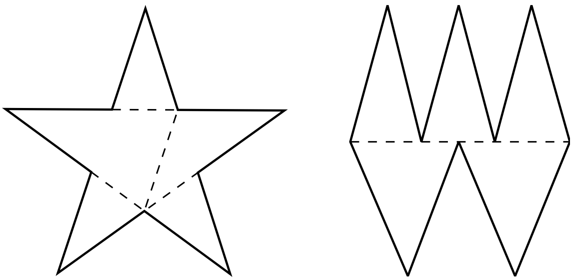
Задача 1.1.24. («Математический праздник» — 1991.6.3) Как одним прямолинейным разрезом рассечь два лежащих на сковороде квадратных блина на две равные части каждый?

Подсказка. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, делит его пополам.

Решение. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, делит его пополам. Значит, нужно провести разрез через центры обоих квадратов □

Задача 1.1.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.3) Существует ли 10-угольник, который можно разрезать на 5 треугольников?

Решение. Удовлетворяющие условию задачи десятиугольники показаны на рисунке ниже.

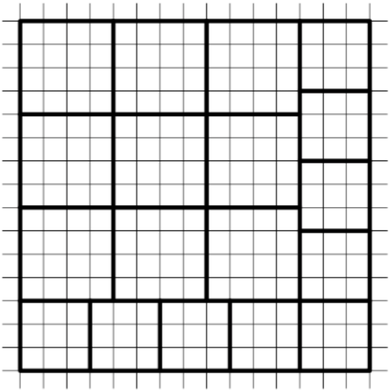


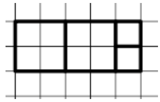
□

Задача 1.1.26. («Математический праздник» — 2008.6.4) Разрежьте какой-нибудь квадрат на квадратики двух разных размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших.

Решение. **Первый способ.** Пусть квадратики одного вида имеют сторону a клеточек, другого — b клеточек, а исходный квадрат — c клеточек. Тогда площадь исходного квадрата равна $c^2 = na^2 + nb^2$. Удовлетворяющие этому равенству числа можно получить, умножив равенство $5^2 = 4^2 + 3^2$ на $n = k^2$.

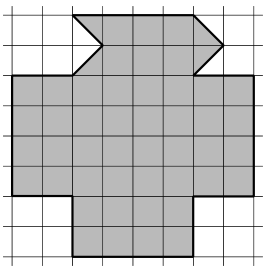
Квадрат при $n = 4$ разрезать не удается, при $n = 9$ получаем $a = 4$, $b = 3$, $c = 15$. Пример разрезания для данных чисел представлен на рисунке ниже.



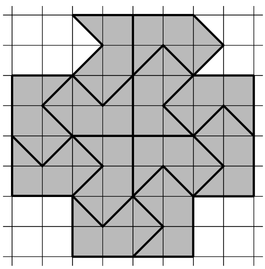


Второй способ. Составим, например, из двух квадратов 2×2 и двух квадратов 1×1 прямоугольник 5×2 (как показано на рисунке). Из десяти таких прямоугольников можно составить квадрат 10×10. Разумеется, таким образом можно получить много других решений. □

Задача 1.1.27. («Математический праздник» — 2017.6.4) Разрежьте фигуру на двенадцать одинаковых частей.



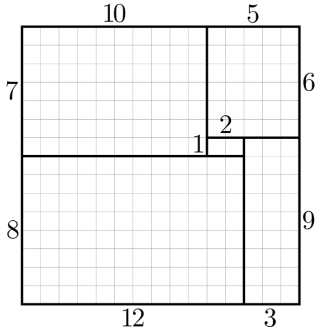
Решение. На рисунке ниже показано искомое разрезание.



□

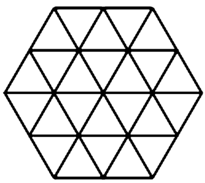
Задача 1.1.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.5) Мачеха приказала Золушке сшить квадратное одеяло из пяти прямоугольных кусков так, чтобы длины сторон всех кусков были попарно различны и составляли целое число дюймов. Сможет ли Золушка выполнить задание без помощи феи-крёстной?

Решение. Приведённый ниже пример — далеко не единственный.

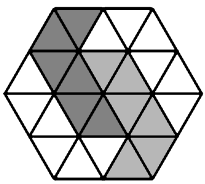


Другие примеры несложно найти, если выбрать квадрат достаточно большого размера, разбить его на пять прямоугольников аналогичным образом, а затем подобрать размеры этих прямоугольников. Таким образом, Золушка сможет выполнить задание. □

Задача 1.1.29. («Математический праздник» — 2015.6.4;7.3) Разрежьте нарисованный шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.



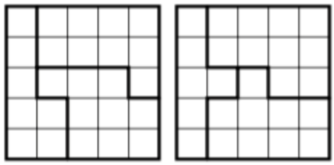
Решение. Решение, представленное на рисунке ниже, единственно с точностью до поворотов и отражений. (Но доказывать это на олимпиаде вас не просили!)



□

Задача 1.1.30. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.3) Разрежьте по клеточкам квадрат 5×5 на три части с равными периметрами.

Решение. Два из множества способов требуемого разрезания приведены на рисунке ниже.

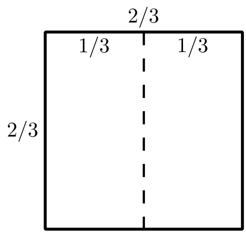


□

Задача 1.1.31. («Математический праздник» — 2003.6.4) Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров?

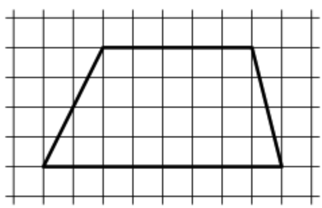
Подсказка. Сумма дробей может равняться целому числу, например: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Решение. Неверно, например: квадрат со стороной $\frac{2}{3}$ м можно разрезать средней линией на два прямоугольника, периметры которых равны 2 м. Есть и другие примеры.

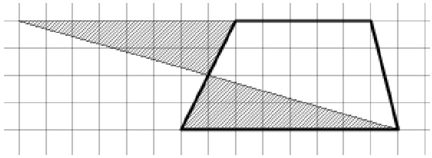


□

Задача 1.1.32. («Математический праздник» — 1998.6.4) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.

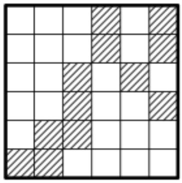


Решение. На рисунке ниже показано разрезание, удовлетворяющее условию задачи.



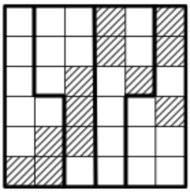
□

Задача 1.1.33. («Математический праздник» — 1997.6.4) Разрежьте изображённую на рисунке доску на четыре одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала три заштрихованные клетки.



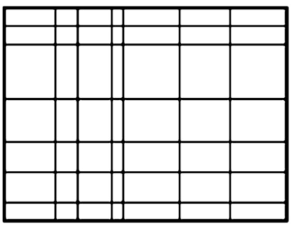
Подсказка. Сначала разрежьте доску пополам по вертикали.

Решение. Искомое разрезание представлено на рисунке ниже.



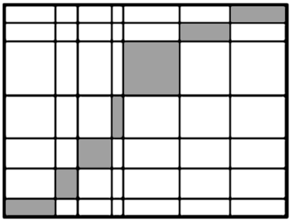
□

Задача 1.1.34. («Математический праздник» — 2003.7.4) Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников, как показано на рисунке ниже. Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?



Подсказка. Закрасьте прямоугольники, стоящие на диагонали.

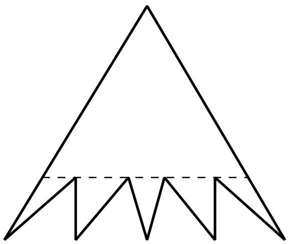
Решение. Рассмотрим диагональные прямоугольники, закрашенные на рисунке ниже.



Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же — для вертикальной стороны. Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников. Периметр каждого из этих прямоугольников — целое число метров. Их сумма — тоже целое число метров. □

Задача 1.1.35. («Математический праздник» — 2003.7.4) Существует ли десятиугольник, который одной прямой можно разбить на 6 частей?

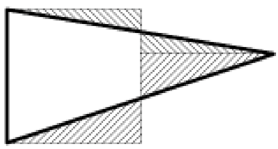
Решение. Десятиугольник, удовлетворяющий условию задачи, приведён на рисунке.



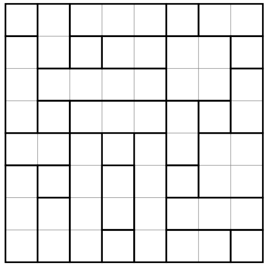
□

Задача 1.1.36. («Математический праздник» — 1994.6.5) Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

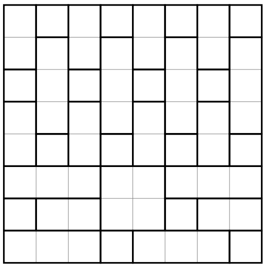
Решение. На рисунке справа показано искомое разрезание (равные части заштрихованы одинаково). □



Задача 1.1.37. («Математический праздник» — 2010.6.5) Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (рисунок ниже). Попытайтесь улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия.



Решение. На приведённом рисунке доска разрезана на 35 прямоугольников. Можно доказать (но на данной олимпиаде это не просят), что на большее число прямоугольников разрезать доску не удастся.

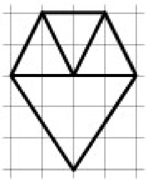


□

Задача 1.1.38. («Математический праздник» — 1996.6.5) Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника: а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник; б) правильный пятиугольник?

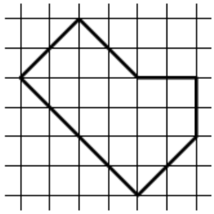
Подсказки. б) Каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. Все углы правильного пятиугольника тупые.

Решение. а) Требуемое разрезание представлено на рисунке ниже.

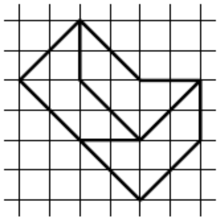


б) Каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. У пятиугольника пять сторон, а треугольников у нас четыре. Значит, какие-то две стороны пятиугольника содержат стороны одного и того же треугольника. Следовательно, угол между этими сторонами тупой. Получаем противоречие с тем, что все треугольники должны быть остроугольными. □

Задача 1.1.39. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.5) Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки). (Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.)



Решение. Удовлетворяющее условию разрезание приведено на рисунке.

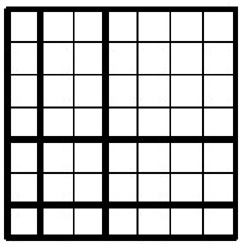


□

Задача 1.1.40. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.5) Разрежьте по клеточкам квадрат 7×7 на девять прямоугольников (не обязательно различных), из которых можно будет сложить любой прямоугольник со сторонами, не превосходящими 7.

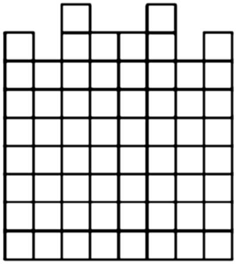
Решение. Разрежем квадрат на три «узких» прямоугольника (1×1, 2×1 и 4×1), три «средних» (1×2, 2×2 и 4×2) и три «широких» (1×4, 2×4 и 4×4). Описанное разрезание представлено на рисунке ниже.

Из «узких» прямоугольников можно сложить прямоугольник любой высоты от 1 до 7 и ширины 1. Аналогично из «средних» прямоугольников можно сложить прямоугольник любой высоты от 1 до 7 и ширины 2, а из «широких» — прямоугольник любой высоты от 1 до 7 и ширины 4. Из полученных «узкого», «среднего» и «широкого» прямоугольников нужной высоты можно сложить прямоугольник этой высоты и любой ширины от 1 до 7.

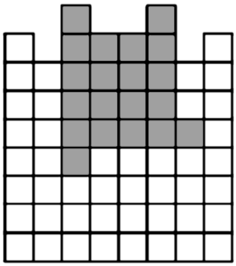


Замечания. Решение основано на том, что из первых n степеней двойки (начиная с $2^0 = 1$) можно составить любую сумму от 1 до $2^n - 1$ включительно. На этом факте основана двоичная система счисления. В данном случае $n = 3$. □

Задача 1.1.41. («Математический праздник» — 1995.7.6) Разрежьте изображённую фигуру на две части, из которых можно сложить целый квадрат 8×8.



Решение. Искомое разрезание показано на рисунке ниже.



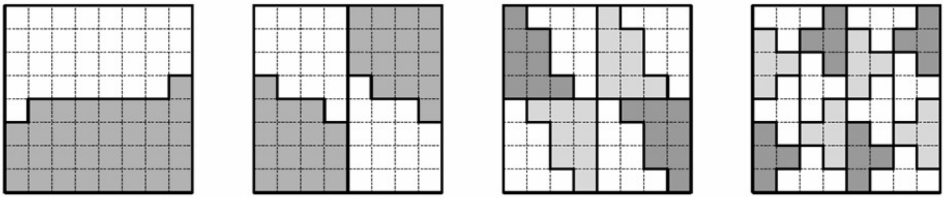
□

Задача 1.1.42. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.7) Вася называет прямоугольник, стороны которого отличаются на 1, *почти–квадратом.* (Например, прямоугольник со сторонами 5 и 6 — это почти-квадрат.) Существует ли почти–квадрат, который можно разрезать на 2010 почти-квадратов?

Решение. Заметим, что доминошка 2×1 — это простейший почти–квадрат. Возьмём почти–квадрат 2009×2008, приставим к нему справа полоску из 1004 доминошек, а потом сверху — полоску из 1005 доминошек. Получится почти–квадрат, разбитый на 2010 почти–квадратов. □

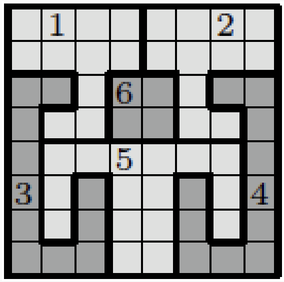
Задача 1.1.43. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.8) На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (Все разрезы должны проходить по линиям сетки.)

Решение. Ясно, что количество клеток в одном многоугольнике является делителем числа 64. Одна и две клетки восьмиугольника образовывать не могут, поэтому возможные варианты: 4, 8, 16 или 32 клетки. Значит, квадрат размером 8×8 можно разрезать на 16, 8, 4 или 2 восьмиугольника соответственно. На рисунке представлены примеры таких разрезаний.

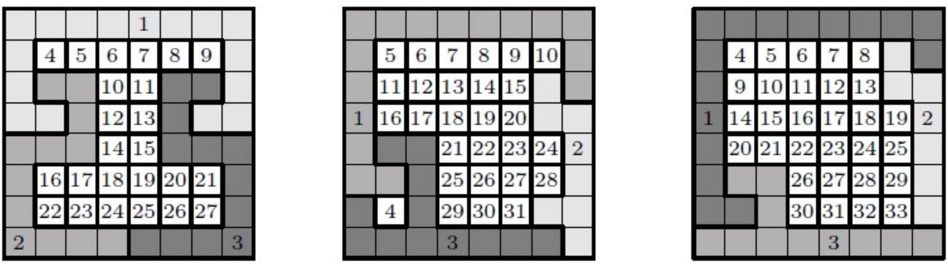


Замечания. Существуют также примеры, в которых равные фигуры получаются с помощью «переворота». □

Задача 1.1.44. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.9) Дима разрезал картонный квадрат 8×8 по границам клеток на шесть частей (см. рисунок). Оказалось, что квадрат остался *крепким*: если положить его на стол и потянуть (вдоль стола) за любую часть в любом направлении, то весь квадрат потянется вместе с этой частью. Покажите, как разрезать такой квадрат по границам клеток не менее, чем на 27 частей, чтобы квадрат оставался крепким и в каждой части было не более 16 клеток.



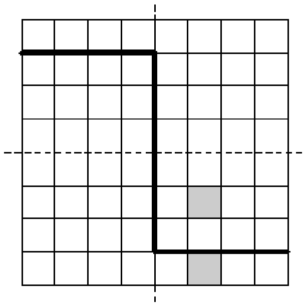
Решение. На рисунке ниже показаны примеры разрезания квадрата на 27 частей, 31 часть и 33 части (белая фигура внутри разрезана на единичные квадратики).



Замечание. Каково наибольшее возможное количество частей — пока неизвестно. □

Задача 1.1.45. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.9) Дан квадрат $2n \times 2n$. Вася закрашивает в нём две любые клетки. Всегда ли Петя сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных половинках?

Решение. Разрежем квадрат на четыре квадрата $n \times n$. Если Вася закрашивает две клетки в разных четвертинках $n \times n$, то Петя сможет разрезать нужным образом большой квадрат либо по горизонтали, либо по вертикали. Рассмотрим случай, когда Вася закрасил две клетки в одной четвертинке $n \times n$. Эти клетки лежат либо в разных столбцах, либо в разных строках (иначе бы эти клетки совпали). Пусть для определённости закрашенные клетки лежат в разных строках (для столбцов рассуждение аналогично). Разрежем четвертинку $n \times n$ по горизонтали так, чтобы закрашенные клетки оказались в разных её частях. После этого продолжим разрез по границе четвертинок до центра квадрата $2n \times 2n$ и отразим получившийся разрез относительно этого центра, как показано на рисунке ниже.



□

2 Взвешивания

Задача 1.2.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.1) В наборе из 10 гирек любые четыре гирьки перевешивают любые три из оставшихся. Верно ли, что любые три гирьки из этого набора перевешивают любые две из оставшихся семи?

Подсказка. Попробуйте рассмотреть вариант, когда найдутся две гирьки, весящие не меньше, чем какие-то три других.

Решение. Да. Если бы некоторые две гирьки весили вместе не меньше, чем некоторые три другие, можно было бы выбрать из остальных пяти гирек две, первая из которых весит не меньше, чем вторая. Добавив первую к двум гирькам, а вторую к — трём, получим три гирьки, перевешивающие четыре другие гирьки. □

Задача 1.2.5. («Математический праздник» — 2017.7.2) У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар — на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

Решение. Могло, подойдут гирьки массами 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г.

Замечания. Докажем, что этот пример — единственный. Ни в одном из взвешиваний не участвовала ровно одна гирька: иначе её масса была бы больше 90 г. Если в каком-то взвешивании участвовали все три гирьки, то это могло быть только третье взвешивание, то есть сумма масс всех гирек равна 102 г. Тогда, чтобы аптекарь мог получить 100 г и 101 г, одна из гирек должна весить 1 г, а другая — 2 г. Значит, оставшаяся гирька весит 99 г, что нам не подходит. Следовательно, в каждом взвешивании участвовали ровно по две гирьки, притом каждый раз — разные. Значит, удвоенная масса всех гирек равна

$$100 + 101 + 102 = 303 \text{ г},$$

то есть сумма масс трёх гирек равна 151,5 г. Поэтому масса самой лёгкой гирьки равна $151{,}5 - 102 = 49{,}5$ г, масса следующей — $151{,}5 - 101 = 50{,}5$ г, а масса самой тяжёлой — $151{,}5 - 100 = 51{,}5$ г. □

Задача 1.2.6. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2005-2006.7.3) У продавца есть стрелочные весы для взвешивания сахара с двумя чашками. Весы могут показывать вес от 0 до 5 кг. При этом сахар можно класть только на левую чашку, а гири можно ставить на любую из двух чашек. Какое наименьшее количество гирь достаточно иметь продавцу, чтобы взвесить любое количество сахара от 0 до 25 кг?

Решение. Одной гири продавцу не хватит, поскольку для взвешивания 25 кг сахара требуется гиря весом не менее 20 кг. Имея только такую гирю, продавец не сможет взвесить, например, 10 кг сахара.

Покажем, что продавцу хватит двух гирь: одной весом 5 кг и одной весом 15 кг. Сахар весом от 0 до 5 кг можно взвесить без гирь. Чтобы взвесить от 5 до 10 кг сахара, нужно поставить гирю в 5 кг на правую чашку. Чтобы взвесить от 10 до 15 кг сахара, нужно поставить гирю в 5 кг на левую чашку, а гирю в 15 кг на правую чашку. Чтобы взвесить от 15 до 20 кг сахара, нужно поставить гирю в 15 кг на правую чашку. Чтобы взвесить от 20 до 25 кг сахара, нужно поставить гири в 5 кг и 15 кг на правую чашку. □

Задача 1.2.7. (Турнир Архимеда — 2016.5) На столе три слитка золота весом в 3, 4 и 5 г. На каждом слитке указан вес, но надписи могут быть перепутаны. Вес слитков можно сравнивать на чашечных весах без гирь, но в момент взвешивания на одну из чашек (любую) прыгает невидимый гном весом в 1 г. Как, сделав не более двух взвешиваний, выяснить правильный вес хотя бы одного слитка?

Решение. Выберем произвольно какой-нибудь слиток. Сравним его вес с двумя другими, помещая его оба раза на одну чашку весов (слева). Результаты взвешивания могли быть следующими (вне зависимости от последовательности):

$>, >$ — это могло быть, только если вес слитка слева равен 5 г: $5 > 3$, $5 > 4$;

$=, =$ — это могло быть, только если вес слитка слева равен 4 г: $4 = 3$, $4 = 5$;

$<, <$ — это могло быть, только если вес слитка слева равен 3 г: $3 < 4$, $3 < 5$;

$>, <$ — это могло быть, только если вес слитка слева равен 4 г: $4 > 3$, $4 < 5$;

$>, =$ — это могло получиться только в двух случаях: $5 > 3$, $5 = 4$ или $4 > 3$, $4 = 5$. В обоих случаях там, где нет равенства, на «лёгкой» чаше слиток в 3 г;

$<, =$ — это могло получиться только в двух случаях: $4 < 5$, $4 = 3$ или $3 < 5$, $3 = 4$. В обоих случаях там, где нет равенства, на «тяжёлой» чаше слиток в 5 г;

При всех результатах один из слитков найден. □

Задача 1.2.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.6) Четыре внешне одинаковые монетки весят 1, 2, 3 и 4 грамма. Можно ли за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из них сколько весит?

Решение. Положим на чаши весов по две монеты и взвесим. Рассмотрим два случая.

1. Одна из чаш перевесила. Тогда на более тяжёлой чаше лежат монеты 4 г и 2 г или 4 г и 3 г, а на более лёгкой — 1 г и 3 г или 1 г и 2 г. За следующие два взвешивания сравним монеты на каждой чаше между собой и определим те, которые весят 1 г и 4 г. Четвёртым взвешиванием сравним оставшиеся две монеты, определив, какая из них весит 2 г, а какая — 3 г.

2. Весы в равновесии. Тогда на одной чаше лежат монеты 2 г и 3 г, а на другой — 1 г и 4 г. Следующими двумя взвешиваниями сравниваем монеты на каждой чаше между собой, а затем сравним две монеты, оказавшиеся более тяжёлыми, определив, какая из них весит 4 г, а какая — 3 г. Сравнение двух монет, оказавшихся по результатам второго и третьего взвешивания более лёгкими, происходит автоматически.

Значит, за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь можно узнать вес каждой из четырёх монет.

Замечание. Отметим, что для выполнения алгоритма стандартной сортировки четырёх объектов недостаточно четырёх сравнений. □

Задача 1.2.9. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2007-2008.7.2) В копилке лежат 30 монет, среди которых 2 фальшивые: одна легче настоящих на 0,5 г, другая легче настоящих на 1 г. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить 14 настоящих монет?

Решение. Отложим 2 монеты. Оставшиеся 28 разделим на 4 одинаковых кучки. Назовём их **А**, **Б**, **В** и **Г**. Произведём два взвешивания: **А** и **Б**; **В** и **Г**.

Если **А** = **Б**, то в этих двух кучках все монеты настоящие. Если **В** = **Г**, то в этих двух кучках все монеты настоящие. Если при этих двух взвешиваниях равновесия не наблюдалось, то настоящие монеты на перевешивающих чашах весов. При любых результатах взвешивания можно отобрать 14 настоящих монет. □

Задача 1.2.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.7) Ювелир изготовил 6 одинаковых по виду серебряных украшений массой 22 г, 23 г, 24 г, 32 г, 34 г и 36 г и поручил своему подмастерью выбить на каждом украшении его массу. Может ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без стрелок и гирек определить, не перепутал ли подмастерье украшения?

Решение. **Первое взвешивание:** на одну чашу весов положим украшения с печатями 22 г, 23 г, 24 г, а на вторую — 34 г и 36 г. Вторая чаша перевесит лишь тогда, когда группы украшений определены верно. При этом оставшееся украшение имеет массу 32 г. **Второе взвешивание:** на первую чашу положим украшения с предполагаемыми массами 24 г и 32 г (которую мы знаем точно), а на вторую — 22 г и 34 г. В этом случае на первой чаше весов получится либо 56 г (если всё правильно), либо меньше (если подмастерье ошибся), а на второй чаше либо 56 г, либо больше. Лишь в случае правильного указания этих четырёх масс на весах установится равновесие. В этом случае масса оставшихся гирь — 23 г и 36 г. Значит, ювелир может за два взвешивания проверить правильность выполненного подмастерьем поручения. □

Задача 1.2.11. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 1998-1999.8.2) У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые — они легче, чем остальные, и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих?

Решение. Разобьём монеты на три кучи: **А**, **Б** и **В**, содержащие $10, 10$ и 20 монет соответственно. Сравним веса **А** и **Б**, есть два варианта:

1. Вес **А** равен весу **Б**. Тогда сравним веса **А** + **Б** и **В**. Если вес **А** + **Б** меньше, то в **А** и **Б** по одной фальшивой монете и **В** — искомая куча; если вес **А** + **Б** больше, то ни в **А**, ни в **Б** нет фальшивых монет, и искомая куча — **А** + **Б**. Случай равенства, очевидно, невозможен.
2. Вес **А** больше веса **Б** (противоположный случай аналогичен). Тогда монеты в **А** заведомо настоящие, а в **Б** есть хотя бы одна фальшивая. Поэтому в **В** не более одной фальшивой монеты. Теперь разобьём **В** на две половины и сравним их между собой на весах: в той, которая тяжелее, нет фальшивых монет. Эта половина вместе с **А** является искомой кучей.

□

Задача 1.2.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.8) Известно, что среди 63 монет есть 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие монеты также весят одинаково, и фальшивая монета легче настоящей. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

Решение. Определить семь настоящих монет за три взвешивания можно следующим образом.

1. Отложим одну монету и положим на чашки весов по 31 монете. Если чашки уравновесились, то мы отложили фальшивую, и на каждой чашке по 3 фальшивых монеты. Если же одна из чашек оказалась тяжелее, то на ней наверняка не более трёх фальшивых монет. Таким образом, после первого взвешивания мы сможем выделить 31 монету, среди которых не более трёх фальшивых.
2. Возьмём эту группу монет и проведём аналогичную операцию: снова отложим одну монету и положим на чашки весов по 15 монет. После этого взвешивания мы сможем выделить 15 монет, среди которых не более одной фальшивой.
3. Повторив аналогичную операцию в третий раз, мы получим 7 настоящих монет.

□

Задача 1.2.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.9) Есть 13 золотых и 14 серебряных монет, из которых ровно одна фальшивая. Известно, что если фальшивая монета — золотая, то она легче настоящей, так как сделана из меньшего количества золота, а если фальшивая монета — серебряная, то она тяжелее настоящей, так как сделана из более дешёвого и тяжёлого металла. Как найти фальшивую монету за три взвешивания на чашечных весах без гирь? (Настоящие золотые монеты весят одинаково и настоящие серебряные монеты весят одинаково.)

Решение. Разобьём монеты на три группы: две по 4 золотых и 5 серебряных монет в каждой и одну группу из 5 золотых и 4 серебряных монет. Первым взвешиванием сравним веса первых двух групп. Если они равны, то фальшивая монета в третьей группе. Если не равны, то фальшивая монета или среди четырёх золотых с более лёгкой чаши, или среди пяти серебряных с более тяжёлой чаши.

Во втором случае объединим подозрительные 4 золотых и 5 серебряных монет. Разобьём эти монеты на три группы: в двух группах — по 1 золотой и по 2 серебряных, а в третьей — 2 золотые и 1 серебряная монета. Далее выбираем группу с фальшивой монетой аналогично первому взвешиванию.

Если фальшивая монета оказалась в группе, где 1 золотая и 2 серебряные, то в третий раз взвешиваем две серебряные монеты. Тогда либо более тяжёлая из них — фальшивая, либо (если их веса равны) фальшивая монета — золотая. Фальшивая монета, оказавшаяся в группе, где 2 золотые и 1 серебряная, определяется аналогично.

Первый случай (фальшивая монета среди 5 золотых и 4 серебряных) разбирается аналогично. □

Задача 1.2.14. (Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2009.8.4) Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

Решение. Отложим одну монету. Поскольку настоящих монет не меньше двух, среди оставшихся 99 монет есть хотя бы одна настоящая. Занумеруем эти монеты и взвесим первую со второй, заплатив за взвешивание отложенной монетой. Если одна из монет перевесила, то она — настоящая, и задача решена. Если веса первой и второй монет равны, сравним вторую монету с третьей, заплатив за взвешивание первой монетой. Если одна из монет перевесила, задача решена. Иначе взвесим третью монету с четвёртой, заплатив за это второй монетой и т. д. Если в какой-то момент одна из монет перевесит — задача решена. Если же все 98 взвешиваний дали равновесие, то все 99 пронумерованных монет весили одинаково, и, поскольку среди них была настоящая, все они, в том числе и две оставшихся после 98-го взвешивания — настоящие. □

3 Переливания

Задача 1.3.3. («Математический праздник» — 2006.6.4) Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

Решение. Пусть Таня нальёт из полного малого кувшина речную воду в большой, а затем наполнит малый и из него дольёт большой доверху. Далее Тане надо опорожнить большой сосуд и вылить в него остаток из малого. Если малый был на 3 литра, то сейчас в большом 1 литр, иначе — 3 литра. Теперь пусть Таня снова попытается перелить воду из полного малого кувшина в большой. Если это ей удастся, то малый был трёхлитровым, если вода польётся через край, — четырёхлитровым. □

Задача 1.3.4. (Всероссийская олимпиада школьников — 2014.5.3) Как отмерить 8 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л (8 л воды должно получиться в одном ведре)?

Решение. В таблице приведена последовательность наполнения обоих вёдер.

10–литровое ведро	6–литровое ведро
10	0
4	6
4	0
0	4
10	4
8	6

□

Задача 1.3.5. (Всероссийская олимпиада школьников — 2014.6.3) Как отмерить 2 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (Два литра воды должны получиться в одном ведре.)

Решение. В таблице приведена последовательность наполнения обоих вёдер.

10–литровое ведро	6–литровое ведро
0	6
6	0
6	6
10	2

□

Задача 1.3.6. (Московская математическая олимпиада — 1964.9.2) В n стаканах достаточно большой вместительности налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно за конечное число шагов слить воду в один стакан?

Решение. Если n является степенью двойки, то алгоритм переливания легко строится.

Докажем, что при остальных n перелить всю воду в один стакан нельзя. Предположим, что нам удалось перелить всю воду в один стакан. Примем за единицу измерения объема начальный объём воды в каждом стакане. Тогда после любого числа переливаний объём воды в любом стакане будет выражаться целым числом. Обратим наш процесс. Тогда в начальный момент у нас есть n единиц объёма воды в одном стакане, а в конечный момент — по одной единице в каждом стакане. Одна операция заключается в переливании из одного стакана половины имеющейся в нём воды в любой из остальных стаканов. Пусть p — любой простой нечётный делитель числа n. В начальный момент количество воды в каждом стакане делится на p, в процессе переливаний это свойство сохраняется. Значит, в конечный момент количество воды в каждом стакане должно делиться на p, то есть 1 делится на p — противоречие.

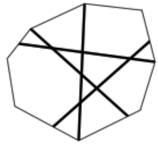
Таким образом, при $n = 2k$, k — целое, можно за конечное число шагов слить воду в один стакан. □

4 Примеры и конструкции

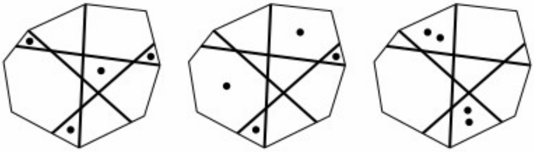
Задача 1.4.4. («Математический праздник» — 1994.6.1) Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

Решение. Да, может. Например: Андрей Васильевич Иванов, Андрей Геннадиевич Петров, Борис Геннадиевич Иванов, Борис Васильевич Петров. □

Задача 1.4.5. («Математический праздник» — 2015.6.1) Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. план). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

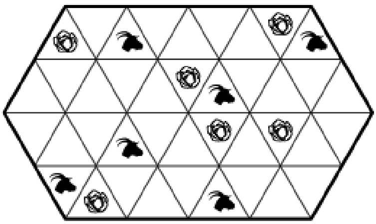


Решение. Способы посадки яблонь представлены на рисунке ниже.

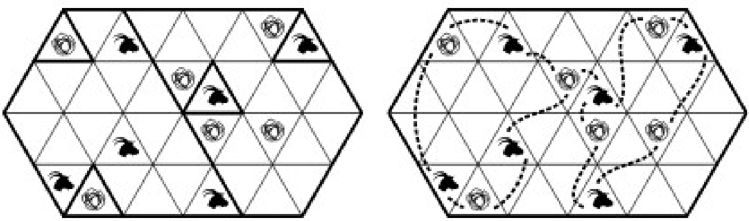


□

Задача 1.4.6. («Математический праздник» — 2017.6.1;7.1) Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.

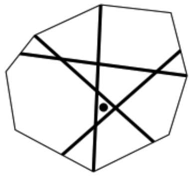


Решение. На рисунке слева показано, как построить заборы общей длиной 650 м. На рисунке справа показаны 13 пунктирных линий. Каждая из них может быть путём, по которому одна из коз доберётся до капусты. Значит, мы должны каждую линию перекрыть забором. Заметим, что никакие две линии нельзя перечеркнуть одной стороной треугольника. Поэтому на перечёркивание всех 13 линий потребуется как минимум 13 заборов по 50 м.

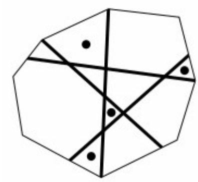


□

Задача 1.4.7. («Математический праздник» — 2015.7.1) Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растёт одна яблоня (см. план). Посадите ещё три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.



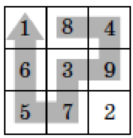
Решение. Схема посадки яблонь показана на рисунке ниже.



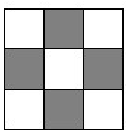
□

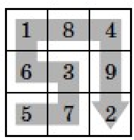
Задача 1.4.8. («Математический праздник» — 2012.7.1) Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды. Петя прошёл, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

1	8	4
6	3	9
5	7	2



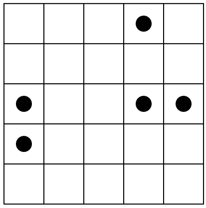
Решение. Если обойти все клетки доски, то получится девятизначное число, которое, конечно, будет больше любого восьмизначного. Девятизначное число тем больше, чем больше его первая цифра. Но девятизначного числа, начинающегося с 9, построить не удастся. Более того, ни для какой из серых клеток (рисунок слева) не существует начинающегося в ней пути, проходящего по всем клеткам доски. Действительно, ход из серой клетки всегда приводит в белую. Всего серых клеток четыре, поэтому белых клеток на любом таком пути тоже не более четырёх — все пять белых клеток так не обойти.



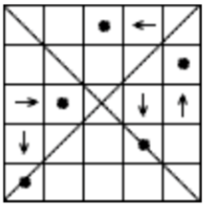


Поэтому надо начать с самой большой «белой» цифры — цифры 5, перейти к её наибольшему соседу, цифре 7, а потом к её наибольшему соседу, цифре 3. Затем придётся перейти к клетке 6 — иначе обойти всю доску не получится. Далее путь единственен. Таким образом, наибольшее число, которое можно получить, — 573618492. □

Задача 1.4.9. (Турнир Архимеда — 2014.1) Требуется передвинуть каждую из пяти фишек на соседнюю клетку так, чтобы в итоге в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали оказалось не более одной фишки. (Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону.) Покажите, как это сделать. (Передвижения фишек покажите стрелками.)

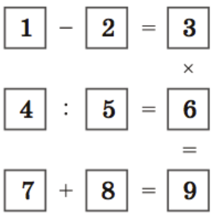


Решение. Искомая перестановка фишек приведена на рисунке ниже.



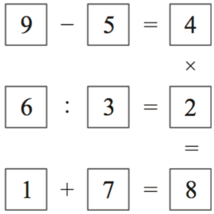
□

Задача 1.4.10. (Турнир Архимеда — 2017.1) На рисунке расставлены карточки с числами $1, 2, 3, \ldots, 9$ так, что получились четыре неверных равенства (три горизонтальных, одно вертикальное).



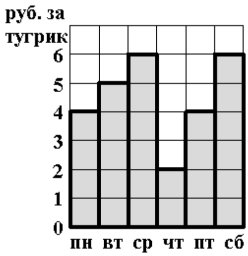
Переставьте эти карточки так, чтобы все равенства стали верными. Достаточно привести ответ.

Решение. Ответ представлен на рисунке ниже.



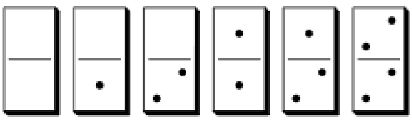
□

Задача 1.4.11. (Турнир Архимеда — 2005.7.1) На рисунке изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он ещё раз обменял все вырученные рубли на тугрики, и, в конце концов, обменял все тугрики обратно на рубли. Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.)

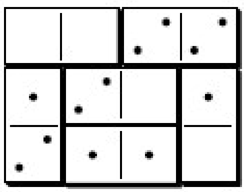


Решение. Во вторник он обменял свои рубли на 6 тугриков, продал их в среду и получил 36 рублей. В пятницу он обменял полученные рубли на 9 тугриков. Продав их в субботу, он получил 54 рубля. □

Задача 1.4.12. («Математический праздник» — 2014.6.2) Из шести костяшек домино (см. рисунок) сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трёх строчках точек было поровну и во всех четырёх столбцах точек было тоже поровну. (Выделите пожирнее границы доминошек.)



Решение. Пример удовлетворяющего условию задачи прямоугольника показан на рисунке ниже.

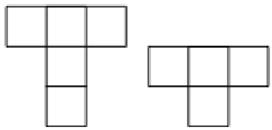


Замечания. Всего точек 12, значит, в каждой строчке будет по 4, а в каждом столбике по 3. Пустую доминошку и доминошку с четырьмя точками нельзя ставить вертикально, иначе в соответствующем столбике никак не получится трёх точек. Поэтому их естественно попробовать расположить горизонтально в одной строчке. После этого нужный пример уже довольно просто нарисовать. □

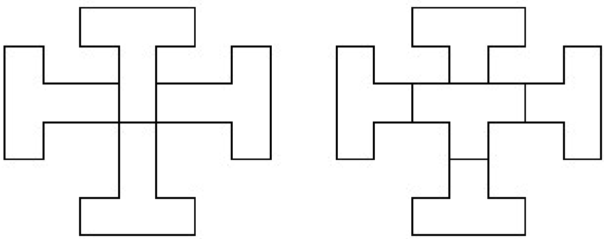
Задача 1.4.13. («Математический праздник» — 2010.6.3) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

Решение. Например, он может сложить башню из четырёх кубиков, «завернуть» её в квадрат 4×4, а низ и верх заклеить квадратами 1×1. □

Задача 1.4.14. («Математический праздник» — 2014.6.4) Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображённые слева, а можно — на пять фигурок, изображённых справа. (Фигурки можно поворачивать.)



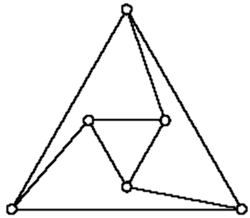
Решение. Требуемая фигура представлена на рисунке ниже.



Замечания. Придумать такую фигуру можно, заметив, что большая буква **Т** уже содержит в себе маленькую, а поэтому нужно взять четыре больших **Т** и соединить их «ножками» друг с другом так, чтобы лишние клеточки образовали недостающую пятую фигурку. □

Задача 1.4.15. («Математический праздник» — 2007.6.4) В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

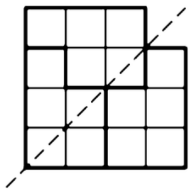
Решение. Возможный план Совершенного города приведён на рисунке.



□

Задача 1.4.16. («Математический праздник» — 2016.7.3) Сложите из трёх одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

Решение. Одно из решений изображено на рисунке (пунктиром показана ось симметрии).



□

Задача 1.4.17. («Математический праздник» — 1998.6.5;7.3) На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 50 км, между A и C — 40 км, между C и D — 25 км, между D и A — 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону).

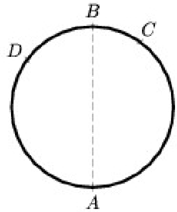
1. Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи.

2. Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

Подсказка. Выясните сначала, как расположены бензоколонки A, C и D.

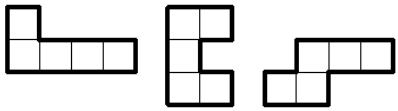
Решение. В условии даны все три расстояния между A, C и D. Выясним сначала, как расположены эти три бензоколонки.

Бензоколонки A и C разбивают кольцевую дорогу на две дуги. Если бы бензоколонка D находилась на меньшей дуге, то сумма расстояний от A до D и от D до C была равна расстоянию от A до C. Но это не так. Значит, бензоколонка D расположена на большей дуге, поэтому длина большей дуги между A и C равна $AD + DC = 25 + 35 = 60$ км.

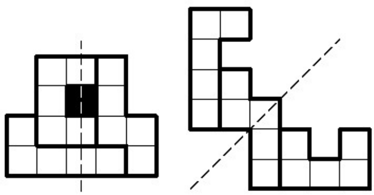


Следовательно, длина кольцевой дороги равна 60 км $+ AC = 100$ км. Так как $BA = 50$ км, то A и B диаметрально противоположны. Значит, расстояние от B до C равно $50 - 40 = 10$ км. □

Задача 1.4.18. («Математический праздник» — 2007.6.5;7.5) Нарисуйте, как из данных трёх фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.

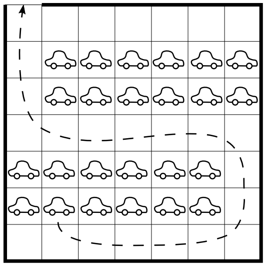


Решение. Из предложенных фигурок можно сложить четыре различные фигуры, имеющие ось симметрии. Две из них приведены на рисунке. У одной из них ось симметрии вертикальная, а у другой проходит по диагонали. Это не случайно: ось симметрии фигуры, нарисованной по клеточкам, может быть либо параллельна сторонам клеток, либо идти под углом 45 градусов к ним.

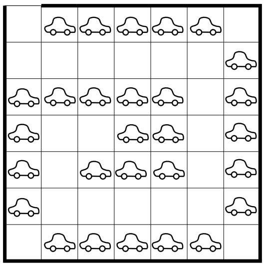


Попробуйте найти остальные два решения. □

Задача 1.4.19. («Математический праздник» — 2008.6.5) Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рисунке. Попытайтесь расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше.

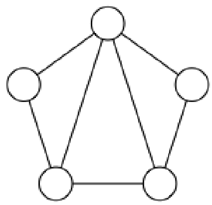


Решение. Можно поставить 28 машин, например, так, как показано на рисунке. Можно ли поставить больше, неизвестно.



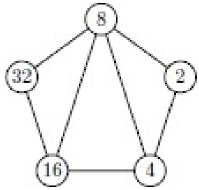
□

Задача 1.4.20. («Математический праздник» — 2014.7.5) Впишите в пять кружков натуральные числа так, чтобы если два кружка:



- соединены линией, то стоящие в них числа должны отличаться ровно в два или ровно в четыре раза;
- не соединены линией, то отношение стоящих в них чисел не должно быть равно ни 2, ни 4.

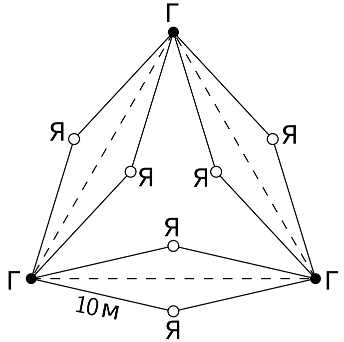
Решение. Удовлетворяющая условиям задачи расстановка чисел приведена на рисунке ниже.



□

Задача 1.4.21. («Математический праздник» — 2006.7.5) Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причём яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

Решение. Например, сад может выглядеть так, как показано на рисунке.



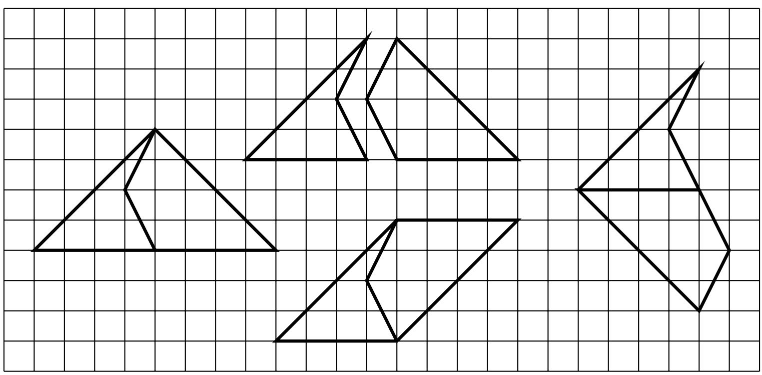
□

Задача 1.4.22. («Математический праздник» — 2009.7.5) Начертите два четырёхугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить:

а) как треугольник, так и пятиугольник;
б) и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник.

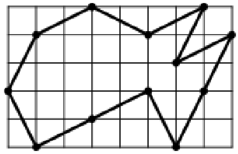
Покажите, как это можно сделать.

Решение. Один из возможных примеров показан на рисунке.

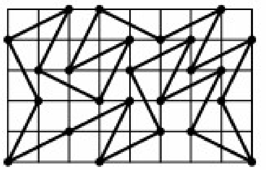


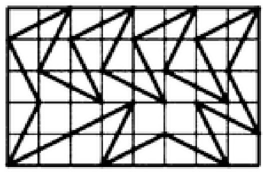
□

Задача 1.4.23. («Математический праздник» — 2014.7.5) Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображён пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.



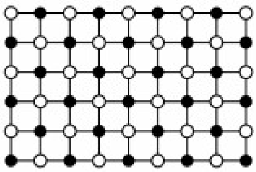
Решение. На рисунке ниже приведены два варианта наиболее длинного известного замкнутого пути (24 диагонали). Есть ли более длинные пути, пока неясно.





Замечания.

1. При первом взгляде может возникнуть подозрение, что путь длиннее 20 диагоналей нарисовать нельзя: «так как каждая диагональ занимает две клетки, всего их не больше $5 \cdot 8 : 2 = 20$. Но прямоугольники, «занимаемые» разными диагоналями, могут пересекаться. Именно поэтому в рисунке из ответа так много острых углов.
2. Любой путь, удовлетворяющий условию задачи, имеет чётную длину. Действительно, если мы покрасим узлы сетки в шахматном порядке (рисунок ниже), то каждая диагональ («ход коня») соединяет узлы разных цветов. Значит, чтобы закончить путь в том же узле, в котором он начинался, нужно сделать чётное число ходов.



□

Задача 1.4.24. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.1) У электромонтёра был кусок провода длиной 25 м, из которого утром он собирался вырезать необходимые для работы куски в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м и 12 м. Но утром обнаружилось, что ночью какой-то хулиган разрезал провод на две части. Сможет ли монтёр выполнить намеченные работы?

Решение. Из двух частей, на которые разрезан провод, хотя бы одна длиннее 12 м (иначе общая длина провода не превышала бы 24 м), поэтому от неё монтёр может отрезать кусок длиной 12 м.

Оставшиеся после отрезания двенадцатиметрового куска две части в сумме составляют 13 м, поэтому хотя бы одна из этих частей длиннее 6 м. От этой части монтёр может отрезать шестиметровый кусок.

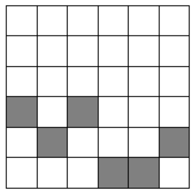
Оставшиеся две части в сумме составляют 7 м, поэтому от одной из этих частей монтёр может отрезать трёхметровый кусок.

Оставшиеся две части в сумме составляют 4 м, поэтому хотя бы одна из них не короче 2 м, значит, и двухметровый кусок монтёр сможет отрезать.

Из последних двух частей хотя бы одна не короче метра, поэтому монтёр сможет получить и метровый кусок.

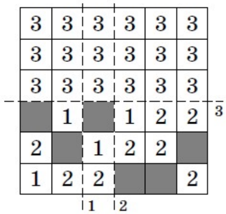
Таким образом, монтёр сможет выполнить намеченные работы. □

Задача 1.4.25. («Математический праздник» — 2013.7.2) В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат за: а) 5 или менее; б) 4 или менее; в) 3 или менее таких перегибания?



Если да, впишите в каждую клетку номер сгибания, после которого она будет закрашена впервые, линию сгиба проведите и пометьте той же цифрой. Если нет, докажите это.

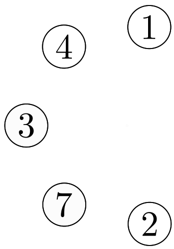
Решение. Можно, например, закрасить двумя вертикальными перегибаниями всю нижнюю половину квадрата (вдоль линий 1 и 2), после чего закрасить верхнюю половину одним горизонтальным перегибанием вдоль линии 3 (числами 1, 2 и 3 на рисунке обозначены клетки, закрашивающиеся соответственно при первом, втором и третьем перегибании).



Замечания. Закрасить все клетки за два перегибания нельзя. Действительно, при каждом перегибании количество клеток увеличивается не более чем в 2 раза. В начале закрашенных клеток 6, значит, после двух перегибаний будет закрашено не более $6 \cdot 2^2 = 24$ клеток. $\square$

Задача 1.4.26. («Математический праздник» — 2005.7.2) Можно ли расставить числа а) от 1 до 7; б) от 1 до 9 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

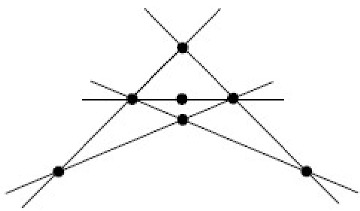
Решение. а) Можно расставить числа, например, как на рисунке.



б) Заметим, что нечётное число не делится на чётное, а значит, не может стоять в окружении чисел одинаковой чётности. Отсюда следует, что нечётные числа стоят парами. Однако среди чисел $1, 2, \ldots, 9$ пять нечётных, и поэтому из них нельзя образовать пары. $\square$

Задача 1.4.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.4;7.2) Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?

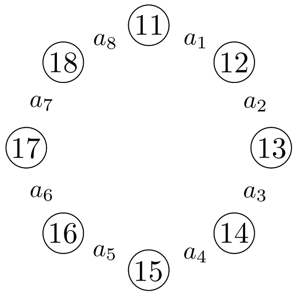
Решение. Можно, пример приведён на рисунке.

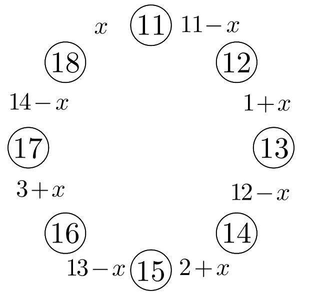


$\square$

Задача 1.4.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.4) По кругу было записано 8 чисел. Затем между каждыми соседними числами записали их сумму, а старые числа стёрли. Могло ли оказаться так, что теперь по кругу записаны числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?

Решение. **Первый способ.** Пусть x — число, стоявшее между 18 и 11. Тогда, двигаясь по часовой стрелке, можно последовательно выразить через x все остальные числа (рисунок справа). Действуя таким образом получим, что число, стоявшее между 17 и 18, равно $14 - x$. С другой стороны, это число в сумме с числом x должно быть равно 18, что невозможно. Следовательно, ситуации, описанной в условии, быть не могло.





Второй способ. Предположим, что изначально были записаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_8$ (рисунок слева). Подсчитаем их сумму двумя способами:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) = 12 + 14 + 16 + 18 = 60$$

и

$$(a_8 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) = 11 + 13 + 14 + 17 = 56.$$

Пришли к противоречию, следовательно, указанные в условии числа получиться не могли. □

Задача 1.4.29. («Математический праздник» — 2005.6.5) В числах **МИХАЙЛО** и **ЛОМОНОСОВ** каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

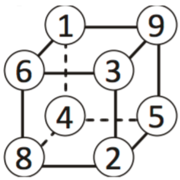
Решение. Заметим, что использованы 10 различных букв, поэтому каждая цифра обозначена какой-нибудь буквой, в частности, среди этих цифр есть нуль. Таким образом, произведение цифр одного (а значит, и второго) числа равно нулю. Следовательно, в записи обоих чисел есть нуль. В словах **МИХАЙЛО** и **ЛОМОНОСОВ** общие буквы **М**, **Л** и **О**, поэтому нуль обозначает одна из них. Это не могут быть **Л** и **М**, поскольку числа не могут начинаться с нуля. Значит, нуль обозначен буквой **О**. В числе **МИХАЙЛО** на конце нуль, то есть оно чётное. □

Задача 1.4.30. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.7.4) В 8*А* классе учится 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, молчанию и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Нужно распределить детей по кружкам так, чтобы каждый посещал только один кружок, причём из тех, которые хотел, и во всех кружках было поровну детей. Всегда ли это возможно?

Решение. Это можно сделать не всегда. Если, например, 13 человек желают посещать первый кружок, а остальные — второй и третий кружки одновременно, то распределить школьников поровну по всем кружкам не удастся. □

Задача 1.4.31. (Турнир Архимеда — 2012.4) Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были равны между собой, но не были кратны вычеркнутому числу?

Решение. Удовлетворяющая условию задачи расстановка чисел представлена на рисунке. Возможны другие примеры.



Замечание. Можно доказать, что вычеркнутой цифрой может быть только 7, но от участников этого не требовалось. □

Задача 1.4.32. («Математический праздник» — 2010.7.5) а) Поросёнок Наф–Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

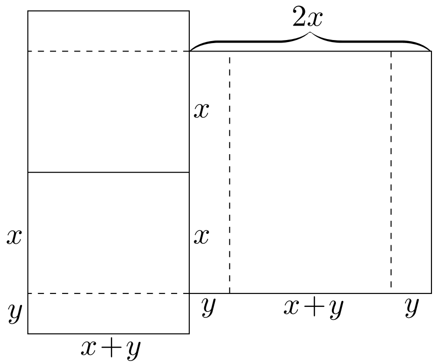
б) А может ли Наф–Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

Решение. а) Например, он может сложить башню из четырёх кубиков, «завернуть» её в квадрат 4×4, а низ и верх заклеить квадратами 1×1. б) На рисунке показано, как можно параллелепипед $1 \times 4 \times 6$ оклеить двумя квадратами 4×4 и одним квадратом 6×6. Большим квадратом оклеены три грани: передняя, нижняя и задняя, а каждым из меньших квадратов — половина верхней грани и одна из двух боковых.

Подобрать размеры параллелепипеда и квадратов можно следующим образом. Нарисуем развёртку из трёх квадратов, каждые два из которых граничат друг с другом (линии сгиба обозначены пунктиром), и попробуем подобрать размеры квадратов так, чтобы из неё можно было сложить параллелепипед. Пусть сторона правого квадрата равна $2x$. Один из отрезков, на которые разбиты боковые стороны другого квадрата, равен x. Обозначим второй через y. При складывании параллелепипеда боковая сторона нижнего квадрата должна приклеиваться к жирной линии. Поэтому их длины должны быть равны:

$$y + (x + y) + y = 2x,$$

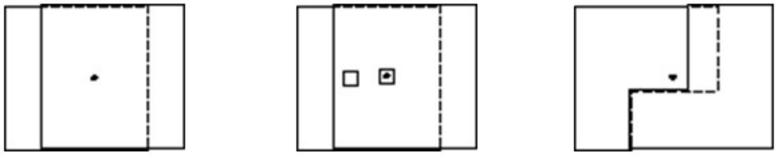
откуда $3y = x$. Если взять $y = 1$, $x = 3$, получается приведённый ниже пример.



□

Задача 1.4.33. («Математический праздник» — 2008.7.5) Серёжа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлёстом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

Решение. **Первый способ.** Пусть картонки изначально лежат одна на другой, и их края совпадают. Если картонки являются квадратными, перенеся одну вдоль другой и наложив их, легко сложить прямоугольник, но его центр будет лежать внутри обеих (рисунок слева). Это можно исправить, заметив, что центр получившегося прямоугольника не совпадает с центром первой квадратной картонки. Поэтому, вырезав небольшую дырочку из первой картонки в центре прямоугольника, мы можем получить решение (рисунок в центре).



Второй способ. Мог, например, при расположении картонок, показанном на рисунке справа.

Замечания. Если картонки не накладываются друг на друга и полностью покрывают дно прямоугольного ящика, то гвоздь в центре ящика обязательно воткнётся на границе, разделяющей картонки. Это утверждение кажется очевидным, но строго доказать его удалось лишь в 2002 г. (смотрите решение задачи 1.5 в [9]). □

5 Алгоритмы и операции

Задача 1.5.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.6.1) Даны две палочки. Их можно прикладывать друг к другу и делать отметки. Как с помощью этих операций выяснить, что больше — длина более короткой палочки или 2/3 длины более длинной палочки?

Решение. Приложим палочки друг к другу так, чтобы их концы совпадали, сделаем на длинной палочке засечку там, где закончилась короткая. Оставшееся расстояние большей палочки отмеряем на меньшей палочке с двух сторон. Если засечки совпадут, то длина более короткой палочки равна 2/3 длины более длинной палочки. Если между засечками осталось расстояние, меньшая палочка больше 2/3 большей палочки. Если засечки пересеклись, то наоборот. □

Задача 1.5.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.1) У первого из десяти друзей есть 5 тугриков, у второго — 10 тугриков, у третьего — 15 тугриков, и т. д., у десятого — 50 тугриков. Они сели на ковёр–самолёт, полёт на котором стоит 5 тугриков с носа. Смогут ли они честно расплатиться с ковром–самолётом, если тот не даёт сдачу и не разменивает деньги?

Решение. Да. Последний отдаёт 50 тугриков, ему предпоследний даёт 45, и так далее вплоть до первого, который даёт второму 5 тугриков. □

Задача 1.5.6. («Математический праздник» — 2010.7.1) У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

Решение. Число 11 на таком калькуляторе можно получить следующим образом: $((1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + 3 + 3) : 3 = 11$ или $(1 \cdot 3 + 3) : 3 + 3 + 3 + 3 = 11$.

Комментарий. Заметим, что на Юрином калькуляторе любое число можно увеличить на $1 : (x \cdot 3 + 3) : 3 = x + 1$. Поэтому, в принципе, из единицы на нём можно получить любое натуральное число. □

Задача 1.5.7. («Математический праздник» — 1994.6.2) Найдите в последовательности $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ число, стоящее на: а) 6; б) 1994 месте? Ответ объясните.

Подсказка. $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$.

Решение. Можно заметить, что $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, и предположить, что n-й член последовательности равен $n \cdot (n + 1)$. Проверка на четвёртом $(20 = 4 \cdot 5)$ и пятом $(30 = 5 \cdot 6)$ членах последовательности показывает, что мы угадали. Значит, на шестом месте стоит число $6 \cdot 7 = 42$, а на 1994-м — $1994 \cdot 1995 = 3978030$.

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно «доказать», что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, ... Однако для решения задачи требуется только найти достаточно простое правило, следуя которому, можно получить такую последовательность. А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы нашли бы какое-нибудь другое (но тоже «достаточно простое») правило, дающее последовательность $2, 6, 12, 20, 30$, то на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано. □

Задача 1.5.8. («Математический праздник» — 1998.6.2) Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

Решение. Сможет, например, лиса сначала три раза отрезает по 1 г от кусочков в 5 г и 11 г. Получатся один кусок в 2 г и два куска по 8 г. Теперь осталось шесть раз отрезать и съесть по 1 г от кусочков в 8 г. □

Задача 1.5.9. («Математический праздник» — 2014.6.3) Одуванчик утром распускается, два дня цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько:

а) жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера;
б) белых одуванчиков будет на поляне завтра?

Решение. а) Все одуванчики, которые позавчера были жёлтыми, стали белыми вчера или сегодня. Поэтому их было $14 + 11 = 25$.

б) Из вчерашних жёлтых одуванчиков 11 побелели сегодня, а остальные $20 - 11 = 9$ побелеют завтра. □

Задача 1.5.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.3) На левом берегу реки собрались 5 физиков и 5 химиков. Всем надо на правый берег. Есть двухместная лодка. На правом берегу ни в какой момент не могут находиться ровно три химика или ровно три физика. Каким образом им всем переправиться, сделав 9 рейсов направо?

Решение. В таблице ниже показано, как за 9 рейсов переправиться всем физикам (ф) и химикам (х) на правый берег.

Номер рейса	Левый берег	Уехали на правый	Вернулись на левый	Правый берег
0	5 ф, 5 х	—	—	—
1	5 ф, 4 х	2 х	1 х	1 х
2	4 ф, 4 х	2 ф	1 ф	1 ф, 1 х
3	4 ф, 3 х	1 ф, 1 х	1 ф	1 ф, 2 х
4	5 ф, 1 х	2 х	1 ф	4 х
5	5 ф	1 ф, 1 х	1 ф	5 х
6	3 ф, 1 х	2 ф	1 х	2 ф, 4 х
7	3 ф	1 ф, 1 х	1 ф	2 ф, 5 х
8	1 ф, 1 х	2 ф	1 х	4 ф, 4 х
9	—	1 ф, 1 х	—	5 ф, 5 х

□

Задача 1.5.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.3) Есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Фотоаппарат работает от двух заряженных батареек. Покажите, как за четыре попытки можно гарантированно включить фотоаппарат.

Решение. Вставим первую и вторую батарейки. Если фотоаппарат не работает, то либо одна из них разряжена, либо обе. Вставим теперь третью и четвёртую батарейки. Если фотоаппарат не работает, то:

1) одна из них разряжена;
2) из первых двух разряжена одна;
3) пятая батарейка точно работает.

Осталось проверить пятую батарейку в паре с каждой из первых двух. □

Задача 1.5.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.4) Пончик находится в сломанном луноходе на расстоянии 18 км от Лунной базы, в которой сидит Незнайка. Между ними устойчивая радиосвязь. Запаса воздуха в луноходе хватит на 3 часа, кроме того, у Пончика есть баллон для скафандра, с запасом воздуха на 1 час. У Незнайки есть много баллонов с запасом воздуха на 2 часа каждый. Незнайка не может нести больше двух баллонов одновременно (одним из них он пользуется сам). Скорость передвижения по Луне в скафандре равна 6 км/ч. Сможет ли Незнайка спасти Пончика и не погибнуть сам?

Решение. Незнайка с двумя баллонами идёт по дороге к луноходу. Пройдя 6 км, он оставляет полный баллон, а с одним возвращается обратно (как раз получается 2 часа). На базе он сразу же берёт ещё два баллона и вновь идёт к луноходу. На расстоянии 6 км он берёт оставленный полный баллон и оставляет половинный. В этот момент (как раз прошло 3 часа, и закончился воздух в луноходе) Пончик выходит ему навстречу с единственным баллоном. Через час они встречаются на расстоянии 6 км от лунохода и 12 км от базы. Незнайка даёт Пончику полный баллон, который позволит тому дойти до базы, а сам идёт с половинным до оставленного им другого половинного баллона, которого ему как раз хватит, чтобы дойти до базы. □

Задача 1.5.13. («Математический праздник» — 2014.7.4) Одуванчик утром распускается, три дня цветёт жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

Решение. Распустившийся одуванчик бывает белым на четвёртый и пятый день. Значит, в субботу будут белыми те одуванчики, которые распустились во вторник или среду. Определим, сколько их. Одуванчики, которые были белыми в понедельник, к среде облетели, а 20 жёлтых заведомо дожили до среды (быть может, став белыми). В среду на поляне было $15 + 11 = 26$ одуванчиков. Мы знаем, что 20 из них были на поляне ещё в понедельник, а остальные $26 - 20 = 6$ как раз распустились во вторник и среду. □

Задача 1.5.14. («Математический праздник» — 1990.6.4;7.4) Поставьте в ряд а) 5 простых чисел; б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в каждом ряду были равны.

Решение. Например, числа можно поставить следующим образом:

а) $121, 151, 181, 211, 241$;
б) $121, 151, 181, 211, 241, 271$.

□

Задача 1.5.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.4) В клубе встретились двадцать джентльменов. Некоторые из них были в шляпах, а некоторые — без шляп. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал её на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце десять джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу большее количество раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?

Решение. Поскольку десять джентльменов отдавали шляпу большее количество раз, чем её получали, то каждый из них пришёл в шляпе, а ушёл — без неё. Также заметим, что для того, чтобы уйти без шляпы, каждому из них нужно было её отдать кому-то, не имевшему шляпы, то есть в конце вечера десять джентльменов были в шляпах, и десять — без шляп. □

Задача 1.5.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.5;7.4) Вася выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова **ИНТЕГРИРОВАНИЕ**, а Маша сделала то же самое со словом **СУПЕРКОМПЬЮТЕР**. У кого получилось больше слов?

Решение. В данных словах одинаковое количество букв (по 14), поэтому вычеркнуть две буквы из каждого их них можно одинаковым количеством способов. Заметим, что при вычёркивании двух букв из слова **СУПЕРКОМПЬЮТЕР** все полученные слова будут различны, а при вычёркивании букв **РИ** и **ИР** из слова **ИНТЕГРИРОВАНИЕ** получается одно и то же слово **ИНТЕГРОВАНИЕ**. Поэтому, у Маши получится на одно слово больше. □

Задача 1.5.17. (Турнир Архимеда — 2017.4) На Новогоднем базаре продаются гирлянды из шариков. В каждой гирлянде 201 шарик: некоторые — красные, остальные — зелёные. Шарики волшебные — по команде Дежурного Снеговика они могут менять цвет: красные становятся зелёными, а зелёные — красными. За один раз он может поменять цвет каких-нибудь двух, трёх или четырёх шариков, расположенных подряд. За каждое перекрашивание Снеговик берет 1 копейку. Федя утверждает, что рубля ему заведомо хватит на то, чтобы превратить любую гирлянду в одноцветную. Прав ли Федя?

Решение. Пусть крайний справа шарик — зелёного цвета. Покажем, что можно любой набор из четырёх шариков перекрасить в зелёный цвет не более чем за 2 хода. Схема перекрашиваний (красный шарик — 1, зелёный шарик — 0) приведена в таблице:

1) 0001 ⇒ 1111 ⇒ 0000	2) 0010 ⇒ 1110 ⇒ 0000	3) 0011 ⇒ 0000
4) 0100 ⇒ 0111 ⇒ 0000	5) 0101 ⇒ 0011 ⇒ 0000	6) 0110 ⇒ 0000
7) 0111 ⇒ 0000	8) 1000 ⇒ 1111 ⇒ 0000	9) 1001 ⇒ 1111 ⇒ 0000
10) 1010 ⇒ 0110 ⇒ 0000	11) 1011 ⇒ 0111 ⇒ 0000	12) 1100 ⇒ 0000
13) 1101 ⇒ 1110 ⇒ 0000	14) 1110 ⇒ 0000	15) 1111 ⇒ 0000

В каждой четвёрке мы добиваемся нужного цвета не более чем за два хода. Четвёрок — 50. Следовательно, нам хватит рубля. □

Задача 1.5.18. («Математический праздник» — 2015.7.5) Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5}/\boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.) Как получить карточку с числом 2015 за:

а) 4 операции;
б) 3 операции?

Решение. Карточку с числом 2015 можно получить следующим образом:

а) $\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$, $\boxed{3}+\boxed{2}=\boxed{5}$, $\boxed{3}-\boxed{2}-\boxed{1}=\boxed{0}$, $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{5}=\boxed{2015}$ или

$$\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3},\ \boxed{1}\boxed{3}=\boxed{13},\ \boxed{3}\boxed{1}=\boxed{31},\ \left(\boxed{2}+\boxed{3}\right)\cdot\boxed{13}\cdot\boxed{31}=\boxed{2015};$$

б) $\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$, $\boxed{3}\cdot\boxed{2}\boxed{1}=\boxed{63}$, $\left(\boxed{63}+\boxed{2}\right)\cdot\boxed{3}\boxed{1}=\boxed{2015}$.

Замечания. Чтобы решить задачу, полезно разложить 2015 на простые множители: $2015 = 5\cdot 13\cdot 31$. Менее чем за 3 операции получить карточку с числом 2015 невозможно. □

Задача 1.5.19. («Математический праздник» — 1991.7.5) Даны две последовательности:

$$2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 \quad \text{и} \quad 3, 6, 12.$$

В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. Найдите этот закон. Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону). Докажите, что число 2^{1991} после нескольких переходов станет однозначным.

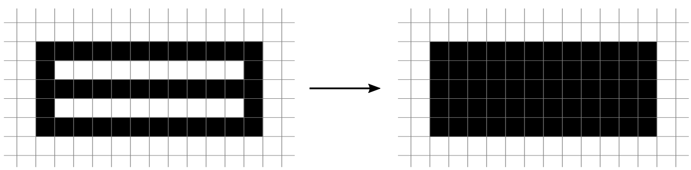
Решение. Закон можно угадать, заметив, например, что пока число однозначное, оно удваивается, а потом — вроде нет. А то, что 10 переходит в 2, наводит на мысль, что удваивается не само число, а сумма его цифр. Итак, искомый закон обнаружен: «удвоенная сумма цифр».

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно «доказать», что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на $6, \ldots$ Однако для решения задачи требуется только найти «достаточно простое» правило, следуя которому можно получить такую последовательность. А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы найдёте какой-нибудь другой (но тоже «достаточно простой») закон, дающий две последовательности $2, 4, 8, 16, 14, 10, 2$ и $3, 6, 12$, напишите, пожалуйста, в оргкомитет данной олимпиады (она указана в ссылке на задачу) (а на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано!).

Заметим, что если число не меньше, чем трёхзначное, то его сумма цифр меньше самого числа. Значит, число будет уменьшаться, пока не станет двузначным или однозначным. Остаётся единственная опасность: попасть в «неподвижную точку» — 18. Но это в нашем случае невозможно, так как исходное число не делилось на 9 (докажите строго следующее свойство нашего закона получения одних чисел из других: если некоторое число делится на 9, то и число, из которого оно получено, тоже делится на 9). $\square$

Задача 1.5.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.5) На бесконечном листе клетчатой бумаги x клеток покрашены в чёрный цвет. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх чёрные, становятся чёрными, а все клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх белые, становятся белыми. Остальные клетки не меняются. Может ли через несколько секунд случиться так, что на листе бумаги окажется ровно $\frac{3}{2}x$ чёрных клеток?

Решение. Может, удовлетворяющий условию задачи пример приведён на рисунке.



$\square$

Задача 1.5.21. («Математический праздник» — 1997.6.6) Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

Решение. Вот искомый алгоритм:

- папа с мамой — 2 мин;
- папа обратно с фонариком — 1 мин;
- малыш с бабушкой — 10 мин;
- мама обратно с фонариком — 2 мин;
- папа с мамой — 2 мин.

Всего 17 минут!

Замечания. Нужно освободиться от догмы, что фонарик обратно должен носить самый быстрый, то есть папа. Тогда уже нетрудно догадаться, что надо пустить вместе бабушку и малыша. □

Задача 1.5.22. («Математический праздник» — 1997.6.6) Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван–Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

– Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоём, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой?

Решение. Иван может разбить пленников на 20 пар и одну тройку и велеть Кощею сказать каждому, что все, кроме входящих с ним в одну пару (тройку), — оборотни. Тогда условие будет выполнено, а переправиться пленники смогут следующим образом. Назовём пленников из тройки **A**, **B** и **C**. Сначала переправляются **A** и **B**, потом **A** возвращается обратно. Затем переправляется некоторая пара, а возвращается **B**. В результате одна пара пленников переправлена на берег, а все остальные вместе с лодкой находятся на острове. Аналогично переправляются все остальные пары. Затем переправляются **A** и **B**, **A** возвращается и перевозит **C**. После этого **C** может отправиться за Иваном. При такой переправе никто никакой новой информации об оборотнях не узнает.

Замечание. Аналогичный способ переправы работает при любом разбиении пленников на пары и тройки. □

Задача 1.5.23. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.6) К кабинке канатной дороги, ведущей на гору, подошли четыре человека, которые весят 50, 60, 70 и 90 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка ездит туда-сюда только с грузом от 100 до 250 кг (в частности, пустой она не ездит), при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более, чем на 25 кг. Каким образом все они смогут подняться на гору?

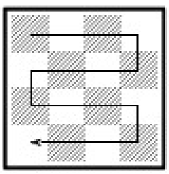
Решение. Будем обозначать людей числами, соответствующими их весу. Тогда возможен следующий алгоритм действий:

1) вверх едут $50 + 60$ и 90;
2) вниз едут 50 и 60;
3) вверх едут 60 и 70;
4) вниз едут 70 и 90;
5) вверх едут 50 и 70;
6) вниз едут 50 и 60;
7) вверх едут $50 + 60$ и 90.

Замечания. Из условия следует, что втроём могут ехать только 50, 60 и 90. А спускаться должны не менее чем двое. Значит, и первый, и последний подъёмы должны совершить 50, 60 и 90. □

Задача 1.5.24. («Математический праздник» — 1993.6.7) Али–Баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m \times n$ клеток, раскрашенных в шахматном порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в любую из четырёх соседних клеток (вверх, вниз, вправо или влево). При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо забрать из неё 1 монету, если, конечно, она не пуста. Может ли после прогулки Али–Бабы по пещере оказаться, что на чёрных клетках лежит ровно по 1 монете, а на белых монет нет?

Решение. Прямоугольник $m \times n$ можно обойти «змейкой», проходя каждую клетку по одному разу (рисунок для прямоугольника 4×4).



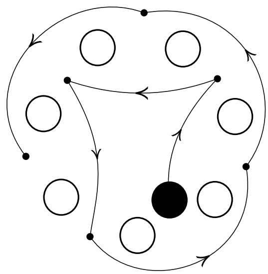
«Усложним» задачу, запретив Али–Бабе класть монету в клетку, где монета уже есть (то есть при ходе в клетку, где уже есть монета, он будет обязан её забрать). Заметим, что если Али–Баба будет следовать этому правилу, то ни в какой клетке не может оказаться две монеты.

Итак, пойдём по пещере (вместе с Али–Бабой) «змейкой» с мешком монет и будем стараться, чтобы в каждой клетке оказалось требуемое (правильное) количество монет. Сделав очередной ход, будем проверять, правильное ли количество монет на клетке, с которой мы только что ушли. Если правильное, то будем спокойно идти дальше. А если неправильное, то возможно только два варианта: 0 вместо 1 и 1 вместо 0. Сделаем шаг назад, изменим состояние «неправильной» клетки, а потом сделаем шаг вперёд.

Так, клетка за клеткой, мы добьёмся того, что на всех клетках, кроме, может быть, самой последней, — правильное количество монет. Если на последней клетке неправильное количество монет, то, пойдя назад, вперёд и назад, мы добьёмся, что на всех клетках будет правильное количество монет. □

Задача 1.5.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.7) По кругу стоят восемь козлов разного роста. Любой из них умеет перепрыгивать через двух соседних козлов против часовой стрелки. Докажите, что при любом начальном расположении козлов они смогут встать по росту.

Решение. На рисунке показано, каким образом любой козёл (чёрный) сможет допрыгать до любого места, то есть, встать за любым (белым), заранее выбранным. В это время остальные козлы стоят на своих местах. Поэтому, сначала второй по росту козёл встаёт за самым высоким, после чего за ним встаёт следующий по росту, и так далее. Такая операция возможна потому, что числа 2 и 7 — взаимно простые.



□

Задача 1.5.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.6) На столе лежит стопка карт «рубашкой» вверх. Требуется переложить их в обратном порядке (и снова «рубашкой» вверх), применив несколько раз такую операцию: из любого места стопки вынимаются две соседние карты, переворачиваются как единое целое и кладутся на прежнее место. При каком количестве карт в стопке это можно сделать?

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда количество карт n — нечётное число. Перенумеруем карты сверху вниз. При $n = 1$ задача уже решена.

При $n > 3$ будем действовать так. Перевернём две нижние карты, потом вторую и третью снизу, потом третью и четвёртую снизу, и т. д. При такой операции нижняя карта (имеющая номер n) окажется («всплывёт») на самом верху, а все остальные карты окажутся на одну позицию ниже. Действуя таким же образом, можно переложить карту с номером $n - 1$, которая теперь является нижней, на второе место. После этого с помощью той же операции можно переложить карту с номером $n - 2$ на третье место, и т. д. В конце концов карты в стопке окажутся в обратном порядке.

Заметим, что при перекладывании стопки в обратном порядке новый номер каждой карты будет той же чётности, что и первоначальный. Поэтому каждая карта должна перевернуться чётное число раз. Значит, все карты в результате такого перекладывания окажутся «рубашкой» вверх.

Рассмотрим теперь случай, когда количество карт n — чётное число. Допустим, что нам удалось переложить стопку в обратном порядке. При этом новый номер каждой карты получился другой чётности по сравнению с её первоначальным номером. Это значит, что карта была перевёрнута нечётное число раз. Значит, все карты в результате такого перекладывания оказались «рубашкой» вниз. Следовательно, переложить стопку из чётного числа карт нужным образом нельзя.

Значит, при любом нечётном количестве карт в стопке их можно переложить в обратном порядке, при чётном же количестве этого сделать нельзя. ☐

Задача 1.5.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.7) На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

Решение. Пусть в какой-то момент до полуночи на первом складе находится на d тонн пшена больше, чем на втором. В момент кражи эта разность уменьшается на $d/4$, а в момент, когда украденное зерно попадает на «чужой» склад, — ещё на $d/4$. Итак, каждую ночь разность уменьшается вдвое. Так как в начале эта разность составляла 16 тонн, то через 10 ночей она будет равна 16 т : 2^{10} = 15 кг 625 г. ☐

Задача 1.5.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.7.7) Восемь томов «Энциклопедии Козлов» сложили в стопку. Разрешается вынимать из стопки либо третью сверху книгу, либо самую нижнюю, и класть её наверх. Докажите, что независимо от начального расположения томов их можно сложить по порядку номеров.

Решение. Будем считать, что тома стоят по кругу. Тогда операция перекладывания нижнего тома наверх равносильна тому, что этот круг поворачивается, например, против часовой стрелки. При этом взаимное расположение томов не изменятся, то есть, такой операцией мы сможем поворачивать этот круг так, чтобы нужный нам том встал на нужное место. Тогда, операция перекладывания третьей сверху книги наверх стопки означает то же самое, что прыжок любого козла в задаче 1.5.25, для которой утверждение доказано. ☐

Задача 1.5.29. (Курчатов — 2016.8) На олимпиаду пришли 300 учеников из не менее чем 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три — из разных школ.

Решение. Если из какой-то школы пришло больше трёх учеников, то отделяем от них команды по три, пока возможно. В каждой школе остаток будет 0, 1 или 2 ученика. Поскольку общее число учеников кратно 3, и мы отделяли тройками, сумма остатков тоже кратна 3. Поэтому один ненулевой остаток быть не может. Рассмотрим случаи.

1. Есть два ненулевых остатка. Это могут быть только 1 и 2 из школ **А** и **Б**. Вернём по тройке учеников из двух других школ **В** и **Г**, и сформируем смешанные команды: две **БВГ** и одну **АВГ**.
2. Есть три или более ненулевых остатков. Формируем смешанные команды, беря по ученику из тех трёх школ, где остатки на данный момент наибольшие. Это означает, что если после взятия где-то остались 2 ученика, то мы брали только из остатков по 2. То есть, если какой-то остаток стал 0, то остальные не больше 1. Рассмотрим теперь момент, когда останется менее трёх ненулевых остатков. Но две или одна единица остаться не может (сумма не кратна 3), поэтому все остатки стали 0, то есть, все ученики распределены.

☐

Задача 1.5.30. (Московская математическая олимпиада — 2001.8.3) Даны шесть слов: **ЗАНОЗА**, **ЗИПУНЫ**, **КАЗИНО**, **КЕФАЛЬ**, **ОТМЕЛЬ**, **ШЕЛЕСТ**. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую (например, за один шаг можно получить из слова **ЗАНОЗА** слово **ЗКНОЗА**. Какое наименьшее число шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются бессмысленные)?

Решение. Запишем данные слова в столбик. После всех замен буквы в каждой колонке должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждой колонке сохранить наиболее частую букву (любую из них, если таких букв несколько). Например, в первой колонке можно оставить буквы **З** или **К**, они обе требуют четырёх замен. Минимальное число замен равно

$$4 + 4 + 5 + 4 + 4 + 4 = 25.$$

Замечания. Среди слов, которые могут получиться в результате, есть осмысленные, например, **ЗЕЛЕНЬ**, **КАПЕЛЬ** или **КАФЕЛЬ**. □

Задача 1.5.31. («Математический праздник» — 1991.5-6.2) Электрик был вызван для ремонта гирлянды из четырёх соединённых последовательно лампочек, одна из которых перегорела. На вывинчивание любой лампочки из гирлянды уходит 10 секунд, на завинчивание – 10 секунд. Время, которое тратится на другие действия, мало. За какое наименьшее время электрик заведомо может найти перегоревшую лампочку, если у него есть одна запасная лампочка?

Подсказка. Если после замены одной лампочки гирлянда не загорелась, то мы заменили исправную лампочку.

Решение. Предположим, что мы не заменяли какие-то две лампочки. Тогда, если нам не повезло, и одна из них — перегоревшая, то мы не сможем определить, какая именно. Значит, для того, чтобы заведомо определить перегоревшую лампочку, необходимо вывинтить хотя бы три из них (30 секунд) и завинтить на их место какие-то другие (ещё 30 секунд).

Покажем, что 60 секунд всегда хватит. Вывинтим первую лампочку и завинтим на её место запасную (прошло 20 секунд). Если гирлянда загорелась, то нам повезло и хватило даже 20 секунд. Если же гирлянда не загорелась, значит, единственная неисправная лампочка ещё в гирлянде, а у нас в руках опять исправная. Теперь вывинтим вторую и завинтим на её место бывшую первую (в сумме прошло 40 секунд). Если нам опять не повезло, то вывинчиваем третью лампочку, а на её место завинчиваем бывшую вторую (в сумме прошло 60 секунд). Если гирлянда всё ещё не горит, то, значит, неисправна последняя лампочка. Решение засчитывалось и тем школьникам, которые добавляли ещё 20 секунд на замену последней лампочки. □

Задача 1.5.32. (Турнир им. Ломоносова — 1986.8.4) В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

Подсказка. Выделим группу из 4 человек.

Решение. Передача информации может быть осуществлена следующим образом. Рассмотрим некоторых четверых людей в компании — назовём их **A**, **B**, **C**, **D**. Пусть сначала все члены компании, кроме **B**, **C** и **D**, звонят **A** и сообщают ему свои новости. Это потребует $k - 4$ звонка. Затем между собой говорят **A** и **B**, а также, **C** и **D**. После этого **A** говорит с **C**, а **B** с **D**, в результате чего все четверо будут знать все новости. За оставшиеся $k-4$ звонка **A** сообщает их всем остальным. □

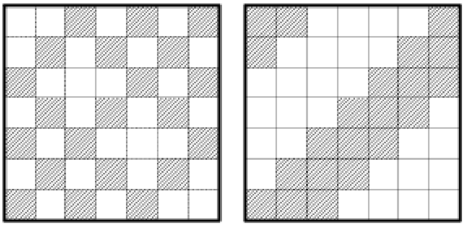
Глава 2

Вокруг геометрии

1 Раскраски

Задача 2.1.4. («Математический праздник» — 2000.6.2;7.1) В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по три закрашенных клетки.

Решение. Примеры закраски представлены на рисунке.



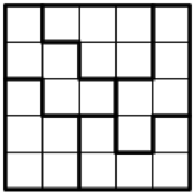
□

Задача 2.1.5. («Математический праздник» — 1990.6.1;7.1) Раскрасьте плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более, чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.

Подсказка. Нарисуйте две пересекающиеся прямые.

Решение. На белом листе бумаги проведём синей ручкой две пересекающиеся прямые, а их точку пересечения отметим чёрной ручкой. □

Задача 2.1.6. («Математический праздник» — 1996.6.6) Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке встречались все цвета.



Решение. Удовлетворяющая условию закраска приведена на рисунке ниже.

1	1	5	3	2	4
2	2	3	1	4	5
3	3	4	5	1	2
4	5	2	4	3	1
5	4	1	2	5	3
	a	b	c	d	e

Замечания. Введём на нашем квадрате координаты (как в шахматах). Раскрасим левый верхний блок: пусть клетка $a5$ окрашена в цвет 1, $a4$ — в цвет 2, $b4$ — в цвет 3, $b3$ — в цвет 4, $c3$ — в цвет 5. Тогда, очевидно, клетку $a3$ можно покрасить только в цвет 3 (рисунок слева).

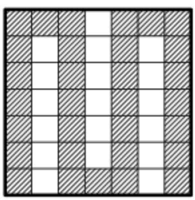
1	1				
2	2	3			
3	3	4	5		
4					
5					
	a	b	c	d	e

1	1				
2	2	3			
3	3	4	5		
4				3	
5					
	a	b	c	d	e

Рассмотрим верхний центральный блок. В нём клетка цвета 3 должна стоять на пятой горизонтали. Следовательно, в левом верхнем блоке клеткой цвета 3 может быть только $d2$ (рисунок справа).

Раскраска остальных клеток с помощью аналогичных рассуждений восстанавливается однозначно в следующем порядке: $c5$, $e1$, $d1$, $b5$, $d5$, $e5$, $d4$, $d3$, $c4$, $e4$, $e3$, $e2$, $a2$, $a1$, $b2$, $b1$, $c2$, $c1$. □

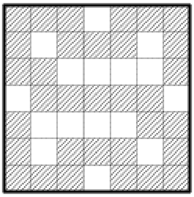
Задача 2.1.7. («Математический праздник» — 2002.6.4) Художник–авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку.

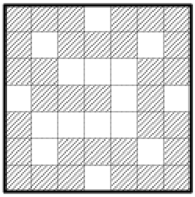


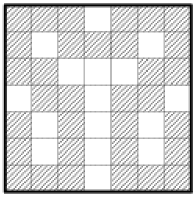
Побейте его рекорд — закрасьте а) 32 клетки; б) 33 клетки.

Подсказка. Не стремитесь закрасить целиком стороны, оставьте середины сторон незакрашенными.

Решение. а), б) Если мы умеем закрашивать 33 клетки, то 32 клетки можно закрасить, вовремя остановившись. Три примера, в которых закрашены 33 клетки, изображены на рисунке (на самом деле таких примеров гораздо больше). Больше 33 клеток закрасить нельзя — это проверено на компьютере.

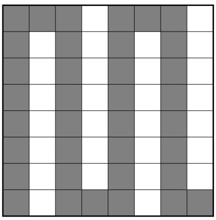




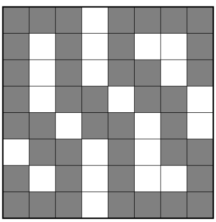


□

Задача 2.1.8. («Математический праздник» — 2002.7.5) Художник–авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна — ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток. Побейте его рекорд! (Жюри умеет закрашивать 42 клетки!)



Решение. Один из примеров закрашивания 42 клеток изображён на рисунке. Закрасить 43 клетки невозможно.



□

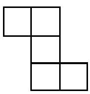
Задача 2.1.9. («Математический праздник» — 2001.6.6) Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить а) 26 клеток; б) 28 клеток. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

Решение. Пример закрашивания 28 клеток приведён на рисунке, 26 клеток можно закрасить, вовремя остановившись.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

□

Задача 2.1.10. («Математический праздник» — 2004.6.7) Клетки тетрадного листа раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдётся фигура вида



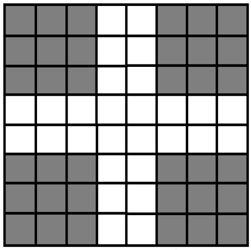
, внутри которой есть клетки одного цвета.

Решение. Рассмотрим на этом клетчатом листе квадратик 3×3 клетки. Для любых двух клеток этого квадрата найдётся такая фигура заданного вида, что эти клетки принадлежат этой фигуре. Но тогда, поскольку в квадрате 3×3 содержится 9 клеток, а цветов только 8, то найдутся две клетки одного цвета. Фигура, содержащая эти две клетки, и будет искомой. □

2 Метод раскраски

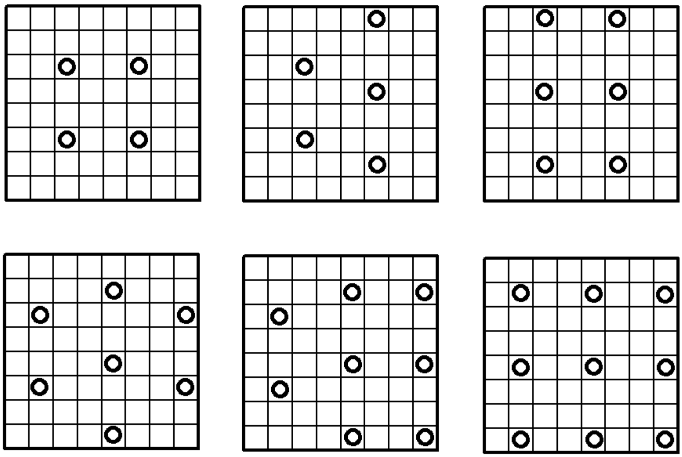
Задача 2.2.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.6) Сколько фишек может стоять на шахматной доске, если любой квадрат, состоящий из девяти клеток, содержит в точности одну фишку?

Решение. Квадрат можно разрезать на 4 квадрата 3×3, 1 квадрат 2×2 и 4 прямоугольника 2×3 (на рисунке ниже).



Поэтому ясно, что фишек не меньше 4 (иначе один из четырёх квадратов 3×3 останется без фишки) и не больше 9 (иначе в одной из 9 частей будет 2 фишки).

Осталось построить 6 примеров.

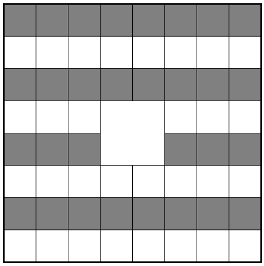


□

Задача 2.2.4. (Московская математическая регата — 2013/14.7.4.3) Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы «Г», состоящие из четырёх клеток?

Решение. Предположим, что искомое разрезание возможно. Покрасим горизонтали доски поочерёдно в два цвета («матрасиком», как на рисунке). Тогда в каждой фигурке, независимо от её расположения, будут три клетки одного цвета и одна клетка другого цвета. Так как в оставшейся части доски по 30 клеток каждого цвета, то фигурок при разрезании может получиться только чётное количество.

С другой стороны, фигурок будет $(64-4) : 4 = 15$, то есть нечётное количество. Противоречие.



□

Задача 2.2.5. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2014.9.6) Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать.

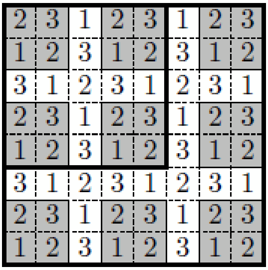
Решение. Раскрасим шахматную доску в три цвета по диагоналям, начиная с левого нижнего угла доски (рисунок слева). Тогда при разрезании части доски на прямоугольники 1×3 в каждом прямоугольнике окажутся клетки всех трёх цветов. Следовательно, после вырезания квадрата клеток каждого из цветов на доске должно остаться поровну. До вырезания на доске 21 клетка цвета 1, 22 клетки цвета 2 и 21 клетка цвета 3. Значит, вырезали квадрат, в котором две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3.

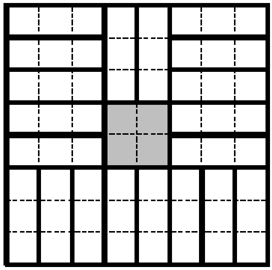
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1

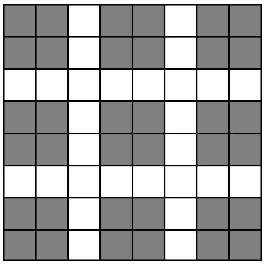
Таких квадратов много. Однако мы можем раскрасить доску ещё тремя аналогичными способами — начиная с правого нижнего угла доски, с правого или левого верхнего (пример раскраски, начинающейся с правого нижнего угла показан на рисунке справа выше). При каждом из этих способов раскраски количество клеток каждого цвета остается неизменным.

Следовательно, могли быть вырезаны только те квадраты, которые при каждом способе раскраски содержат две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов 9, они представлены на рисунке слева. Покажем, как разрезать оставшуюся доску для каждого из девяти случаев. Заметим, что вырезанный квадрат находится в одном из угловых квадратов 5×5 (рисунок слева). То есть достаточно показать, как разрезать на прямоугольники 1×3 квадрат 5×5 без одного из угловых квадратов 2×2 и оставшуюся часть доски. Это показано на рисунке справа.





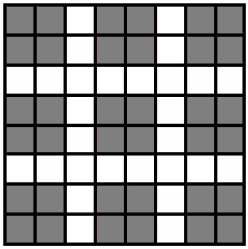
Таким образом, могли вырезать любой из девяти квадратов, закрашенных на рисунке.



□

Задача 2.2.6. (Московская математическая регата — 2017/18.11.2.3) Из клетчатой доски размером 8×8 выпилили восемь прямоугольников размером 2×1. После этого из оставшейся части требуется выпилить квадрат размером 2×2. Обязательно ли это удастся?

Решение. **Первый способ.** На рисунке показана доска размером 8×8, на которой цветом выделены девять квадратов размером 2×2 так, что никакие два из них нельзя «испортить» одним прямоугольником размером 2×1. Следовательно, после выпиливания восьми таких прямоугольников, хотя бы один квадрат останется «нетронутым», и его можно будет выпилить.

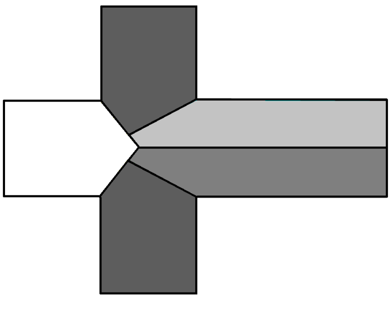


Второй способ. Из квадрата размером 8×8 можно вырезать $7 \cdot 7 = 49$ разных квадратов размером 2×2. Один вырезанный прямоугольник 2×1 делает непригодными для последующего вырезания не больше шести квадратов. Значит, после выпиливания восьми прямоугольников непригодными окажутся не более $8 \cdot 6 = 48$ квадратов, а один останется «нетронутым». □

3 Развёртки

Задача 2.3.4. (Всероссийская олимпиада по геометрии — 2005.23) Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками.

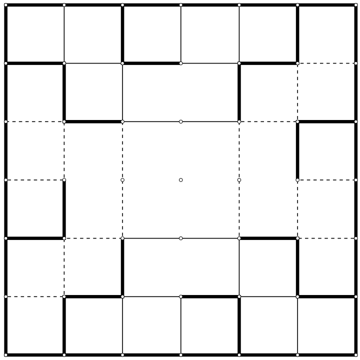
Решение. Укажем одно из возможных разбиений на развёртке. Пусть длина ребра куба равна 5. Белый и тёмно–серые пятиугольники состоят из квадрата (грани куба) и треугольника с основанием 5 и высотой 2, то есть имеют площадь 30. Светло–серый и серый пятиугольники равны, следовательно, имеют ту же площадь.



□

Задача 2.3.5. (Всероссийская олимпиада по геометрии — 2011.10.8) Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделённый перегородками на единичные кубики?

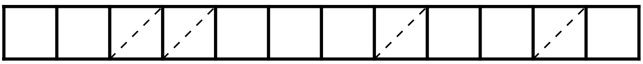
Решение. Искомая развёртка изображена на рисунке. Жирные линии обозначают разрезы, тонкие и пунктирные — сгибы вверх и вниз. Центральный квадрат 2×2 соответствует горизонтальной перегородке куба.



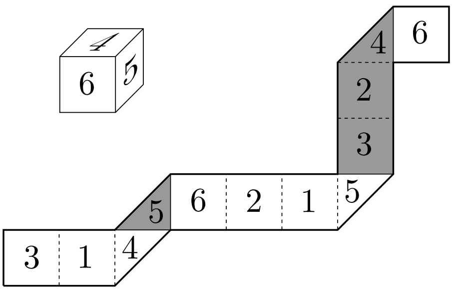
□

Задача 2.3.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2007.8-9.1) Дана прямоугольная полоска размером 12×1. Оклейте этой полоской в два слоя куб с ребром 1 (полоску можно сгибать, но нельзя надрезать).

Решение. Сложим полоску так, как это показано на рисунках (на первом рисунке пунктиром изображены линии сгиба, а на втором серым цветом закрашена оборотная сторона полоски). Полученной фигурой можно оклеить куб в два слоя.



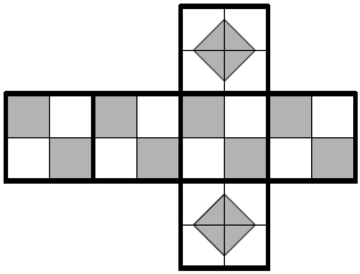
Для удобства пронумеруем грани кубика числами от одного до шести так, чтобы сумма чисел, записанных на противоположных гранях, равнялась семи. На развёртке соответствующие грани пронумерованы так же.



□

Задача 2.3.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.4) Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

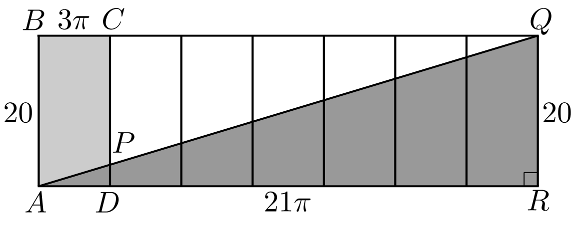
Решение. Один из возможных примеров приведён на рисунке. Для удобства наклейки изображены на развёртке куба.



□

Задача 2.3.8. (Московская математическая регата — 2011/12.10.2.2) Вокруг цилиндрической колонны высотой 20 метров и диаметра 3 метра обвита узкая лента, которая поднимается от подножия до вершины семью полными витками. Какова длина ленты?

Решение. Разрезав цилиндр вдоль образующей его боковой поверхности, проходящей через начало ленты, и развернув эту поверхность на плоскость, получим прямоугольник $ABCD$ размером $20 \times 3\pi$ (на рисунке). «Приклеив» к нему ещё шесть таких же прямоугольников, получим прямоугольник $ABQR$.



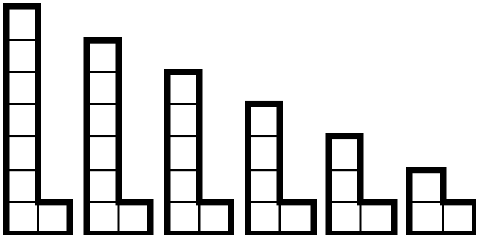
На этой развёртке первый виток ленты предстанет в виде отрезка AP, а вся лента развернётся в диагональ AQ прямоугольника $ABQR$. Значит, её длина:

$$l = AQ = \sqrt{RQ^2 + AR^2} = \sqrt{20^2 + (21\pi)^2} = \sqrt{400 + 441\pi^2} \approx 68{,}9 \text{ м.}$$

□

4 Замощение плоскости

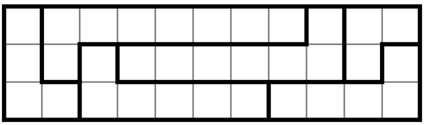
Задача 2.4.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.3) Из набора уголков, изображённых на рисунке, сложите прямоугольник.



Решение. Посчитаем число клеточек в будущем прямоугольнике:

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 33,$$

следовательно, одна сторона будет равна 3, а вторая — 11.

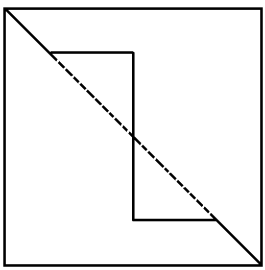


□

Задача 2.4.4. («Математический праздник» — 1990.5.4) Замостите плоскость одинаковыми семиугольниками.

Подсказка. Попробуйте разбить квадрат на два одинаковых семиугольника.

Решение. Замостим плоскость одинаковыми квадратиками (лист в «клеточку»), а теперь разобьём каждый квадратик на два одинаковых семиугольника, как показано на рисунке.

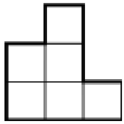


□

Задача 2.4.5. («Математический праздник» — 2004.6.4;7.5) Сложите из фигур, изображённых на рисунке:

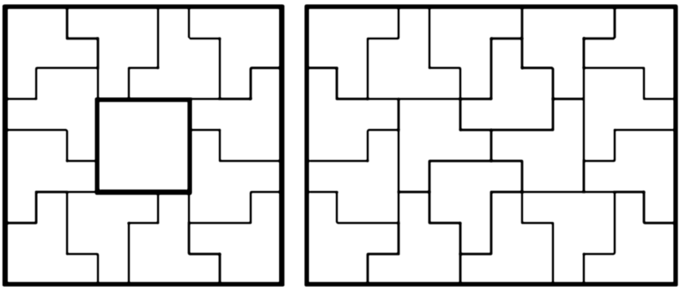
а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3;
б) прямоугольник размером 9×12.

Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.



Подсказка. Не забудьте, что фигурки можно переворачивать.

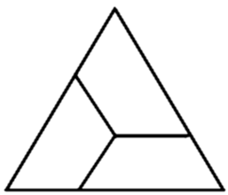
Решение. На рисунке слева представлен требуемый квадрат, а на рисунке справа — прямоугольник.



□

Задача 2.4.6. (Турнир городов. Осенний тур. Тренировочный вариант — 1996/97.8-9.2) При каких целых значениях n правильный треугольник со стороной n можно замостить плитками, имеющими форму равнобокой трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2?

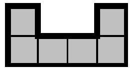
Решение. Правильный треугольник со стороной $n = 3k$ легко разбить на правильные треугольнички со стороной 3. Каждый из них разбивается на три трапеции, как показано на рисунке.



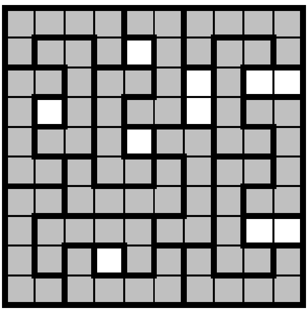
Если правильный треугольник со стороной n разбит на m трапеций, то его площадь равна, с одной стороны, n^2S, где S — площадь правильного треугольника со стороной 1, а с другой стороны, она равна $3mS$ (трапеция состоит из трёх треугольников со стороной 1). Отсюда $n^2S = 3mS$ или $n^2 = 3m$, то есть n кратно 3. □

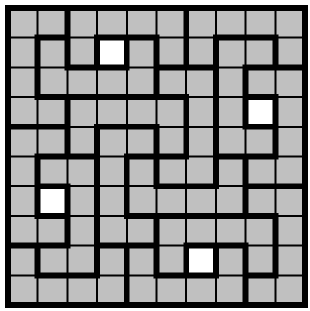
5 Замощения и разрезания с ограничениями

Задача 2.5.4. («Математический праздник» — 2005.6.4) Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображённых на рисунке. Попробуйте разместить больше.



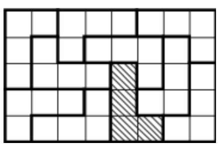
Решение. Можно разместить 14, 15 (рисунок слева) или даже 16 (рисунок справа) «скобок». Больше разместить нельзя, так как 17 «скобок» занимают уже 102 клетки.



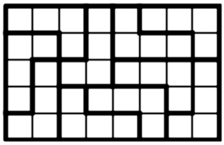


□

Задача 2.5.5. («Математический праздник» — 2003.6.5) В распоряжении юного паркетчика имеется 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы «Г» (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.)



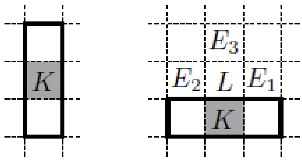
Решение. Может, например, как показано на рисунке ниже.



□

Задача 2.5.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.5) Вася нарисовал карандашом разбиение клетчатого прямоугольника на прямоугольники размером 3×1 (тримино), закрасил ручкой центральную клетку каждого из получившихся прямоугольников, после чего стёр карандашные линии. Всегда ли можно восстановить исходное разбиение?

Решение. Пусть есть два разных разбиения прямоугольника, у которых совпадают закрашенные клетки. Тогда среди этих закрашенных клеток есть такие, которые в одном разбиении соответствуют вертикальной, а в другом — горизонтальной триминошке (назовём такие закрашенные клетки плохими).

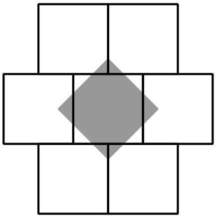


Среди плохих клеток найдём самую верхнюю (любую, если их несколько). Пусть это клетка K и в первом разбиении K покрыта вертикальной, а во втором — горизонтальной триминошкой (рисунок выше). Рассмотрим клетку L — соседнюю с K сверху. Она принадлежит прямоугольнику, поскольку в первом разбиении она покрыта вертикальной триминошкой. Во втором разбиении этой триминошки нет, так что одна из клеток E_1, E_2, E_3 — соседей L справа, слева и сверху — закрашена: это центр триминошки, покрывающей L во втором разбиении. Но в первом разбиении L покрыта не ею, так что найденная нами закрашенная клетка — плохая. Однако E_1, E_2 и E_3 лежат выше K, что противоречит тому, как мы выбирали K.

Значит, исходное разбиение можно восстановить всегда. □

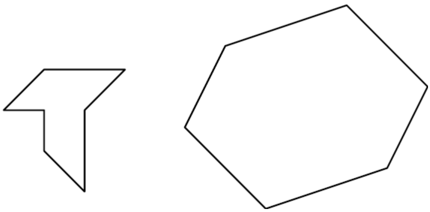
Задача 2.5.7. («Математический праздник» — 1999.6.6) На плоскости нарисован серый квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть серого квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

Решение. На рисунке приведён пример искомого расположения серого квадрата и семи плиток.

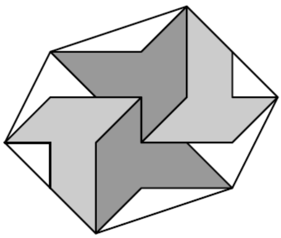


□

Задача 2.5.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.8) Предложенные вам четыре одинаковые фигуры (рисунок слева) требуется уложить в шестиугольник (рисунок справа) так, чтобы они не выступали за его границы и не накладывались друг на друга (даже частично).



Решение. Удовлетворяющая условию укладка фигур показана на рисунке.

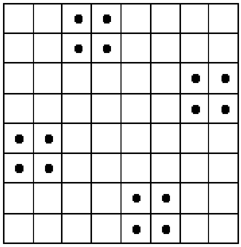


□

6 Геометрия на клетчатой бумаге

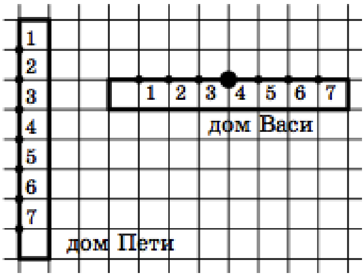
Задача 2.6.5. («Математический праздник» — 1993.7.1) Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

Решение. Можно, например, как показано на рисунке ниже.

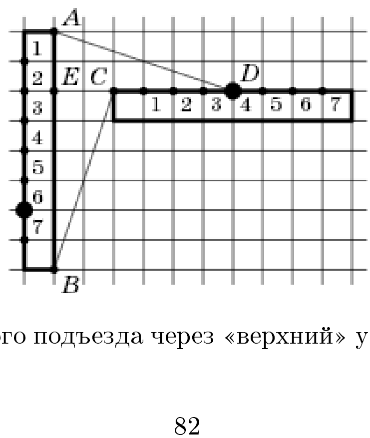


□

Задача 2.6.6. («Математический праздник» — 2009.7.1) Петя и Вася живут в соседних домах (план на рисунке). Вася живёт в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путём (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.



Решение. Кратчайший путь от точки A до Васиного подъезда — отрезок AD (на рисунке ниже). Кратчайший путь от точки B до Васиного подъезда — это путь по отрезку BC, а далее — по отрезку CD. Так как треугольники $\triangle AED$ и $\triangle CEB$ равны, $AD = BC$. Поэтому пути от точек A и B до Васиного подъезда отличаются на 4 клетки.



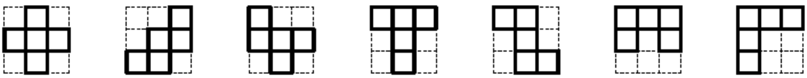
Так как пути от Петиного подъезда через «верхний» угол (то есть через точку

A) и через «нижний» угол (то есть через точку B) равны, путь от Петиного подъезда до точки A должен быть длиннее на 4 клетки, чем путь до точки B.

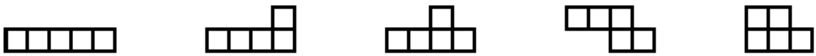
Значит, Петя живёт в шестом подъезде. □

Задача 2.6.7. («Математический праздник» — 2013.6.2) Из каждого клетчатого квадрата со стороной 3 клетки вырезается фигура из пяти клеток с таким же периметром, как у квадрата, но площадью 5 клеток. Саша утверждает, что сможет вырезать 7 таких различных фигур (никакие две из них не совместятся при наложении, даже если фигуры переворачивать). Не ошибается ли он?

Решение. Саша не ошибается, удовлетворяющие условию задачи фигуры приведены на рисунке.

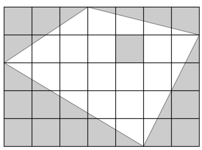


Замечания. Других фигур, удовлетворяющих условию, нет. Всего фигур пентамино (состоящих из пяти клеток) двенадцать, при этом четыре из них не поместятся в квадрат 3×3, а пятая имеет другой периметр (рисунок ниже).

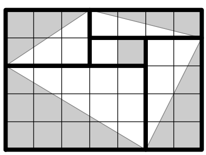


□

Задача 2.6.8. (Турнир Архимеда — 2013.2) Имение маркиза Карабаса имеет форму прямоугольника (на рисунке ниже). Часть участка занимает лес (выделен тёмным), остальное — пастбища. Чего у маркиза больше — леса или пастбищ? Ответ объясните.

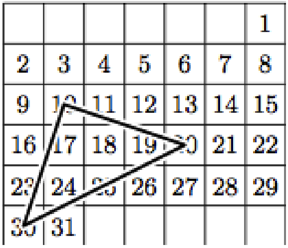


Решение. Дополним тёмные треугольники до прямоугольников равными треугольниками (рисунок ниже). Видно, что площадь светлых участков равна площади тёмных участков. Таким образом, леса и пастбищ у Маркиза поровну.

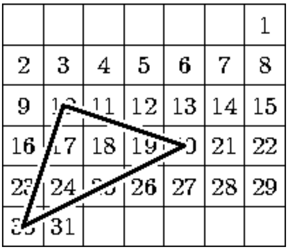


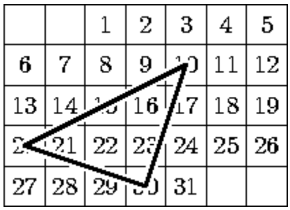
□

Задача 2.6.9. («Математический праздник» — 2006.7.3) Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (на рисунке ниже) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?

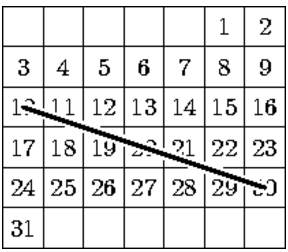


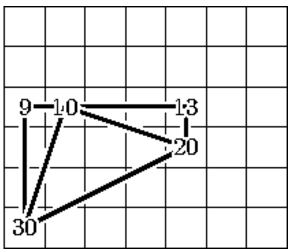
Решение. Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре. При этом существует всего 2 существенно различных варианта расположения треугольника 10 – 20 – 30 (рисунок ниже), все остальные получаются из первых двух горизонтальными сдвигами треугольника.





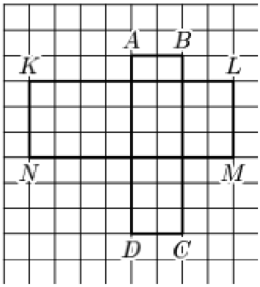
Проверим Наташино предположение для первого случая, а для второго случая рассуждения будут аналогичными. Очевидно, что у треугольника 30–9–10 угол 9 прямой (рисунок справа), и, аналогично, является прямым угол 13 у треугольника 10–13–20.



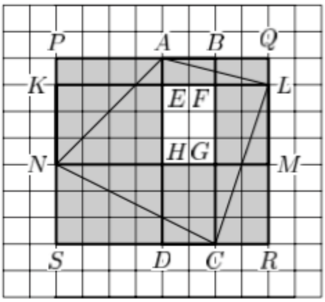


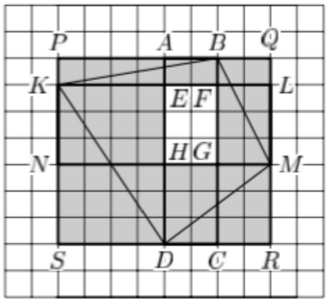
Ясно, что стороны 9–30 и 10–13 равны; аналогично, равны стороны 9–10 и 13–20. Поэтому треугольники 9–30–10 и 13–10–20 равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезки 10–30 и 10–20 равны. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, получаем, что сумма острых углов в треугольнике 9–10–30 равна $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Осталось заметить, что сумма углов, дополняющих угол 10 до развёрнутого угла, равна сумме острых углов треугольника 9–10–30. Значит, угол 10 тоже равен 90°. Итак, треугольник 10–20–30 является равнобедренным прямоугольным. □

Задача 2.6.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.8) Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ имеют соответственно параллельные стороны и расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади четырёхугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.



Решение. Нарисуем ещё один прямоугольник $PQRS$. Тогда площадь четырёхугольника $ALCN$ состоит из площадей четырёх треугольников и прямоугольника $EFGH$. Площадь каждого из этих треугольников равна половине площади соответствующего прямоугольника. Следовательно, площадь $ALCN$ равна сумме половине площади серой фигуры и площади $EFGH$ (рисунок слева).

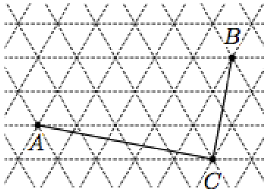




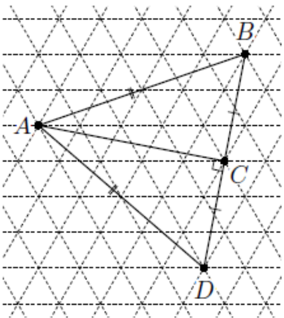
Проведя аналогичные рассуждения для четырёхугольника $KBMD$, получим, что его площадь также равна сумме половины площади серой фигуры и площади $EFGH$ (рисунок справа).

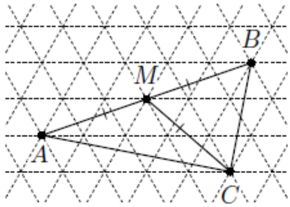
Таким образом, площади четырёхугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны. □

Задача 2.6.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.7.8) На сетке из равносторонних треугольников построен угол ACB. Найдите его величину.



Решение. **Первый способ.** Продлив отрезок BC на его длину за точку C, получим точку D (рисунок слева).

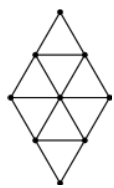




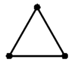
Проведя отрезки AD и AB, заметим, что они равны, то есть треугольник $\triangle ABD$ — равнобедренный. Так как AC — медиана этого треугольника, проведённая к его основанию, то AC — высота, то есть $\angle ACB = 90°$.

Второй способ. Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$. Пусть M — середина AB (рисунок справа). Заметим, что $AM = BM = CM$, то есть медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник $\triangle ABC$ — прямоугольный: $\angle ACB = 90°$. □

Задача 2.6.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.2) Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку. А сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники со стороной в одну спичку?



Решение. **Первый способ.** Подсчитаем количество треугольников со стороной в одну спичку, у которых спичка в основании расположена горизонтально (рисунок ниже). Каждый такой треугольник является верхней половинкой маленького ромбика со стороной в одну спичку. В ромбе со стороной 10 таких ромбиков $10 \cdot 10 = 100$.



Так как никакие два из рассматриваемых треугольников не имеют общих спичек, то на них уйдёт $100 \cdot 3 = 300$ спичек. Если убрать все такие треугольники, то останутся только спички, составляющие две нижние стороны большого ромба. Их — 20, значит, всего потребуется $300 + 20 = 320$ спичек.

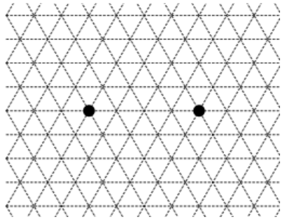
Второй способ. Ромб со стороной в 10 спичек состоит из 100 маленьких ромбиков. На каждый из маленьких ромбиков уходит 5 спичек, поэтому на 100 ромбиков потребовалось бы 500 спичек, если бы некоторые из спичек не были границей двух ромбиков, а, значит, учтены дважды. Найдём количество спичек, которые принадлежат только одному ромбику. Это — 40 спичек, образующих контур большого ромба, и 100 спичек, лежащих горизонтально. Следовательно, было $500 - 140 = 360$ «двойных» спичек. Таким образом, потребуется $140 + 360 : 2 = 320$ спичек.

Третий способ. Подсчитаем по отдельности спички, расположенные в каждом из трёх направлений. Параллельно двум сторонам ромба расположено ещё 9 отрезков, каждый из них (включая эти стороны), состоит из десяти спичек, итого: 110 спичек. Ещё 110 спичек лежат параллельно двум другим сторонам ромба. И ещё 100 спичек лежат горизонтально (это видно из предыдущих способов подсчёта, но можно сосчитать и непосредственно:

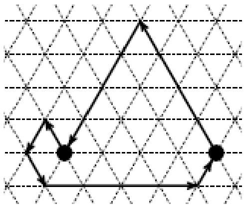
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100.$$

$\square$

Задача 2.6.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.2) Коля и Макс живут в городе с треугольной сеткой дорог. В этом городе передвигаются на велосипедах, при этом разрешается поворачивать только налево. Коля поехал в гости к Максу и по дороге сделал ровно 4 поворота налево. На следующий день Макс поехал к Коле и приехал к нему, совершив только один поворот налево. Оказалось, что длины их маршрутов одинаковы. Изобразите, каким образом они могли ехать (дома Коли и Макса отмечены на рисунке).



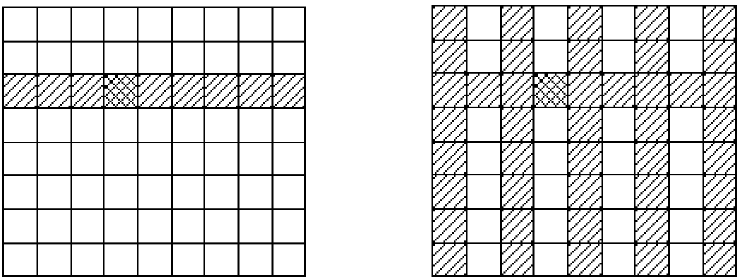
Решение. Коля и Макс могли ехать, как показано на рисунке ниже (длина маршрута каждого — 8 единичных отрезков).



□

Задача 2.6.14. («Математический праздник» — 2006.7.6) Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника: а) 8×9; б) 8×10 клеток?

Решение. а) Сначала закрасим ряд длиной 9 клеток, содержащий изначально закрашенную клетку (левый рисунок). Далее будем красить столбцы через один, начиная закраску от покрашенного ряда (правый рисунок). После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.



Данный способ покраски обобщается на тот случай, когда хотя бы одна из сторон прямоугольника имеет нечётную длину. Повернём прямоугольник так, чтобы его ширина была нечётной, а после этого повторим только что описанную процедуру: красим ряд нечётной длины, и так далее.

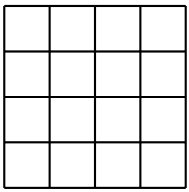
б) **Первый способ.** Посмотрим на полупериметр фигуры, состоящей из закрашенных клеток. Вначале, когда закрасили одну клетку, полупериметр равен 2. На каждом шаге полупериметр или увеличивается на 1 (если у клетки была только одна соседняя закрашенная клетка) или уменьшается на 1 (если таких соседей было 3), то есть полупериметр увеличивается или уменьшается на 1. Следовательно, когда закрашено чётное число клеток, полупериметр закрашенной фигуры нечётен. Заметим, что полупериметр всего прямоугольника 8×10 равен 18, то есть чётный, поэтому весь прямоугольник закрасить нельзя.

Второй способ. Докажем, что для чётных m и n прямоугольник $m \times n$ нельзя закрасить ни при какой начальной закрашенной клетке. Посмотрим, сколько всего сторон имеют клеточки (включая внешние). Сторон клеточек

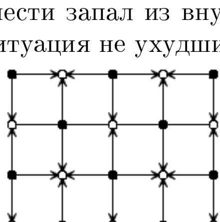
$$m(n+1) + n(m+1) = 2mn + m + n,$$

то есть чётное число. Предположим, что мы смогли закрасить весь прямоугольник. Будем называть сторону закрашенной, если закрашена хотя бы одна из прилегающих к ней клеток. Вначале закрашено 4 стороны. На каждом шаге закрашивается 1 или 3 стороны. Всего таких шагов нужно сделать $nm - 1$. Поскольку m и n чётны, то число $nm - 1$ нечётно. Итак, если бы мы смогли закрасить весь прямоугольник, то было бы закрашено $4 +$ (нечётное число раз по нечётному числу) сторон, то есть нечётное число, но, как мы уже посчитали, таких сторон чётное число, значит, весь прямоугольник закрасить нельзя. $\square$

Задача 2.6.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.8) Есть 40 одинаковых шнуров. Если поджечь любой шнур с одной стороны, он сгорает, а если с другой — не горит. Вася раскладывает шнуры в виде квадрата (на рисунке каждый шнур — сторона клетки). Затем Петя расставляет 12 запалов. Сможет ли Вася разложить шнуры так, что Пете не удастся сжечь все шнуры?



Решение. Приведём конструкцию, для которой 12 запалов недостаточно. Можно считать, что Пете разрешается устанавливать запалы только на концах шнуров. Ведь если перенести запал из внутренней точки шнура к тому концу, с которого он горит, ситуация не ухудшится.



Поставим на каждом шнуре стрелочку в том направлении, в котором он может гореть. Покрасим узлы сетки в шахматном порядке. Узлов одного из цветов, пусть чёрного, будет тринадцать. Пусть из этих узлов все стрелочки выходят (смотрите рисунок). Тогда каждый из шнуров, выходящих из чёрной точки, может сгореть, только если в эту точку помещен запал. Но запалов всего 12, а точек 13.

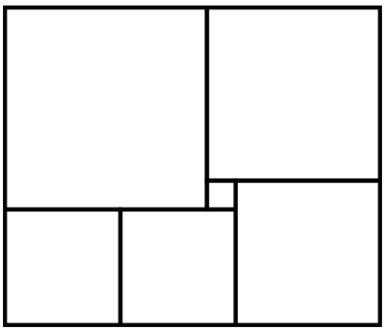
Значит, Вася сможет разложить шнуры так, что Пете не удастся их все сжечь. □

Задача 2.6.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.8) Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2009, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Решение. Докажем, что найдётся прямоугольник, длина и ширина которого — числа одинаковой чётности (тогда его периметр будет делиться на 4). Предположим, что это не так, то есть у каждого из прямоугольников длина и ширина выражаются числами разной чётности. Тогда площадь каждого прямоугольника — чётное число, следовательно, и площадь квадрата также должна быть чётным числом, а на самом деле площадь квадрата равна 2009^2. Противоречие. □

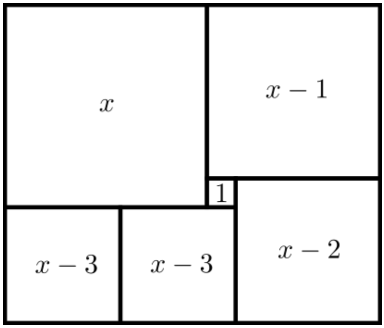
7 Геометрия квадратов и прямоугольников

Задача 2.7.5. («Математический праздник» — 1995.6.3) Прямоугольник составлен из шести квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



Подсказка. Сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького.

Решение. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через x, последовательно выразим стороны других квадратов: $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-3$, как показано на рисунке.

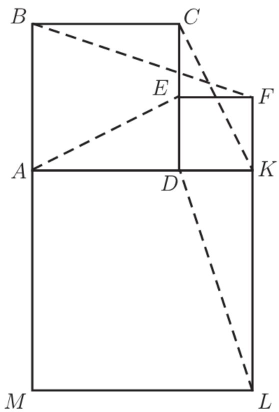


Теперь заметим, что длина верхней стороны прямоугольника равна $x+(x-1)$, а длина нижней — $(x-2)+(x-3)+(x-3)$. Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение:

$$x + (x-1) = (x-2) + (x-3) + (x-3).$$

Отсюда $2x - 1 = 3x - 8$ и, значит, $x = 7$. □

Задача 2.7.6. («Математический праздник» — 1993.6.6) Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

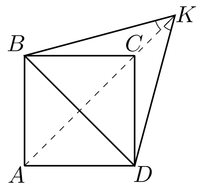


Подсказка. $DL = BF$.

Решение. Заметим, что $AD = CD = 2$, $ED = DK = 1$. Поэтому два прямоугольных треугольника $\triangle AED$ и $\triangle CKD$ равны. А значит, равны и отрезки AE и CK. Аналогично $FB = DL$. Кроме того, $EF = KD$ как стороны квадрата. Поэтому $AE + EF + FB = CK + KD + DL$. Таким образом, длины маршрутов равны. □

Задача 2.7.7. («Математический праздник» — 2017.7.4) Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол $\angle BKC$.

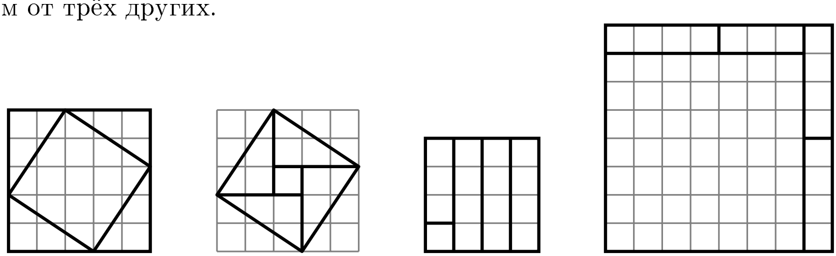
Решение. Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, то $DK = BK = AC$. А так как диагонали в квадрате равны, $AC = BD$.



Таким образом, треугольник $\triangle BKD$ — равносторонний, и угол $\angle BKD = 60°$. В силу симметрии относительно прямой AC, KA — биссектриса этого угла. Значит, $\angle BKC = 30°$. □

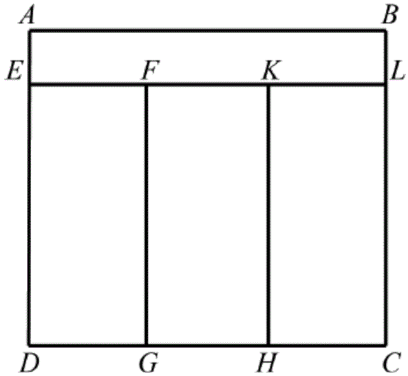
Задача 2.7.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.9) У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

Решение. Приведём два из возможных примеров. Рисунки слева соответствует тому, что у Вики четыре одинаковых треугольника, а рисунки справа — тому, что у Вики четыре прямоугольника, один из которых отличается размером от трёх других.



□

Задача 2.7.9. (Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2016.6.5) Прямоугольник $ABCD$ разделили на четыре меньших прямоугольника с одинаковыми периметрами. Известно, что $AB = 18$ см, а $BC = 16$ см. Найдите длины сторон остальных прямоугольников.



Решение. Пусть $DE = GF = HK = CL = c$, $DG = x$, $GH = y$, $HC = z$. Из условия равенства периметров прямоугольников $DGFE$, $GHKF$ и $HCLK$ следует, что $x = y = z$. Но так как $AB = DG + GH + HC = 3x = 18$, то $x = 6$ см.

$BL = BC - CL = 16 - c$. Из условия равенства периметров прямоугольников $DGFE$ и $ELBA$ следует, что $6 + c = 16 - c + 18$, откуда $c = 14$ см.

Значит, длины сторон прямоугольников $DGFE$, $GHKF$ и $HCLK$ равны 6 см и 14 см; длины сторон прямоугольника $ELBA$ равны 2 см и 18 см. □

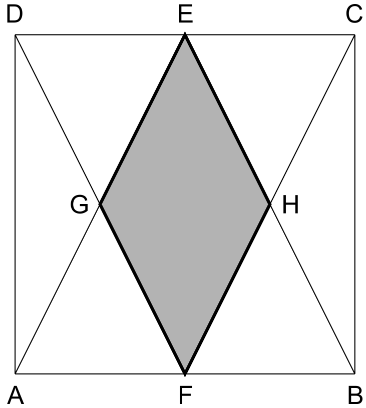
Задача 2.7.10. («Покори Воробьёвы горы» 2016.5–6.4; 7–8.3) Маленький огород размером 6×7 метров разбили на 5 квадратных грядок. Все межи между грядками проходят параллельно сторонам прямоугольника, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся меж. Считать межи линиями, не имеющими толщины.

Решение. Площадь огорода, равную 42 м^2, можно разбить на 5 квадратов только одним способом: $42 = 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$.

Их суммарный периметр равен 56 м, но надо отнять длину внешних границ 26 м, получим 30 м, а также учесть, что каждая межа участвует в периметре двух квадратов — поэтому надо поделить на 2. Значит, суммарная длина получившихся меж — 15 метров. □

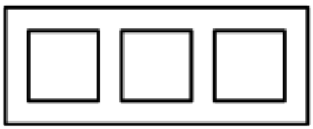
Задача 2.7.11. («Покори Воробьёвы горы» 2016.5–8.5) В квадрате $ABCD$ точки F и E — середины сторон AB и CD соответственно. Точку E соединили с вершинами A и B, а точку F — с C и D, как показано на рисунке.

Определите площадь ромба $FGEH$, образовавшегося в центре, если известна сторона квадрата $AB = 4$.



Решение. Квадрат можно разрезать на кусочки и сложить ещё три таких же ромба. Значит, площадь ромба $FGEH$ составляет $1/4$ от площади квадрата, т. е. 4. □

Задача 2.7.12. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2015.6.4) Рамка для трёх квадратных фотографий имеет везде одинаковую ширину. Периметр одного отверстия равен 60 см, периметр всей рамки равен 180 см. Чему равна ширина рамки?



Решение. Из условия следует, что длина стороны отверстия равна 15 см. Пусть d см — ширина рамки, тогда периметр прямоугольника равен

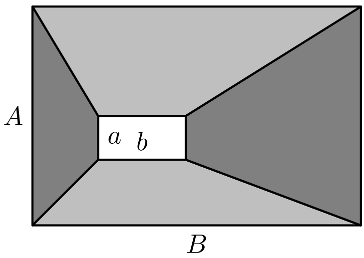
$$8 \cdot 15 + 12d = 120 + 12d = 180,$$

откуда получаем

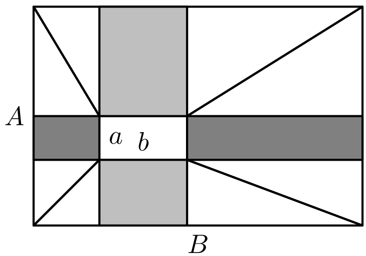
$$12d = 60, \Rightarrow d = 5.$$

Значит, $d = 5$ см. □

Задача 2.7.13. («Покори Воробьёвы горы» 2015.7.2) Внутри большого прямоугольника размером $A \times B$ расположен маленький прямоугольник размером $a \times b$. Найдите разность между суммарной площадью светло–серых и суммарной площадью тёмно–серых четырёхугольников, если известно, что $A = 20$, $B = 30$, $a = 4$, $b = 7$.



Решение. Если убрать одинаковые треугольники (на рисунке ниже), то площади оставшихся частей (светло-серой и тёмно-серой) равны $b \cdot (A - a)$ и $a \cdot (B - b)$.



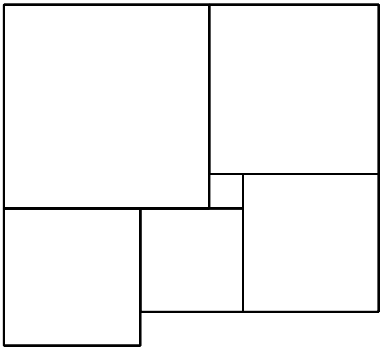
Значит, искомая разность равна $b \cdot (A - a) - a \cdot (B - b) = bA - ba - aB + ab =$
$= bA - aB = 7 \cdot 20 - 4 \cdot 30 = 20.$ $\square$

Задача 2.7.14. («Покори Воробьёвы горы» 2014.7.3) Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на чертеже. Найдите площадь общего пастбища.

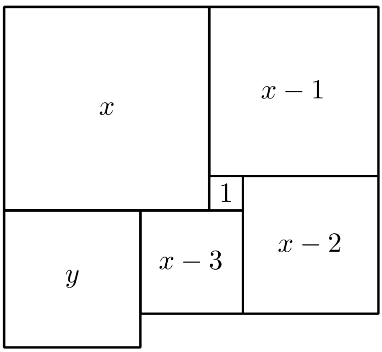
Иванов 28 га	Лес	Ермолаев 30 га
Петров 28 га	Общее пастбище	озеро
пустырь	Сидоров 10 га	Васильев 20 га

Решение. Поле Васильева в 2 раза больше, чем у Сидорова, следовательно, его ширина в 2 раза больше. Из этого вытекает, что площадь леса равна 15 га. Значит, площадь поля Иванова относится к площади леса как 24 : 15. Поэтому так же относится площадь поля Петрова к площади общего пастбища. Уравнение $24 : 15 = 28 : x$ имеет решение $x = 17{,}5$. Значит, площадь общего пастбища 17,5 га. □

Задача 2.7.15. («Математический праздник» — 1995.7.3) Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.



Решение. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через x, последовательно выразим стороны других квадратов: $x-1$, $x-2$, $x-3$ (рисунок ниже). Сторону левого нижнего квадрата нам выразить через x не удалось, поэтому придётся обозначить её через y.



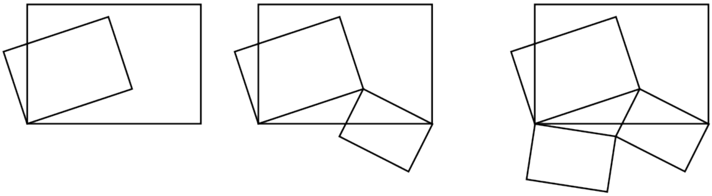
Теперь заметим, что верхняя сторона прямоугольника равна $x+(x-1)$, а нижняя — $(x-2)+(x-3)+y$. Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение

$$x + (x - 1) = (x - 2) + (x - 3) + y.$$

Отсюда $2x - 1 = 2x - 5 + y$ и, значит, $y = 4$. □

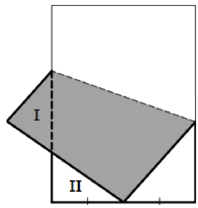
Задача 2.7.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.3) Можно ли так расположить на плоскости четыре прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была одна общая вершина? (Прямоугольники могут пересекаться.)

Решение. Можно, один из возможных примеров представлен на рисунке.

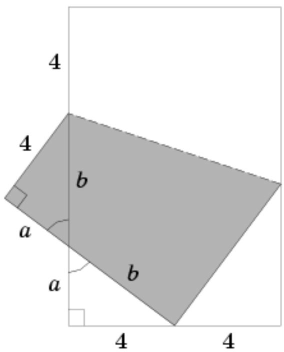


□

Задача 2.7.17. («Математический праздник» — 2011.7.4) Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны, как показано на рисунке ниже. Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



Решение. Отметим равные отрезки, пользуясь тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны (на рисунке ниже).



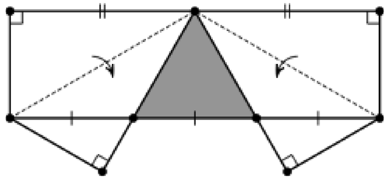
Видим, что длина меньшей стороны равна $a + b$. Значит, $a + b = 8$ и большая сторона имеет длину $a + b + 4 = 8 + 4 = 12$. □

Задача 2.7.18. («Математический праздник» — 1990.6–7.6) Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Докажите, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

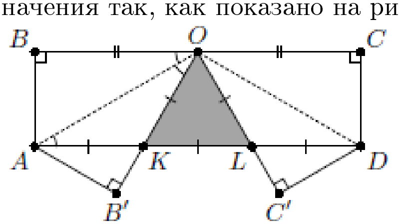
Подсказки. Рассмотрите сначала более простой случай, когда центры квадратов совпадают. Затем вырежьте меньший квадрат из картона и подвигайте его внутри большого квадрата, следя за перемещениями середин интересующих нас отрезков.

Решение. Если маленький квадрат сдвинуть (без вращения) так, чтобы его центр совпал с центром большого квадрата, то середины всех четырёх отрезков AK, BM, CX и DY сдвинутся (одинаково!) на половину длины сдвига маленького квадрата. Поэтому, если они стали вершинами некоторого квадрата, то и до сдвига они были вершинами некоторого квадрата. Осталось заметить, что если центры квадратов совпадают, то вся «картинка» переходит в себя при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$. $\square$

Задача 2.7.19. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.7) Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделённой на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник — равносторонний.



Решение. Введём обозначения так, как показано на рисунке.

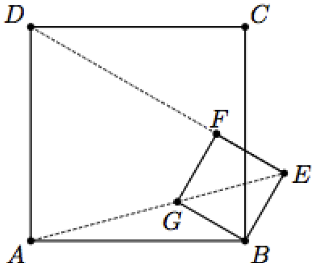


Треугольник $\triangle AB'O$ получился перегибанием из треугольника $\triangle ABO$, значит, эти треугольники равны. Следовательно, $\angle AOB = \angle AOB'$.

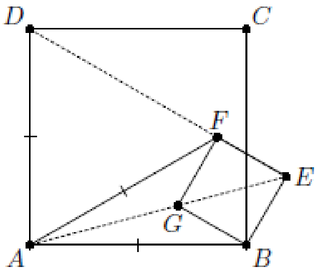
Кроме того, из параллельности сторон AD и BC прямоугольника следует, что $\angle AOB = \angle KAO$. Таким образом, в треугольнике $\triangle AOK$ углы $\angle AOK$ и $\angle KAO$ равны, значит, этот треугольник равнобедренный: $OK = AK$.

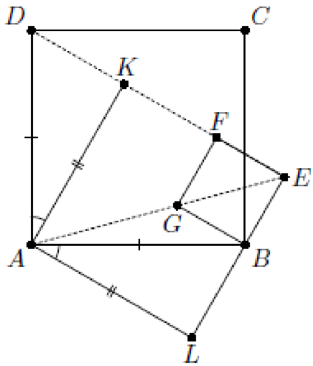
Рассуждая аналогично, получим, что треугольник $\triangle DOL$ — также равнобедренный. Следовательно, $OK = OL = KL$, то есть треугольник $\triangle KOL$ — равносторонний. $\square$

Задача 2.7.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.8) Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки A, G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D, F и E также лежат на одной прямой.



Решение. **Первый способ.** Рассмотрим треугольники $\triangle AGB$ и $\triangle AGF$ (рисунок слева): AG — общая сторона, $GB = GF$ (равные стороны квадрата $BEFG$), $\angle AGB = \angle AGF = 135°$ (углы, смежные с углами $\angle BGE$ и $\angle FGE$, равными по $45°$).





Следовательно, треугольники $\triangle AGB$ и $\triangle AGF$ равны по первому признаку. Значит, $AB = AF = AD$, $\angle GAB = \angle GAF = \alpha$,

$$\angle GFA = 180° - \angle AGF - \angle GAF = 45° - \alpha.$$

В равнобедренном треугольнике $\triangle ADF$ $\angle DAF = 90° - 2\alpha$,

$$\angle DFA = (90° + 2\alpha)/2 = 45° + \alpha.$$

Таким образом, $\angle DFG = \angle GFA + \angle DFA = (45^\circ - \alpha) + (45^\circ + \alpha) = 90^\circ$, а $\angle DFG + \angle EFG = 180^\circ$. Значит, точки D, F и E лежат на одной прямой.

Второй способ. Опустим перпендикуляры AK и AL на прямые EF и EB соответственно (рисунок справа). Достаточно доказать, что на одной прямой лежат точки D, K и F. Четырёхугольник $AKEL$ — квадрат, так как три его угла — прямые, а диагональ EG — биссектриса угла E.

Треугольники $\triangle DAK$ и $\triangle BAL$ равны по первому признаку, так как $AD = AB$, $AK = AL$, $\angle DAK = 90^\circ - \angle BAK = \angle BAL$.

Значит, $\angle DKA = \angle BLA = 90^\circ$, откуда и следует, что точки D, K и F лежат на одной прямой. $\square$

Глава 3

Вокруг алгебры

1 Расстановка знаков

Задача 3.1.3. («Математический праздник» — 2000.6.1) В записи

$$*1*2*4*8*16*32*64=27$$

вместо знаков «$*$» поставьте знаки «$+$» или «$-$» так, чтобы равенство стало верным.

Подсказка. Найти требуемое расположение знаков легко, если расставлять знаки справа налево.

Решение. Будем заменять звёздочки справа налево. Так как

$$1+2+4+8+16+32=63<64,$$

то перед 64 должен стоять «$+$» (иначе результат будет отрицательным). Получаем

$$*1*2*4*8*16*32+64=27.$$

Перед 32 должен стоять «$-$», иначе слева будет слишком большое число, даже если остальные звёздочки заменить на «$-$». Продолжая аналогично, получим

$$+1-2+4+8-16-32+64=27.$$

$\square$

Задача 3.1.4. («Математический праздник» — 1997.6.1) Витя выложил из карточек с цифрами пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}314159\\291828\end{array} \\ \hline 585787\end{array}$$

Подсказка. Проверьте пример «справа налево».

Решение. Начнём проверять пример «справа налево». В разрядах единиц и десятков всё в порядке, а в разряде сотен появляется ошибка. Значит, одна из цифр этого разряда — 1, 8 или 7 — переставлена. Если предположить, что Витя переставил две карточки «внутри» разряда сотен (единственный вариант — поменять местами 7 и 8), то ещё останется ошибка в разряде десятков тысяч. Значит, одна из цифр разряда сотен поменялась с цифрой более старшего разряда.

Чтобы восстановить равенство в разряде сотен, цифру 1 можно поменять только на 9. Цифра 9 в более старших разрядах есть только одна. Но если 1 и 9 поменять местами, то ещё сохранится ошибка в разряде десятков тысяч.

Цифру 8 можно поменять только на 6, но ни одной цифры 6 в примере нет. Значит, остаётся единственная возможность — поменять цифру 7. Вместо неё надо поставить цифру 9. Она у нас (в более старших разрядах) только одна и, если их поменять местами, то получается верный пример, приведённый на рисунке ниже.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 314159 \\ 271828 \end{array} \\ \hline 585987 \end{array}$$

□

Задача 3.1.5. («Математический праздник» — 1991.6.1;7.1) Автобусный билет будем считать счастливым, если между его цифрами можно в нужных местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет №123456?

Решение. Является, так как знаки четырёх арифметических действий и скобки можно расставить, например, следующим образом:

$$1 + (2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) = 100.$$

Есть и другие решения (попробуйте найти ещё хотя бы одно). □

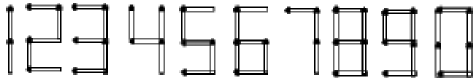
Задача 3.1.6. («Математический праздник» — 2014.7.1) Используя три различных знака арифметических действий и знак равенства, получите верное равенство из записи сегодняшней даты: 16032014.

Решение. Верное равенство может быть получено такой расстановкой знаков:

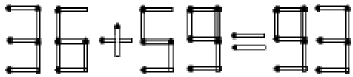
$$\frac{160}{32} - 0 = 1 + 4 = 5.$$

□

Задача 3.1.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.6.4) Петя выкладывал примеры из спичек. Цифры он «записывал» следующим образом:

.

Когда Петя отвлёкся, Вася в записанном им верном примере на сложение внутри каждой цифры переложил ровно одну спичку и получил:

.

Восстановите исходное равенство.

Решение. Заметим, что количество спичек в каждой цифре не менялось. Посчитаем, из скольки спичек какие цифры состоят:

2 спички: 1;
3 спички: 7;
4 спички: 4;
5 спичек: 2, 3, 5;
6 спичек: 6, 9, 0;
7 спичек: 8.

Теперь посмотрим на наше равенство. Минимальное значение каждого слагаемого левой части (если все цифры заменять на наименьшие возможные) — 20. Поэтому правая часть — двузначное число. То есть 9 (в правой части) можно заменить только на 6.

Посмотрим на левую часть: если тройку заменить на 5, то результат сложения будет $\geqslant 70$ $(50 + 20 = 70)$, значит, 3 можно заменить только на 2.

Но тогда (чтобы в результате получилось $\geqslant 60$) 5 надо заменять на 3.

Далее смотрим на вторые цифры слагаемых. Надо, чтобы в результате получилось число, заканчивающееся на 2 или на 5 (т. к. 3 справа можно заменить только на 2 или на 5), но равенству (9 или 0) + (6 или 0) = (2 или 5) удовлетворяет только $9 + 6 = 15$. Таким образом, исходное равенство восстановлено:

$$29 + 36 = 65.$$

□

Задача 3.1.8. («Математический праздник» — 1995.7.4) Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995.$$

Решение. Искомая расстановка скобок:

$$(1 - 2) \cdot 3 + (4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8) \cdot 9 = 1995.$$

□

Задача 3.1.9. («Математический праздник» — 2003.7.1) Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6009} = 2003.$$

Подсказка. $\dfrac{2003}{6009} = \dfrac{1}{3}$.

Решение. Требуемая расстановка скобок и знаков арифметических действий:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6009} = 2003.$$

□

2 Числовые ребусы

Задача 3.2.4. (Турнир Архимеда — 2013.1) Подберите вместо букв цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$22 + \textbf{ТУРН} + \textbf{ИР} = 2013.$$

Все решения находить не требуется.

Решение. Удовлетворяющие условию задачи числа:

$$1938 + 53, 1956 + 35, 1965 + 26.$$

Примечание. Случай $1983 + 08$ не является решением, т. к. 08 не является двузначным числом. □

Задача 3.2.5. («Математический праздник» — 2001.6.1) Решите ребус:

$$\textbf{АХ} \cdot \textbf{УХ} = 2001.$$

Решение. Разложим 2001 на простые множители: $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Следовательно, число 2001 можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: $69 \cdot 29$ или $23 \cdot 87$. Подходит только первый вариант: $29 \cdot 69 = 69 \cdot 29 = 2001$. $\square$

Задача 3.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.1) Решите ребус: $\mathbf{ЛЕТО} + \mathbf{ЛЕС} = 2011$. Найдите все возможные решения.

Решение. Сумма цифр сотен **Е** и **Л** даёт в результате 0, значит, $\mathbf{Л} = 1$.

Так как при сложении цифр десятков **Т** и **Е** получается 1 (при этом, ни **Т**, ни **Е** не могут быть равны 1), то

$$\mathbf{Е} + \mathbf{Л} + 1 = 10,$$

то есть $\mathbf{Е} = 8$.

Так как ни **О**, ни **С** не равны 1, то при сложении единиц также происходит переход через десяток. Следовательно,

$$\mathbf{Т} + \mathbf{Е} + 1 = 11,$$

то есть $\mathbf{Т} = 2$, а $\mathbf{О} + \mathbf{С} = 11$. Для пары $\{\mathbf{О}, \mathbf{С}\}$ остаются два варианта: $\{4, 7\}$ и $\{5, 6\}$.

Значит, искомые решения ребуса:

$$1827 + 184 = 1826 + 185 = 1825 + 186 = 1824 + 187 = 2011.$$

$\square$

Задача 3.2.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.1) Известно, что $\mathbf{ЖЖ} + \mathbf{Ж} = \mathbf{МЁД}$. На какую цифру оканчивается произведение $\mathbf{В} \cdot \mathbf{И} \cdot \mathbf{Н} \cdot \mathbf{Н} \cdot \mathbf{И} \cdot \mathbf{П} \cdot \mathbf{У} \cdot \mathbf{Х}$ (разными буквами обозначены разные цифры, одинаковым — одинаковые)?

Решение. Так как к двузначному числу **ЖЖ** прибавили однозначное число **Ж** и получили трёхзначное, то $\mathbf{Ж} = 9$, а $\mathbf{МЁД} = 108$. Уже использованы 4 цифры. В произведении $\mathbf{В} \cdot \mathbf{И} \cdot \mathbf{Н} \cdot \mathbf{Н} \cdot \mathbf{И} \cdot \mathbf{П} \cdot \mathbf{У} \cdot \mathbf{Х}$ использованы 6 других цифр. Следовательно, среди них обязательно есть цифры 2 и 5, значит, это произведение оканчивается на 0. $\square$

Задача 3.2.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.1) В примере на сложение под звёздочками скрываются все десять цифр по одному разу. Найдите хотя бы один такой пример.

$$\begin{array}{rcccc} & & & & * \\ + & & & * & * \\ & & * & * & * \\ \hline & * & * & * & * \end{array}$$

Решение. Один из возможных примеров.

$$\begin{array}{rcccc} & & & & 2 \\ + & & & 4 & 6 \\ & & 9 & 8 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

Другие решения ребуса получаются перестановкой цифр 4 и 8 и перестановками цифр 2, 6 и 7. □

Задача 3.2.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.1) Найдите хотя бы одно решение ребуса

$$\mathbf{Я} + \mathbf{О} \cdot \mathbf{Н} + \mathbf{Д} \cdot \mathbf{Р} \cdot \mathbf{У} \cdot \mathbf{З} \cdot \mathbf{Ь} \cdot \mathbf{Я} = \mathbf{М} \cdot \mathbf{Ы}.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

Решение. Одно из решений ребуса:

$$0 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 0 = 2 \cdot 3.$$

□

Задача 3.2.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.1) Замените буквы цифрами в ребусе

$$\mathbf{Г} + \mathbf{О} = \mathbf{Л} - \mathbf{О} = \mathbf{В} \cdot \mathbf{О} = \mathbf{Л} - \mathbf{О} = \mathbf{М} - \mathbf{К} = \mathbf{А}$$

так, чтобы все равенства стали верными; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а различным — различные. *Найдите все решения ребуса.*

Решение. Поскольку различным буквам соответствуют различные цифры, то из равенства $\mathbf{В} \cdot \mathbf{О} = \mathbf{А}$ следует, что ни **В**, ни **О** не равны 1. Отсюда получаем, что **А** — однозначное составное число, которое можно разложить на два различных множителя. Следовательно, $\mathbf{А} = 6$ или $\mathbf{А} = 8$. Если $\mathbf{А} = 8$, то $\mathbf{Л} > 9$, что невозможно. Итак, $\mathbf{А} = 6$. Осталось рассмотреть два случая.

1. **В** $= 2$, **О** $= 3$. Тогда **Г** также равно 3, что невозможно.
2. **В** $= 3$, **О** $= 2$. Тогда **Л** $= 8$, **Г** $= 4$, **М** $= 7$, **К** $= 1$.

Значит, удовлетворяющее условию равенство такое:

$$4 + 2 = 8 - 2 = 3 \cdot 2 = 8 - 2 = 7 - 1 = 6.$$

□

Задача 3.2.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.1) Найдите все решения ребуса и докажите, что других нет:

$$\mathbf{АР}^{\mathbf{А}} = \mathbf{РАТ}.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

Решение. Заметим, что даже самое маленькое двузначное число при возведении в степень, большую двойки, не будет трёхзначным. Это значит, что **А** может быть единицей, двойкой или нулём. Однако любое число **АР** в нулевой степени – единица, а в первой степени — само число **А**. Поэтому **А** может быть только двойкой.

Далее, поскольку $20^2 = 400$, а $30^2 = 900$, то **Р** (первая цифра трёхзначного числа) может быть только четвёркой, пятёркой, шестёркой, семёркой или восьмёркой. Перебрав пять двузначных чисел, получаем, что существует единственное решение $27^2 = 729$. □

Задача 3.2.12. («Математический праздник» — 2003.6.2) Найдите наименьшее четырёхзначное число **СЕЕМ**, для которого существует решение ребуса **МЫ** + **РОЖЬ** = **СЕЕМ**. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

Подсказка. **С** > **Р**, в частности, **С** > 1.

Решение. Поскольку **С** > **Р**, то **С** > 1. Так как мы ищем наименьшее число, попробуем взять **Р** $= 1$, **С** $= 2$ и **Е** $= 0$. Тогда **М** $= 3$. Случай **СЕЕМ** $= 2003$ возможен: $35 + 1968 = 2003$ или $38 + 1965 = 2003$. Кроме указанных решений, ребус имеет ещё 38 решений. □

Задача 3.2.13. («Математический праздник» — 2013.6.2)

Вот ребус довольно простой:
ЭХ вчетверо больше, чем **ОЙ**,
АЙ вчетверо больше, чем **ОХ**.
Найди сумму всех четырёх.

Решение. Цифры **Й** и **Х** чётные, потому что **ЭХ** и **АЙ** делятся на 4. Числа **ОЙ** и **ОХ** меньше, чем 25, иначе, будучи умноженными на 4, они перестанут быть двузначными. Значит, **О** — двойка или единица.

Рассмотрим первый случай. Число 20 в качестве **ОХ** или **ОЙ** не годится, так как 80 кончается на ту же цифру. Не годится и 22 с одинаковыми цифрами. Остаётся только 24, но числа **ОЙ** и **ОХ** должны быть различными. Значит, **О** — единица.

Если к чётному числу прибавить число, в 4 раза большее, то получится число, кратное 10. Следовательно, **Й** + **Х** = 10. Тогда **ОЙ** + **ОХ** = 30, а сумма всех четырёх чисел в пять раз больше, то есть 150.

Замечания. Небольшим перебором можно найти все числа: **ОХ** и **ОЙ** равны 12 и 18 (в любом порядке), а **АЙ** и **ЭХ** — 48 и 72 соответственно. □

Задача 3.2.14. («Математический праздник» — 2000.6.3) Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок.

Решение. Пусть первая цифра кода равна x, а вторая — y. Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением

$$(x + y) + x \cdot y = 10x + y.$$

Следовательно, $x \cdot y = 9x$. Так как код — двузначное число, то x не равно 0, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым, кроме 0 (проверьте!).

Значит, все возможные варианты кода: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. □

Задача 3.2.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.3) Решите ребус: **ТИК** + **ТАК** = **АКТ**.

Решение. Заметим, что **Т** — чётное (**К** + **К** = **Т** или **К** + **К** = 1**Т**), **Т** > 0 (как первая цифра числа) и **Т** < 5 (**Т** + **Т** < 10). Таким образом, **Т** = 2 или **Т** = 4. В первом случае **К** = 1 или **К** = 6. Во втором случае **К** = 2 или **К** = 7. Последний вариант приводит к противоречию.

Значит, решения ребуса: $216 + 246 = 462$, $261 + 251 = 512$, $432 + 492 = 924$. □

Задача 3.2.16. («Математический праздник» — 2011.6.4) Найдите все решения ребуса

$$\mathbf{Я} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} + \mathbf{ОН} = \mathbf{МЫ}.$$

Решение. Так как $8 \cdot \mathbf{ОН} < 100$, то $\mathbf{ОН} \leqslant 12$, то есть $\mathbf{О} = 1$, а $\mathbf{Н} = 0$ или 2. Но **Н** не может быть равно 0, так как в таком случае **Я** и **Ы** означали бы одну и ту же цифру. Значит, $\mathbf{Н} = 2$. Таким образом, $8 \cdot \mathbf{ОН} = 8 \cdot 12 = 96$, значит, **МЫ** может быть равно 96, 97 или 98. Два последних случая не подходят, так как тогда **Я** равно 1 или 2, а эти цифры уже использованы. Значит, $\mathbf{МЫ} = 96$, а $\mathbf{Я} = 0$. □

Задача 3.2.17. («Математический праздник» — 1995.6.4) Заменить разные буквы разными цифрами, одинаковые — одинаковыми, а звёздочки — любыми так, чтобы получился правильный пример.

```
   1995
 ×  ***
  -----
  *****
 +*ГОД
 ------
 СВИНЬИ
```

Решение. Очевидно, что вторая цифра множителя — нуль. Посмотрим, какими могут быть первая и третья цифры множителя. Видно, что если умножить 1995 на последнюю цифру множителя, то получится пятизначное число, а если на первую — то четырёхзначное. Выпишем произведения числа 1995 на все ненулевые цифры:

$$1995 \cdot 1 = 1995, 1995 \cdot 2 = 3990, 1995 \cdot 3 = 5985, 1995 \cdot 4 = 7980, 1995 \cdot 5 = 9975,$$

$$1995 \cdot 6 = 11970, 1995 \cdot 7 = 13965, 1995 \cdot 8 = 15960, 1995 \cdot 9 = 17955.$$

Получается, что последней цифрой множителя может быть 6, 7, 8 или 9, а первой — 1, 2, 3, 4 или 5. Сейчас уже можно просто перебрать все допустимые варианты выбора первой и последней цифры (их всего 20 — объясните, почему).

Но лучше ещё немного порассуждать и сократить себе работу по перебору вариантов. Заметим, что при умножении 1995 на первую цифру множителя получается четырёхзначное число ($*$**ГОД**), у которого последние три цифры различны (по условию, разные буквы обозначают разные цифры). Поэтому число $*$**ГОД** не может быть равным 1995 и 3990. Значит, для первой цифры осталось только три варианта: 3, 4, 5. А всего вариантов выбора первой и последней цифры множителя осталось 12 (почему?).

Теперь посмотрим на пятизначное число, полученное при умножении 1995 на последнюю цифру множителя. Видно, что две его последние цифры должны быть различными (почему?), и поэтому, оно не равно 17955. Значит, последняя цифра множителя не 9.

Итак, для первой цифры осталось только три варианта $(3, 4, 5)$, а для последней тоже только три $(6, 7, 8)$. Значит, осталось 9 вариантов выбора первой и последней цифры.

Теперь заметим, что четыре цифры **О**, **Д**, **Ь**, **И** различны. Отсюда простыми рассуждениями получаем, что для множителя остаётся только четыре варианта: 308, 306, 407 и 508.

Это уже небольшой перебор, который можно быстро провести, и найти ответ. (Ещё можно было заметить, что если первая цифра 5, то $*4$**ГОД** $= 9950$. Тогда при сложении обязательно произойдёт перенос в следующий разряд, и итог будет не шестизначным, а семизначным. Поэтому для первой цифры остаётся только два варианта: 3 и 4. А для множителя — только три: 304, 306, 407.) Таким образом, искомый правильный пример имеет вид.

$$
\begin{array}{r}
1995\\
\times\quad 306\\
\hline
11970\\
+\;5985\\
\hline
610470
\end{array}
$$

□

Задача 3.2.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.4) В равенстве **ТИХО** + **ТИГР** = **СПИТ** замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы — разными цифрами так, чтобы **ТИГР** был бы как можно меньше (нулей среди цифр нет). Объясните, почему ещё меньше **ТИГР** быть не может.

Решение. Чтобы **ТИГР** был как можно меньше, нужно сначала сделать как можно меньше цифру **Т**, а потом последовательно цифры **И**, **Г** и **Р**.

Попробуем взять **Т** $= 1$. Тогда **С** — это 2 или 3. Но если **С** $= 3$, то **И** не меньше, чем 5, а если **С** $= 2$, то можно взять **И** $= 3$. Возьмём **Г** $= 4$, **Р** $= 5$ (в этом случае **ТИГР** – минимальный) и попробуем подобрать оставшиеся цифры. Из равенства 13**ХО** $+ 1345 =$ 2**П**31 получим, что **О** $= 6$, **Х** $= 8$, **П** $= 7$. Значит, удовлетворяющее условию равенство: $1386 + 1345 = 2731$. □

Задача 3.2.19. («Математический праздник» — 1994.7.3) Когда Незнайку попросили придумать задачу для математической олимпиады в Солнечном городе, он написал ребус (на рисунке ниже). Можно ли его решить? (Разным буквам должны соответствовать разные цифры.)

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r}\text{АБВ}\\ \text{ГДЕ}\end{array}\\
\hline
\text{ЁЖЗИ}
\end{array}
$$

Подсказки. Заметим, что **Ё** $= 1$, далее действуем подбором (решений много!). Попробуйте найти несколько решений.

Решение. Можно, например: $879 + 426 = 1305$. □

Задача 3.2.20. («Математический праздник» — 2014.7.3) Замените в слове **МАТЕМАТИКА** буквы цифрами и знаками сложения и вычитания так, чтобы получилось числовое выражение, равное 2014. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры или знаки, разными — разные. Достаточно привести пример.)

Решение. Условию задачи удовлетворяет замена: $183 + 1839 - 8 = 2014$.

Замечания. Чтобы найти решение (а также доказать его единственность), полезно задуматься над тем, какие из букв являются знаками действий.

Ясно, что это не может быть **А** (как последний символ выражения). Тогда между двумя первыми цифрами **А** должен стоять хотя бы один знак. Знак **Т** не может быть ни минусом, ни плюсом (даже $\textbf{МА} + \textbf{ЕМА} + \textbf{ИКА}$ заведомо меньше $99+999+899 < 2000$). Небольшой перебор показывает, что (даже если считать, что выражение может начинаться со знака плюс или минус) **М** тоже не может быть знаком.

Остается случай, когда плюс — это **Е**, а ещё где-то стоит минус. Выражение $\textbf{МАТ} + \textbf{МАТ} - \textbf{ИКА}$ заведомо меньше 2000, поэтому минус — это не **И**, а **К**.

Выражение $\textbf{МАТ} + \textbf{МАТИ} - \textbf{А}$ равно $\textbf{МАТ} \cdot 11 + (\textbf{И} - \textbf{А})$, поэтому

$$\textbf{МАТ} \cdot 11 = 2013$$

(другие числа, делящиеся на 11, далеки от 2014) — это приводит к единственному ответу. □

Задача 3.2.21. («Математический праздник» — 2016.6.5) Робот придумал шифр для записи слов: заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2 и 3 (разные буквы он заменял разными числами). Сначала он записал шифром сам себя: **РОБОТ** $= 3112131233$. Зашифровав слова **КРОКОДИЛ** и **БЕГЕМОТ**, он с удивлением заметил, что числа вышли совершенно одинаковыми! Потом Робот записал слово **МАТЕМАТИКА**. Напишите число, которое у него получилось.

Решение. Рассмотрим слово **РОБОТ** $= 3112131233$. В нём 5 букв и 10 цифр, так что все коды двузначные и определяются без труда. Напишем все двенадцать возможных кодов и те буквы, которые мы точно знаем.

1 =	11 =	21 =	31 = **Р**
2 =	12 = **О**	22 =	32 =
3 =	13 = **Б**	23 =	33 = **Т**

Теперь подумаем, как запишется слово **КРОКОДИЛ** = **БЕГЕМОТ**. Начинается оно с **Б** = 13, то есть **К** = 1. Теперь мы можем записать начало слова:

$$\textbf{КРОКО} *** = 13112112 ***.$$

Начинаем его читать как слово **БЕГЕМОТ**: **Б** = 13, **Е** $\neq 1$, то есть **Е** = 11, а тогда **Г** = 2, иначе второе **Е** не получается. Ну а **М** начинается на 2, то есть **М** = 2$*$.

Теперь посмотрим на конец слова, там **...ОТ**, то есть ...1233. Это значит, что **Л** = 3 и **И** = 23, а **Д** заканчивается на 1, то есть **Д** = $*1$.

Звёздочка — единственная оставшаяся неразгаданной цифра. Разгадать её нетрудно: 31 = **Р**, 11 = **Е**, так что **Д** = $*1$ = 21. Тогда **М** = 22, и мы раскрыли почти весь шифр.

1 = **К**	11 = **Е**	21 = **Д**	31 = **Р**
2 = **Г**	12 = **О**	22 = **М**	32 =
3 = **Л**	13 = **Б**	23 = **И**	33 = **Т**

Теперь мы знаем всё, что нужно, чтобы записать шифром слово **МАТЕМАТИКА**, кроме одного — как шифруется буква **А**. Но раз Робот смог записать это слово, значит, для **А** должен найтись код. И этот код 32, ибо все остальные использованы. Таким образом, у Робота получилось число 2232331122323323132. □

Задача 3.2.22. («Математический праздник» — 2004.6.5) Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: **ВКСАМО**. Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» **МТТЛАРАЕКИС**. Что это за город, если его название начинается с буквы **С**?

Таблица 1

М	**О**	**С**	**К**	**В**	**А**
А	**М**	**О**	**С**	**К**	**В**
В	**А**	**М**	**О**	**С**	**К**
К	**В**	**А**	**М**	**О**	**С**
С	**К**	**В**	**А**	**М**	**О**
О	**С**	**К**	**В**	**А**	**М**

Таблица 2

А	**М**	**О**	**С**	**К**	**В**
В	**А**	**М**	**О**	**С**	**К**
К	**В**	**А**	**М**	**О**	**С**
М	**О**	**С**	**К**	**В**	**А**
О	**С**	**К**	**В**	**А**	**М**
С	**К**	**В**	**А**	**М**	**О**

Подсказки. В последнем столбце таблицы 2 стоят все буквы Сашиного города, В первом столбце таблицы 2 идут все буквы Сашиного города по алфавиту. В названии Сашиного города после буквы, стоящей в последнем столбце этой таблицы, идёт буква, стоящая первой в той же строчке.

Решение. Мы будем постепенно восстанавливать Сашину вторую таблицу. Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Поэтому буквы Сашиного города — **МТТЛАРАЕКИС**. Так как слова в таблице 1 упорядочены по алфавиту, то в первом столбце эти буквы стоят в алфавитном порядке: **А**, **А**, **Е**, **И**, **К**, **Л**, **М**, **Р**, **С**, **Т**, **Т**.

Таблица 1

А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**М**
А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Т**
Е	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Т**
И	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Л**
К	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**А**
Л	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Р**
М	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**А**
Р	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Е**
С	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**К**
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**И**
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**С**

Таблица 2

А	**К**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**М**
А	**М**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Т**
Е	**Р**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Т**
И	**Т**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Л**
К	**С**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**А**
Л	**И**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Р**
М	**А**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**А**
Р	**Л**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**Е**
С	**Т**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**К**
Т	**А**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**И**
Т	**Е**	*	*	*	*	*	*	*	*	*	**С**

Пусть теперь некоторая буква стоит в последнем столбце таблицы 2. Тогда в слове после неё будет идти буква, стоящая первой в этой строке. (При этом мы считаем, что после последней буквы идёт первая.) Из первой строки таблицы 1 видно, что после буквы **М** идёт буква **А**, из второй и третьей — что после буквы **Т** один раз идёт **А**, а один раз — **Е**, и т. д.

Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту. Воспользовавшись этим, мы можем заполнить и второй столбец (таблица 2). Из получившейся таблицы видно, что после пары букв **МА** идёт буква **К** (первая строчка), после пары **ТА** идёт **М** (вторая строчка), и т. д.

Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвёртый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить третью снизу строку (так как название города начинается с буквы **С**), что несложно сделать, зная, какая буква идёт за какой парой букв. Таким образом, получим название города — **СТЕРЛИТАМАК**. □

Задача 3.2.23. («Математический праздник» — 2004.7.4) Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец: **ВКСАМО**. Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» **ОССНГСОРОК**. Что это за город, если его название заканчивается на букву **К**?

Таблица 1

М	**О**	**С**	**К**	**В**	**А**
А	**М**	**О**	**С**	**К**	**В**
В	**А**	**М**	**О**	**С**	**К**
К	**В**	**А**	**М**	**О**	**С**
С	**К**	**В**	**А**	**М**	**О**
О	**С**	**К**	**В**	**А**	**М**

Таблица 2

А	**М**	**О**	**С**	**К**	**В**
В	**А**	**М**	**О**	**С**	**К**
К	**В**	**А**	**М**	**О**	**С**
М	**О**	**С**	**К**	**В**	**А**
О	**С**	**К**	**В**	**А**	**М**
С	**К**	**В**	**А**	**М**	**О**

Решение. Мы будем постепенно восстанавливать Валерину таблицу 2. Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Так как слова в таблице 1 упорядочены по алфавиту, то в первом столбце буквы слова стоят в алфавитном порядке.

Таблица 1

Г	*	*	*	*	*	*	*	*	**О**
К	*	*	*	*	*	*	*	*	**С**
Н	*	*	*	*	*	*	*	*	**С**
О	*	*	*	*	*	*	*	*	**Н**
О	*	*	*	*	*	*	*	*	**Г**
О	*	*	*	*	*	*	*	*	**С**
Р	*	*	*	*	*	*	*	*	**О**
С	*	*	*	*	*	*	*	*	**Р**
С	*	*	*	*	*	*	*	*	**О**
С	*	*	*	*	*	*	*	*	**К**

Таблица 2

Г	**О**	*	*	*	*	*	*	*	**О**
К	**С**	*	*	*	*	*	*	*	**С**
Н	**О**	*	*	*	*	*	*	*	**С**
О	**Г**	*	*	*	*	*	*	*	**Н**
О	**Р**	*	*	*	*	*	*	*	**Г**
О	**С**	*	*	*	*	*	*	*	**С**
Р	**С**	*	*	*	*	*	*	*	**О**
С	**К**	*	*	*	*	*	*	*	**Р**
С	**Н**	*	*	*	*	*	*	*	**О**
С	**О**	*	*	*	*	*	*	*	**К**

В циклических сдвигах слова после его последней буквы идёт первая. Из пятой строки таблицы видно, что после буквы **Г** идёт **О**, из последней — что после **К** идет **С**, из четвёртой — что после **Н** идёт **О**, из первой, седьмой и девятой — что после **О** один раз идёт **Г**, один раз **Р** и один раз **С** и т. д. Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту.

Из таблицы 2 видно, что после пары букв **ОГ** идёт буква **О**, после **СК** идёт **С**, после **СН** идёт **О** и т. д. Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить последнюю строку, т. к. название города оканчивается на **К**. Таким образом, получим название города — **СОСНОГОРСК**. □

Задача 3.2.24. («Математический праздник» — 2014.6.6) Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

$$\boxed{\textbf{Встречай завтра поезд СТО вагон О}}$$

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли ещё две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

$$\boxed{\textbf{СЕКРЕТ} - \textbf{ОТКРОЙ} = \textbf{ОТВЕТ} - \textbf{ТВОЙ}}$$

$$\boxed{\textbf{СЕКРЕТ} - \textbf{ОТКРЫТ} = 20010}$$

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул: «Теперь ясно, какой поезд надо встречать!» Инспектор удивился. «Элементарно, Лестрейд! — пояснил сыщик. — Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные — разные, а чёрточка — это минус! Мориарти едет в поезде №...»

Напишите номер поезда и вагона. Объясните, как мог рассуждать Холмс.

Решение. Посмотрим на вторую телеграмму. В правой и левой частях равенства в двух последних разрядах написано одно и то же: **ЕТ** – **ОЙ**. Это значит, что и в старших разрядах справа и слева будет одно и то же:

$$\textbf{СЕКР} - \textbf{ОТКР} = \textbf{ОТВ} - \textbf{ТВ}.$$

Теперь если выполнить вычитания, то и справа и слева сократятся по две буквы, то есть на концах будет по два нуля. Когда мы сократим на 100, получится вот что: **СЕ** – **ОТ** = **О**. Теперь посмотрим на последнюю телеграмму. Если записать её как пример на сложение в столбик,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{cccccc} \textbf{О} & \textbf{Т} & \textbf{К} & \textbf{Р} & \textbf{Ы} & \textbf{Т} \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \textbf{С} & \textbf{Е} & \textbf{К} & \textbf{Р} & \textbf{Е} & \textbf{Т} \end{array} \end{array}$$

то видно, что **ОТ** + 2 = **СЕ**. Сопоставив это с предыдущим равенством, мы понимаем, что **О** = 2, а тогда **С** = 3. Кроме того, при сложении произошёл перенос из разряда единиц в разряд десятков, а поэтому **Т** = 8 или 9. Однако, если предположить, что **Т** = 8, то **Е** = 0, а тогда при сложении **Ы** + 1 = **Е** (то есть **Ы** + 1 = 0) неизбежно произошёл бы перенос в следующий разряд. Но этого не было, значит, **Т** = 9. Мы узнали значения всех нужных букв.

Значит, Мориарти едет в вагоне 2 поезда №392.

Замечания. Из решения следует также, что **Е** = 1 и **Ы** = 0. Буквы **К**, **Р**, **В**, **Й** могут заменять любые четыре из пяти оставшихся цифр: 4, 5, 6, 7, 8, но номера поезда и вагона с ними не связаны. □

Задача 3.2.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.8) Каждая буква в словах **ЭХ** и **МОРОЗ** соответствует какой-то цифре, причём одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, а разным — разные.

Известно, что $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = \mathbf{М} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{Р} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{З}$, а $\mathbf{Э} + \mathbf{Х} = \mathbf{М} + \mathbf{О} + \mathbf{Р} + \mathbf{О} + \mathbf{З}$. Чему равно $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} + \mathbf{М} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{Р} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{З}$?

Решение. Среди зашифрованных цифр не может быть нуля, иначе одна часть равенства $\mathbf{Э}\cdot\mathbf{Х} = \mathbf{М}\cdot\mathbf{О}\cdot\mathbf{Р}\cdot\mathbf{О}\cdot\mathbf{З}$ равна нулю, а другая нет. Цифры 5 и 7 также не могут участвовать в ребусе. В противном случае одна часть рассматриваемого равенства будет делиться на 5 (или на 7), а другая — нет. Таким образом, остаются цифры 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. В ребусе должны участвовать шесть из них, поэтому в нём обязательно присутствуют цифры, кратные 3. Следовательно, каждая из частей равенства должна быть кратна 3.

Докажем, что в правой части первого равенства не может быть цифр 8 и 9. Пусть это не так и, например, $\mathbf{М} = 9$, тогда левая часть равенства должна делиться на 9, поэтому $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 3 \cdot 6 = 18$. В этом случае $\mathbf{О} \cdot \mathbf{Р} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{З} = 2$, что невозможно. Если же $\mathbf{М} = 8$, то $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 2 \cdot 4$ или $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 4 \cdot 6$. Первый случай невозможен, поскольку $\mathbf{Э}\cdot\mathbf{Х}$ не делится на 3, а второй — так как тогда $\mathbf{О} \cdot \mathbf{Р} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{З} = 3$.

Допустим, что цифра 9 участвует в ребусе, тогда она находится в левой части рассматриваемого равенства. Следовательно, $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 4$ или $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 8$.

В первом случае, сомножители правой части определяются однозначно: $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 4 = 3 \cdot 6 \cdot 1 2 \cdot 2$. Равенство

$$\mathbf{Э} + \mathbf{Х} = \mathbf{М} + \mathbf{О} + \mathbf{Р} + \mathbf{О} + \mathbf{З}$$

выполняется: $9 + 4 = 3 + 6 + 1 + 1 + 2$.

Во втором случае возможны три варианта: $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3^2$, $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 8 = 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2^2$ или $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 8 = 1^2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4$. Но ни для одного из них равенство

$$\mathbf{Э} + \mathbf{Х} = \mathbf{М} + \mathbf{О} + \mathbf{Р} + \mathbf{О} + \mathbf{З}$$

не выполняется.

Осталось рассмотреть случай, когда в левой части равенства нет цифры 9 (и в ребусе она вообще не участвует). Тогда в левой части равенства обязательно есть цифра 8, и поэтому $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 8 \cdot 3 = 24$ или $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 8 \cdot 6$.

В первом случае среди **М**, **О**, **Р** и **З** есть все цифры 1, 2, 4, 6, но $1\cdot2\cdot4\cdot6 > 24$, то есть этот случай невозможен.

Во втором случае возможно такое равенство: $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 8 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 4$, но $8+6 \neq 1+3+2+2+4$. Таким образом, возможен только один случай: $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} = 9 \cdot 4 = 36$, то есть $\mathbf{Э} \cdot \mathbf{Х} + \mathbf{М} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{Р} \cdot \mathbf{О} \cdot \mathbf{З} = 72$. □

Задача 3.2.26. («Математический праздник» — 2005.7.5) Решите ребус:

$$250 \cdot \mathbf{ЛЕТ} + \mathbf{МГУ} = 2005 \cdot \mathbf{ГОД}.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми — одинаковые; при этом некоторыми буквами могут быть обозначены уже имеющиеся цифры 2, 5 и 0.)

а) Найдите хотя бы одно решение ребуса.
б) Докажите, что других решений нет.

Решение. Заметим, что при $\mathbf{Л} < 7$ левая часть не превосходит

$$250 \cdot 800 + 1000 = 201000,$$

а правая не меньше $2005 \cdot 102 = 204510$. Значит, $\mathbf{Л} = 8$ или $\mathbf{Л} = 9$.

Если $\mathbf{ГОД} > 124$, то число в правой части не меньше $2005 \cdot 124 = 248620$, а в левой части не больше $250 \cdot 987 + 1000 = 247750$. Значит, $\mathbf{ГОД} < 123$ и $\mathbf{Г} = 1$, а потому $\mathbf{О} = 0$ или $\mathbf{О} = 2$.

Выражение в правой части и число 250 делятся на 5, поэтому либо $\mathbf{У} = 5$, либо $\mathbf{У} = 0$. Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, если $\mathbf{У} = 0$, то правая часть оканчивается нулём и потому чётна, а значит, $\mathbf{Д}$ чётно. При этом $\mathbf{О} = 2$ (так как $\mathbf{О}$ не равно 0), и минимальное значение $\mathbf{Д}$ равно 4, то есть $\mathbf{ГОД} > 124$ (противоречие). Значит, $\mathbf{У} = 5$, откуда следует, что $\mathbf{Д}$ нечётно.

Для цифры $\mathbf{Д}$ есть всего 3 значения: $\mathbf{Д} = 3$, $\mathbf{Д} = 7$, и $\mathbf{Д} = 9$. Рассмотрим остатки от деления на 50 выражений в левой и правой частях. Слева будет остаток 15 (так как $\mathbf{Г} = 1$ и $\mathbf{У} = 5$), значит, он должен быть таким же справа, что возможно лишь при $\mathbf{Д} = 3$.

Определим значение $\mathbf{О}$. Допустим, что $\mathbf{О} = 0$. Тогда справа получаем

$$2005 \cdot 103 = 206515,$$

а значит, цифра $\mathbf{Т}$ чётна (иначе в разряде десятков слева не получится единицы). Тогда $\mathbf{ЛЕТ} > 824$, а $\mathbf{М} > 6$ (остальные цифры заняты), и правая часть окажется меньше левой. Значит, $\mathbf{О} = 2$.

Имеем $\mathbf{ГОД} = 123$. Случай $\mathbf{Л} = 8$ не годится (слишком мало), остаётся $\mathbf{Л} = 9$. По тем же соображениям $\mathbf{Е} > 8$, а так как цифра 9 занята, то $\mathbf{Е} = 8$. Далее легко видеть, что $\mathbf{Т} = 4$ и $\mathbf{М} = 6$. Таким образом, получаем ответ:

$$250 \cdot 984 + 615 = 2005 \cdot 123.$$

Примечание. Вполне возможны и иные рассуждения (даже решение прямым подбором), но приведённое решение одновременно удовлетворяет пунктам а) и б). □

Задача 3.2.27. (Турнир Архимеда — 2015.5) Вася составляет очередной ребус. Чтобы закончить работу, он хочет подобрать такие значения букв, чтобы число **ПАНОРАМА** разделилось нацело на число **ПАНАМА**. Удастся ли ему это сделать? (В ребусе одинаковые буквы должны обозначать одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.)

Решение. Предположим, число **ПАНОРАМА** кратно числу **ПАНАМА**. Вычтем из числа **ПАНОРАМА** число **ПАНАМА**00. Поскольку первые три цифры уменьшаемого вычитаемого совпадают, полученная разность окажется не более чем пятизначной. При этом эта разность должна быть кратна шестизначному числу **ПАНАМА**, что возможно, только если это число равно 0. Следовательно, **ПАНОРАМА** = **ПАНАМА**00, что невозможно, так как цифры **М** и **А** различны. □

Задача 3.2.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.6) Мальвина записала равенство

$$\mathbf{МА}\cdot\mathbf{ТЕ}\cdot\mathbf{МА}\cdot\mathbf{ТИ}\cdot\mathbf{КА} = 2016000$$

и предложила Буратино заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами, чтобы равенство стало верным. Есть ли у Буратино шанс выполнить задание, или таких замен не существует?

Подсказка. Разложите число 2016000 на множители.

Решение. Шанс у Буратино есть, например:

$$10\cdot 24\cdot 10\cdot 28\cdot 30 = 2016000 \text{ или } 10\cdot 28\cdot 10\cdot 24\cdot 30 = 2016000.$$

□

3 Обратный ход

Задача 3.3.4. («Математический праздник» — 1999.6.1) На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили ещё по точке. Такое «уплотнение» повторили ещё дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

Подсказка. Найдите, сколько точек было перед последним уплотнением, т. е. решайте задачу «с конца».

Решение. Если до уплотнения было отмечено n точек, то после уплотнения будет отмечено $2n-1$ точек (из которых n старых и $n-1$ новая). Если после уплотнения получилось k точек, то $2n-1=k$ или

$$n = \frac{k+1}{2}.$$

Таким образом, до последнего уплотнения было

$$\frac{(113+1)}{2} = 57 \text{ точек},$$

до второго

$$\frac{(57+1)}{2} = 29 \text{ точек},$$

и в самом начале

$$\frac{(29+1)}{2} = 15 \text{ точек}.$$

□

Задача 3.3.5. («Математический праздник» — 1996.7.2) Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго — 33. Сколько монет было у первого пирата до начала игры?

Подсказка. Попробуйте проследить «с конца», сколько у какого пирата было монет после каждой игры.

Решение. Попробуем проследить «с конца», сколько у какого пирата было монет после каждой игры. В последней игре первый проиграл второму половину своих монет, после чего у него осталось 15 монет. Но это ровно столько, сколько он только что отдал второму! Значит, перед этим у первого было $15 \cdot 2 = 30$ монет, а у второго было $33 - 15 = 18$ монет.

Аналогично, во второй игре второй пират проиграл ровно столько, сколько у него осталось после второй игры, то есть 18 монет. Получаем, что перед второй игрой у второго пирата было $18 \cdot 2 = 36$ монет, а у первого было $30 - 18 = 12$ монет. Проделав самостоятельно ещё один шаг рассуждения, вы найдёте, что вначале у пиратов было по 24 монеты. □

Задача 3.3.6. («Математический праздник» — 1993.7.3) Решите уравнение:

$$1993 = 1 + 8 : \big(1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))))\big).$$

Подсказка. Упрощайте уравнение «снаружи», а не изнутри.

Решение. Будем упрощать уравнение «снаружи» скобок, а не изнутри:

$$
\begin{gathered}
1993 - 1 = 8 : \bigl(1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))))\bigr),\\
\frac{8}{1992} = 1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)))),\\
\frac{1}{249} - 1 = 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)))),\\
8 : \left(-\frac{248}{249}\right) = 1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))),\\
-8 \cdot \frac{249}{248} - 1 = -8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))),\\
-8 : \left(-\frac{280}{31}\right) = 1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)),\\
8 \cdot \frac{31}{280} - 1 = 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)),\\
4 : \left(-\frac{4}{35}\right) = 1 - 4 : (1 - 8 : x),\\
-4 \cdot \frac{35}{4} - 1 = -4 : (1 - 8 : x),\\
4 : 36 = 1 - 8 : x,\\
4 \cdot \frac{1}{36} - 1 = -8 : x,\\
-8 : \left(-\frac{8}{9}\right) = x,\\
8 \cdot \frac{9}{8} = x,\\
x = 9.
\end{gathered}
$$

□

Задача 3.3.7. (Турнир им. Ломоносова — 1989.12) У Джона была полная корзина тремпончиков. Сначала он встретил Анну и дал ей половину своих тремпончиков и ещё полтремпончика. Потом он встретил Банну и отдал ей половину оставшихся тремпончиков и ещё полтремпончика. После того, как он встретил Ванну и снова отдал ей половину тремпончиков и ещё полтремпончика, корзина опустела. Сколько тремпончиков было у Джона вначале? (Что такое тремпончики выяснить не удалось, так как к концу задачи их не осталось.)

Решение. **Первый способ.** Заметим, что перед встречей с Ванной у Джона остался один тремпончик, так как полтремпончика составляли половину этого количества. Перед встречей с Банной у него было 3 тремпончика, так как половину этого количества составляли один и ещё полтремпончика, то есть полтора. Аналогично получаем, что изначально было 7 тремпончиков.

Второй способ. Добавим Джону один невидимый трепомпончик. Тогда каждой девушке он отдавал половину имеющихся тремпончиков, а невидимый так и оставался в корзине. В конце остался только невидимый термпончик. Так как девушек было три, то в начале у Джона было $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ тремпончиков, включая невидимый. □

4 Метод Прокруста

Задача 3.4.4. («Математический праздник» — 1996.6.1) В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?

Решение. Такое возможно, если один кошелёк лежит внутри другого. □

Задача 3.4.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.1) У Винни–Пуха пять друзей, у каждого из которых в домике есть горшочки с мёдом: у Тигры — 1, у Пятачка — 2, у Совы — 3, у Иа-Иа — 4, у Кролика — 5. Винни–Пух по очереди приходит в гости к каждому другу, съедает один горшочек мёда, а остальные забирает с собой. К последнему домику он подошёл, неся 10 горшочков с мёдом. Чей домик Пух мог посетить первым?

Решение. После посещения всех домиков у Винни–Пуха должно оказаться

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 5 = 10 \text{ горшочков.}$$

Так как перед последним посещением у него уже было 10 горшочков, то последним он посетил домик Тигры. Остальные домики он мог посещать в любом порядке, так как от перемены мест слагаемых значение суммы не изменится.

Значит, первым Винни–Пух мог посетить любой домик, кроме домика Тигры. □

Задача 3.4.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.1) После утренней пробежки Карлсон худеет на килограмм, а к вечеру (после поедания плюшек) его вес увеличивается на треть. К вечеру третьего дня (после того, как он начал бегать) Карлсон обнаружил, что поправился вдвое. Сколько он весил до того, как начал заниматься спортом?

Решение. Пусть перед первой пробежкой Карлсон весил x кг, тогда после неё он весил $x - 1$ кг, а к концу дня $\frac{4}{3} \cdot (x - 1)$ кг.

После второй пробежки он весил

$$\frac{4}{3} \cdot (x - 1) - 1 = \frac{4x}{3} - \frac{7}{3} \text{ кг},$$

а к концу второго дня

$$\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4x}{3} - \frac{7}{3}\right) = \frac{16x}{9} - \frac{28}{9} \text{ кг}.$$

Аналогично к концу третьего дня Карлсон весил

$$\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{16x}{9} - \frac{37}{9}\right) \text{ кг},$$

что по условию равно $2x$ кг. Отсюда $64x - 148 = 54x$, то есть $x = 14{,}8$ кг. □

Задача 3.4.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.2) Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

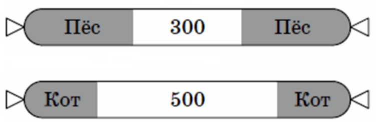
Решение. Если мы перенесём «лишние» свечки с сегодняшнего торта Саши на старый Ванин торт, то получится четыре торта с одинаковым числом свечек. Значит, сегодня Ване исполнилось $216 : 4 = 54$ года. □

Задача 3.4.8. («Математический праздник» — 2011.7.2) Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку. Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались не политыми. Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки?

Решение. Не политыми осталось 10 цветов, значит, полито было $30 - 10 = 20$ цветов. Рассмотрим последний политый Синеглазкой тюльпан. За ним растут ещё 5 тюльпанов. Поэтому Незнайка сорвёт эти 5 тюльпанов и закончит рвать цветы как раз на последнем политом Синеглазкой тюльпане. Но это значит, что все остальные политые цветы уцелели. То есть уцелело $20 - 1 = 19$ цветов. □

Задача 3.4.9. («Математический праздник» — 2013.6.3;7.1) Пёс и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пёс откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 г больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?

Решение. **Первый способ.** Если два (одинаковых) пса ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 300 г. Если два кота ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 500 г (рисунок ниже).



Значит, два пса и два кота оставят от двух колбас 800 г. А один пёс и один кот от одной колбасы — вдвое меньше.

Второй способ. Пёс собирается откусить от батона на 300 г меньше, чем оставить. Если бы он откусил на 150 г больше, оставив на 150 г меньше, то ему досталась бы ровно половина всей колбасы. Аналогично коту досталась бы половина всей колбасы, если бы он откусил на 250 г больше, чем собирался. При этом вся колбаса была бы съедена, поэтому остаток весит $150 + 250 = 400$ г. □

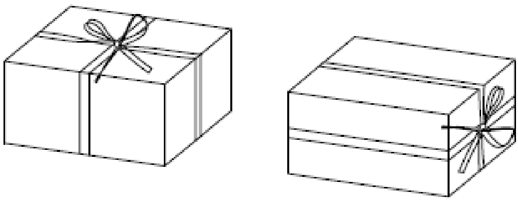
Задача 3.4.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.3) В ряд стояло 10 детей. В сумме у девочек и у мальчиков орехов было поровну. Каждый ребёнок отдал по ореху каждому из стоящих правее его. После этого у девочек стало на 25 орехов больше, чем было. Сколько в ряду девочек?

Решение. Первый слева ребёнок отдал 9 орехов, то есть у него стало на 9 орехов меньше, второй ребёнок отдал 8 орехов, а получил 1, то есть у него стало на 7 орехов меньше. Продолжая аналогичные рассуждения, заметим, что у первых пяти детей стало меньше на 9, 7, 5, 3 и 1 орехов соответственно, а у следующих пяти — больше на 1, 3, 5, 7 и 9 орехов соответственно. Так как $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, то девочками могли быть только последние пять детей. □

Задача 3.4.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.3) Города A, B и C вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из A в B на 200 км короче объезда через C, а прямой путь из A в C на 300 км короче объезда через B. Найдите расстояние между городами B и C.

Решение. Маршрут $B-A-C$ (из B в C через A) на 500 км короче, чем маршрут $B-C-A-B-C$: длина отрезка BA на 200 км меньше длины маршрута $B-C-A$, а длина отрезка AC на 300 км меньше длины маршрута $A-B-C$. При этом второй маршрут отличается от первого на два отрезка BC. Значит, $BC = 500 : 2 = 250$ км. □

Задача 3.4.12. («Математический праздник» — 2012.6.4;7.3) Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать бантик сверху (как на рисунке слева). А чтобы перевязать её с точно таким же бантиком сбоку (как на рисунке справа), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.



Решение. При первом способе завязывания лента охватывает дважды длину, дважды ширину и четыре раза высоту коробки, то есть её длина равна шести сторонам основания плюс бантик.

При втором способе завязывания лента охватывает дважды длину, четырежды ширину и два раза высоту коробки, то есть её длина равна семи сторонам основания плюс бантик. Значит, разница $178 - 156 = 22$ см в длинах лент равна стороне основания коробки. Таким образом, размеры коробки для торта: $22 \times 22 \times 11$ см. □

Задача 3.4.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.5;7.2) На острове Невезения отменили понедельники: у них за воскресеньем сразу следует вторник. За последний год (то есть, с 15 декабря 2002 года по 14 декабря 2003 года) воскресенья на острове совпадали с нашими воскресеньями ровно восемь раз. Какой день недели на острове сегодня?

Решение. Так как обычная неделя состоит из семи дней, а неделя на острове — из шести, то совпадение воскресений происходит один раз в $6 \cdot 7 = 42$ дня.

Значит, за 378 дней происходит 9 совпадений. Поскольку $378 - 365 = 13$, то девятое совпадение должно произойти в течение ближайших тринадцати дней (с 15 по 27 декабря). Единственное воскресенье в этот период — 21 декабря. Непосредственным подсчётом получаем, что сегодня на острове суббота. $\square$

Задача 3.4.14. (Турнир Архимеда — 2017.2) За полугодие Федя получил по математике 35 оценок. Перед самым Новым годом все двойки и тройки он пересдал: в электронном журнале двойки были исправлены на тройки, а «старые» тройки — на четвёрки. При этом количество троек осталось прежним, а средний балл вырос на 0,4. Сколько двоек было у Феди первоначально?

Решение. Количество троек не изменилось, поэтому можно считать, что двойки исправлены на четвёрки.

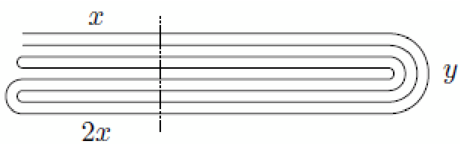
Пусть n — первоначальное количество Фединых двоек, тогда изменение среднего балла
$$\frac{2n}{35} = 0{,}4,$$
откуда $n = 7$. $\square$

Задача 3.4.15. («Математический праздник» — 2013.7.3) Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

Решение. Пусть за столом сидело n человек. Тогда на втором круге каждый взял на n семечек больше, чем на первом, а все — на $n \cdot n = n^2$ больше семечек, чем на первом. Так как $n^2 = 100$, то $n = 10$. $\square$

Задача 3.4.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.6) Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в одном месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 метров и 4 метра?

Решение. При разрезании могли образоваться куски трёх различных типов (на рисунке ниже), причём длина одного из типов кусков ровно вдвое больше, чем другого. Обозначим эти длины: x, $2x$ и y соответственно, а длину всей верёвочки — L.



Подсчитав количество кусков каждого типа, получим, что

$$L = 8x + 4y = 4 \cdot (2x + y).$$

Все возможные, исходя из условия, варианты длин кусков и верёвочки представлены в таблице.

x	4	2	9	4,5
y	9	9	4	4
L	68	52	88	52

□

Задача 3.4.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.6.6) Четыре друга участвовали в олимпиаде. Витя решил больше всех задач — восемь, а Петя меньше всех — пять задач. Каждая задача олимпиады была решена ровно тремя из друзей. Сколько задач было на олимпиаде?

Решение. Так как каждая задача была решена ровно тремя из друзей, то количество полученных от них решений делится на три (т. е. если сложить количества решённых каждым задач, то получится число, делящееся на три). Так как самое маленькое количество решённых задач — 5, а самое большое — 8, то оставшиеся два числа либо 6 и 6, либо 6 и 7, либо 7 и 7. Тогда сумма может быть равна 25, 26 или 27. На три делится только 27. Количество задач в три раза меньше числа решений, поэтому равно 9. □

Задача 3.4.18. («Математический праздник» — 2016.6.6) Сорок детей водили хоровод. Из них 22 держали за руку мальчика и 30 держали за руку девочку. Сколько девочек было в хороводе?

Решение. Так как $22 + 30 = 52$, то $52 - 40 = 12$ детей держали за руку и мальчика, и девочку. Следовательно, $30 - 12 = 18$ детей держали за руки только девочек. Эти 18 детей держали $18 \cdot 2 = 36$ девочкиных рук, и ещё 12 держали по одной девочкиной руке, так что, всего у девочек было $36 + 12 = 48$ рук. Поэтому девочек было $48 : 2 = 24$.

Замечания. Расстановка детей в хороводе, соответствующая условиям задачи, существует, например, такая, как на рисунке. Возможны и другие расстановки.

Зная ответ (24 девочки и 16 мальчиков), можно заметить, что девочек больше, чем мальчиков, ровно на столько, на сколько ребят, держащих за руку девочку, больше, чем тех, кто держит за руку мальчика: $24-16=30-22=8$. Это не случайное совпадение. Зная этот факт, можно легко решить задачу. Но доказать сам факт не очень просто. Приведём одно из возможных доказательств.

Обозначим через $Д$ и $М$ количество девочек и мальчиков в хороводе, а через X и Y — соответственно количество тех, кто держит за руку девочку, и тех, кто держит мальчика.

Рассмотрим несколько (более одной) девочек, стоящих подряд. Попросим их по одной выходить из круга — сначала тех, кто «в серединке» (то есть стоит между двумя девочками), а потом когда девочек останется две, — одну из оставшихся. При этом будем следить за тем, как меняются $Д$, $М$ и $Д-М$, а также X, Y и $X-Y$. Составим таблицу (маленькой буквой д обозначена выходящая из круга девочка). Видим, что разности $Д-М$ и $X-Y$ при удалении каждой девочки изменяются одинаково (уменьшаются на 1).

	$Д$	$М$	$Д-М$	X	Y	$X-Y$
…ДдД…	-1	не изм.	-1	-1	-1	-1
…МдДМ…	-1	не изм.	-1	-2	не изм.	-1

Так же поступим с рядами мальчиков — аналогично можно показать, что обе разности будут увеличиваться на 1 при выходе из хоровода каждого мальчика. После всего этого мы получим хоровод, в котором мальчики и девочки чередуются, то есть их поровну, и $Д-М=0$. Но и $X-Y=0$, потому что в данном случае $X=М$, а $Y=Д$. Следовательно, и в изначальном хороводе было $Д-М=X-Y$. □

Задача 3.4.19. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.5) Артемон подарил Мальвине букет из аленьких цветочков и чёрных роз. У каждой чёрной розы 4 пестика и 4 тычинки, а на стебле два листка. У каждого аленького цветочка 8 пестиков и 10 тычинок, а на стебле три листка. Листков в букете на 108 меньше, чем пестиков. Сколько тычинок в букете?

Решение. Заметим, что у каждого цветка число тычинок в два раза больше разности числа пестиков и числа листков. Значит, такое же соотношение верно и для всего букета. Следовательно, в букете 216 тычинок. □

5 Введение в системы уравнений

Задача 3.5.4. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1995/96.10-11.1) Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них a человек считают, что будет лучше, b — что будет такой же, и c — что будет хуже. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $m = a + \frac{b}{2}$ и $n = a - c$. Оказалось, что $m = 40$. Найдите n.

Решение. Мы знаем, что $a + b + c = 100$ и $2a + b = 80$. Вычитая из второго равенства первое, имеем: $a - c = n = -20$. □

Задача 3.5.5. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2010/11.9.1) Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Решение. Неверно, контрпример: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$. □

Задача 3.5.6. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1994/95.8-9.1) У кассира было 30 монет: $10, 15$ и 20 копеек на сумму 5 рублей. Докажите, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных.

Решение. Пусть у кассира было x 10-копеечных монет, y 15-копеечных и z 20-копеечных. Тогда:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 30, \\ 10x + 15y + 20z &= 500. \end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 15, имеем: $5\cdot(z-x) = 50$. Отсюда $z - x = 10 > 0$. □

Задача 3.5.7. (Московская математическая регата — 2014/15.9.1) Вася сложил четвёртую степень и квадрат некоторого числа, отличного от нуля, и сообщил результат Пете. Сможет ли Петя однозначно определить Васино число?

Решение. Так как равенство $(-a)^2 + (-a)^4 = a^2 + a^4$ справедливо для любого a, то какое бы число ни выбрал Вася, Петя его не сможет определить. □

6 Стоимость

Задача 3.6.4. («Математический праздник» — 2004.6.2) Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

Решение. Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём $(1 - x)$ кг. Таким образом,

$$15x + 90 \cdot (1 - x) = 78,$$

откуда $x = 0{,}16$ кг $= 160$ г. □

Задача 3.6.5. («Математический праздник» — 2001.6.2) Офеня[1] купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя Офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

Решение. По условию разность $10 - 5 = 5$ руб. — оптовая цена двух ручек. Значит, оптовая цена одной ручки 2 руб. 50 коп. □

Задача 3.6.6. («Математический праздник» — 1995.7.2)

Один сапфир и два топаза
ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим Вас,
сапфир ценнее иль топаз?

Решение. По условию 8 сапфиров и 16 топазов стоят столько же, сколько 21 сапфир и 3 топаза, — как 24 изумруда. Следовательно, 13 топазов стоят столько же, сколько 13 сапфиров. Таким, образом ценность сапфира и топаза одинакова. □

Задача 3.6.7. («Математический праздник» — 1992.7.2) В январе на 1 доллар можно было купить 40 винтиков или 60 шпунтиков. В феврале винтики и шпунтики стали продавать наборами из 25 винтиков и 25 шпунтиков по цене 1 доллар за набор. Для сборки трактора необходимо 600 винтиков и 600 шпунтиков. В каком месяце сборка трактора стоила дороже, если другие затраты не изменились?

[1] Продавец вразнос, коробейник

Решение. В январе надо было потратить 10 долларов на 600 шпунтиков и 15 долларов на 600 винтиков, то есть всего 25 долларов. В феврале же надо купить 24 набора из 25 винтиков и 25 шпунтиков. Значит, в январе сборка трактора стоила на 1 доллар дороже. □

Задача 3.6.8. («Математический праздник» — 1993.7.5) Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7000000 рублей. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки, на все вырученные деньги снова купил кефир и т. д. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

Подсказка. Ведите расчёты в «твёрдой» валюте — пустых бутылках. Тогда не будет инфляции!

Решение. Заметим, что если все расчёты проводить в твёрдой валюте – пустых бутылках, то инфляции не будет. То есть, бутылка с кефиром будет всё время стоить 7 пустых бутылок, а кефир в ней — 6 пустых бутылок. Гулливер, имея вначале «денег» на 1166666 бутылок кефира (без тары) и ещё 4 пустых бутылки, сможет проводить свои коммерческие операции до тех пор, пока не останется с четырьмя пустыми бутылками, сдав которые, он уже не сможет снова купить кефир.

Таким образом получаем, что Гулливер выпил 1166666 бутылок кефира. □

Задача 3.6.9. («Математический праздник» — 2010.6.4) В обменном пункте совершаются операции двух типов:

1) дай 2 евро — получи 3 доллара и конфету в подарок;
2) дай 5 долларов — получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришёл в обменник, у него были только доллары. Когда ушёл — долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. Во сколько долларов обошёлся Буратино такой «подарок»?

Решение. Поскольку Буратино получил 50 конфет, он совершил ровно 50 операций. При этом все полученные евро он вновь обменял на доллары. Поэтому на каждые две операции второго типа приходилось по три операции первого типа, и на этих пяти операциях Буратино терял $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$ доллар. Значит, он потратил на конфеты $50 : 5 = 10$ долларов. □

7 Движение

Задача 3.7.3. («Математический праздник» — 2005.6.1) Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

Решение. Валентин пробегает $50 \cdot 60 = 3000$ см за 100 с, то есть его скорость 30 см/с, что составляет 18 м/мин. □

Задача 3.7.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.2) Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?

Решение. Пока папа делает 9 шагов, Маша делает 15 шагов, Яша — 25, а Маша с Яшей вместе — 40. Раз они вместе прошли 400 шагов, то есть $10 \cdot 40$, то и папа пройдёт в 10 раз больше — 90 шагов. □

Задача 3.7.5. («Математический праздник» — 2007.7.1) Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живёт на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

Решение. От Даши до Тани не больше 5 этажей, значит, лишний путь составлял не больше двух этажей, а путь вверх — не больше одного. Следовательно, Таня поднялась ровно на один этаж. Значит, в доме 7 этажей. □

Задача 3.7.6. (Турнир Архимеда — 2016.2) Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Екатериновка вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Екатериновки выехала велосипедистка Катя. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями. Однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Катя встретились?

Решение. **Первый способ.** Поймём, что если Федя прошёл какое-то расстояние до выезда Кати, то с момента, как выедет Катя, до встречи он пройдёт треть оставшегося пути. Тогда получаем, что середина всего пути — это треть оставшегося, то есть Федя за час прошёл одну четверть всего пути. Из первого условия понятно, что скорость Кати в два раза больше, т. е. Федя и Катя вместе проходят 3/4 пути за час, а значит, всего им понадобится 4/3 часа, чтобы встретиться.

Второй способ. Обозначим скорость Феди за U, скорость Кати за V, расстояние между деревнями будем считать равным 1. Тогда из первого условия получаем, что $V = 2U$. Второе интерпретируем так: сначала Федя прошёл 1 час со скоростью U, а затем с той же скоростью U, но $\frac{1-U}{U+V}$ часов (расстояние делим на скорость сближения), а в сумме прошёл $\frac{1}{2}$ пути. То есть,

$$\frac{U + U(1-U)}{U+V} = \frac{1}{2},$$

откуда $U = \frac{1}{4}$, а дальше, как в первом способе.

Значит, Федя и Катя встретились в 10:20. □

Задача 3.7.7. (Турнир Архимеда — 2014.2) (*Старинная задача*) Ротная колонна движется по направлению к штабу со скоростью 6 км/ч. В 9:00 командир роты отправил почтового голубя с донесением в штаб. Голубь доставил донесение, сразу полетел обратно и вернулся в колонну. В какое время голубь долетел до штаба, если его скорость равна 10 км/ч, а вернулся он в 9:45?

Решение. **Первый способ.** Если считать колонну неподвижной, то голубь сначала улетает со скоростью 4 км/ч, а потом возвращается обратно со скоростью 16 км/ч. Так как он возвращается со скоростью в 4 раза большей, чем удаляется от колонны, то и времени тратится в 4 раза меньше (0,2 от общего времени отсутствия). Следовательно, на обратный путь тратится 9 минут. Значит, в штабе он оказался в 9 ч 36 мин.

Второй способ. Представим движение голубя и колонны как движение из двух пунктов навстречу друг другу. При этом они находятся на равном расстоянии от штаба, т. е. штаб располагается посередине. Всё время в пути голубя и ротной колонны до их встречи — 45 минут или три четверти часа. Скорость их сближения равна 16 км/ч. Тогда весь путь между двумя пунктами составляет $16 \cdot \frac{3}{4} = 12$ км. Так как штаб располагается посередине, то расстояние до него составляет 6 км. Следовательно, до штаба голубь летит $\frac{6}{10} = 0{,}6$ ч или 36 минут, т. е. в штабе голубь окажется в 9 ч 36 мин.

Третий способ. За 45 минут или $\frac{3}{4}$ часа голубь пролетел 7,5 км, а колонна прошла 4,5 км. Значит, удвоенное расстояние от старта голубя до штаба равно $7{,}5 + 4{,}5 = 12$ км. Т. е. от старта до штаба голубь пролетел 6 км. Со скоростью 10 км/ч он это сделал за 36 минут. □

Задача 3.7.8. (Турнир Архимеда — 2012.3) Вася и Коля плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Вася проплывает дорожку за 5 мин, а Коля — за 7 мин. Через какое время после старта Вася впервые догонит Колю, плывя с ним в одном направлении?

Решение. Вася нагонит Колю, плывя с ним в одном направлении, когда разница в расстоянии, которое они приплыли, станет равной длине дорожки.

Разделим дорожку на 35 условных единиц длины. Тогда разница в скорости Васи и Коли составляет 2 единицы в минуту. Разница в 35 единиц будет покрыта через $\frac{35}{2} = 17{,}5$ минут. □

Задача 3.7.9. (Турнир Архимеда — 2017.3) Между Лисьей норой и Птичьим двором прямая дорога. Лиса направляется на Птичий двор, а оттуда одновременно навстречу ей и с той же скоростью выбегает Пёс. Пёс, почуяв Лису на расстоянии 100 м, побежит за ней с утроенной скоростью. Лиса, почуяв Пса на расстоянии 60 м, побежит от него с удвоенной скоростью. Сможет ли Лиса скрыться в норе, если от Птичьего двора до Лисьей норы 300 м?

Решение. Пёс почует Лису, когда каждый из них пробежит по 100 м, а расстояние между ними станет 100 м, в этот момент он увеличит скорость втрое.

Лиса почует Пса, когда Пёс пробежит еще 30 м, а Лиса пробежит 10 м, а расстояние между ними станет 60 м, в этот момент Лиса увеличит скорость вдвое и побежит к норе. Лисе останется бежать до норы 110 м, Псу — 170 м.

Пёс способен бежать в 1,5 раза быстрее Лисы, поэтому, когда Лиса спрячется в норе, то есть пробежит 110 м, собака пробежит $110 \cdot 1{,}5 = 165$ м, поэтому Пёс Лису не догонит. □

Задача 3.7.10. («Математический праздник» — 2008.7.3) Дима живёт в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из-за маленького роста Дима не достаёт до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь наверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идёт пешком. Весь путь наверх занимает 1 минуту 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью, а Дима поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живёт Дима?

Решение. Рассмотрим ту часть пути, которую Дима вниз едет на лифте, а вверх идёт пешком. С одной стороны, путь пешком занимает вдвое больше времени, а с другой — больше на 10 секунд. Значит, эту часть пути лифт проезжает за 10 секунд, а Дима проходит за 20 секунд. Поскольку весь путь на лифте занимает 60 секунд, то Дима проходит 1/6 пути. При этом он поднимается на целое число промежутков между этажами. Дом девятиэтажный, значит, это один промежуток, а на лифте Дима проезжает 5. Следовательно, он живёт на 7 этаже. □

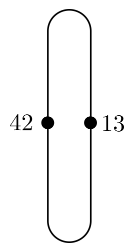
Задача 3.7.11. («Математический праздник» — 1992.6.4;7.5) Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

Подсказка. Два встречных эскалатора можно представить себе, как движущееся с постоянной скоростью кольцо, относительно которого шапка неподвижна. Посмотрите на происходящее с точки зрения шапки.

Решение. Два встречных эскалатора фактически образуют движущееся с постоянной скоростью кольцо (на котором можно кататься, как на карусели), относительно которого шапка неподвижна. Встанем около шапки и понаблюдаем за бегом ребят. При этом можно считать, что эскалаторы стоят, а ребята бегут к нам из диаметрально противоположной точки кольца с равными скоростями, но каждый со своей стороны. Теперь очевидно, что они прибегут к шапке одновременно.

Однако эти рассуждения верны при одном условии: Петя должен добежать до верха эскалатора прежде, чем туда приедет шапка (она сама не сможет пересесть на Петин эскалатор и поехать ему навстречу). Таким образом, если скорости ребят как минимум вдвое больше скорости эскалатора, то они добегут до шапки одновременно. Иначе первым добежит Витя. □

Задача 3.7.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.4) Кабинки горнолыжного подъёмника занумерованы подряд числами от 1 до 99. Игорь сел в кабинку №42 подъёмника у подножия горы и в какой-то момент заметил, что он поравнялся с движущейся вниз кабинкой №13 (на рисунке справа), а через 15 секунд его кабинка поравнялась с кабинкой №12. Через какое время Игорь прибудет на вершину горы?



Решение. Так как Игорь сначала поравнялся с кабинкой №13, а потом с кабинкой №12, то нумерация идёт по направлению движения подъёмника.

Примем расстояние между соседними кабинками за единицу. Тогда расстояние по тросу подъёмника между кабинками №42 и №12 равно 69 единицам: 57 единиц до кабинки №99 и ещё 12 единиц до кабинки №12. Значит, расстояние между Игорем и вершиной горы равно половине этого количества, то есть 34,5 единицы.

Поскольку кабинки, с которыми поравнялась кабинка №42, движутся навстречу с той же скоростью, то скорость сближения кабинок в два раза больше скорости подъёмника. Значит, на преодоление одной кабинкой одной единицы расстояния уходит 30 секунд, а Игорь будет на вершине горы через

$$\frac{34{,}5 \cdot 30}{60} = 17{,}25 \text{ минут} = 17 \text{ минут } 15 \text{ секунд.}$$

□

Задача 3.7.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.5;7.3) Одноклассники Аня, Боря и Вася живут на одной лестничной клетке. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успевает догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал.

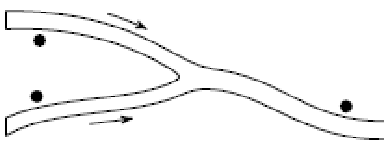
Однажды первой вышла Аня, вторым Боря, третьим Вася, и какие-то двое из них пришли в школу вместе. На следующий день первым вышел Вася, вторым Боря, третьей Аня. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

Решение. Пусть Аня ходит медленнее Бори, а Вася намного медленнее их обоих. Тогда в первый день Боря догонит Аню, дальше они пойдут со скоростью Ани, но медленный Вася их все равно не догонит.

На следующий день Аня догонит Васю, поэтому дальше они пойдут с его скоростью, после чего их может догнать Боря, ходящий быстрее Васи.

Замечания. Отметим, что если в первый день в школу пришли вместе Вася и Боря, то Вася ходит быстрее Бори, следовательно, на следующий день Вася пришёл бы в школу в одиночку (Боря его не сумел бы догнать, а Ане пришлось бы сначала догнать Борю, после чего она стала бы идти с его скоростью). □

Задача 3.7.14. («Математический праздник» — 2012.7.4) На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а ещё одна пристань стоит в двух километрах после слияния (на рисунке ниже).



Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех её частях. Собственная скорость лодки также постоянна.)

Решение. Обозначим пристани в порядке посещения A, B и C.

Пристань B не могла стоять после слияния. Действительно, иначе лодка шла бы к ней 3 км по течению, а от неё — те же 3 км, но против течения. Но по условию время первой части пути больше, чем время второй.

Пусть после слияния стоит пристань A. Тогда 1 км против течения лодка проходит за $30 : 3 = 10$ минут, а 1 км по течению — за $18 - 10 = 8$ минут. Соответственно, путь из C в A (3 км по течению) занимает $3 \cdot 8 = 24$ минуты.

Наконец, пусть после слияния стоит пристань C. В этом случае 1 км по течению лодка проходит за $18 : 3 = 6$ минут, а 1 км против течения — за $30 - 6 = 24$ минуты. Соответственно, путь из C в A (3 км против течения) занимает $3 \cdot 24 = 72$ минуты.

Значит, от третьей пристани до первой лодка может добраться либо за 24, либо за 72 минуты. □

Задача 3.7.15. («Математический праздник» — 1999.7.4) Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из A в B, другой — из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один — в B в 4 часа вечера, а другой — в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

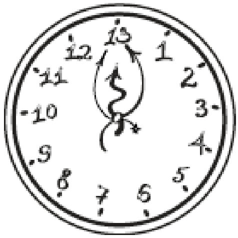
Подсказка. После полудня первый пешеход прошёл столько же, сколько второй до полудня.

Решение. Пусть от рассвета до полудня прошло x часов. Первый пешеход шёл x часов до полудня и 4 после, второй — x часов до полудня и 9 после. Отношение времён равно отношению длин путей до и после точки встречи, так что:

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{x}.$$

Из этой пропорции находим, что $x = 6$. Значит, рассвет в тот день был в 6 часов утра. □

Задача 3.7.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.7) Марсиане делят сутки на 13 часов. После того, как *Марсовский Заяц* уронил часы в чай, у них изменилась скорость вращения секундной стрелки, а скорость вращения других стрелок осталась прежней. Известно, что каждую полночь все три стрелки совпадают. Сколько всего за сутки может быть таких моментов времени, когда три стрелки совпадут? Найдите все возможные ответы.



Решение. За марсианские сутки часовая стрелка делает один оборот, минутная — 13. Значит, минутная стрелка за сутки обгоняет часовую (то есть «совпадает» с ней) 12 раз (каждую двенадцатую часть суток).

По условию секундная стрелка совпадает с часовой тоже целое число раз (пусть n). Если $d = \text{НОД}(12, n)$, то каждую d-ю часть суток минутная и секундная стрелка совпадают с часовой одновременно, то есть все три стрелки совпадают d раз в сутки. В зависимости от n, d может быть любым делителем числа 12: 12, 6, 4, 3, 2, 1. □

Задача 3.7.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.5) Папа по реке доплывает от моста до пляжа за 9 минут, а от пляжа до моста — за 12 минут. Сын же от моста до пляжа доплывает за 12 минут. Сколько времени нужно сыну, чтобы доплыть от пляжа до моста?

Решение. **Первый способ.** Отмерим четверть расстояния от моста до пляжа и установим там белый флажок. На таком же расстоянии от пляжа в сторону моста установим красный флажок. Пусть теперь папа с сыном плывут от моста до пляжа. Дадим сыну фору: пусть отец начнёт плыть в тот момент, когда сын доплывёт до белого флажка. Тогда к пляжу они приплывут одновременно: через 9 минут.

Теперь пусть они плывут обратно к мосту. Снова дадим сыну фору: пусть папа начнёт заплыв, когда сын доплывёт до красного флажка. Тогда папа догонит сына через 9 минут (течение в одинаковой степени мешает сейчас обоим пловцам, как до этого обоим помогало, так что на время, через которое отец догонит сына, его наличие и направление не влияет). Но, так как папе до моста плыть 12 минут, то он догонит сына точно у белого флажка. Сын, таким образом, плыл от красного флажка до белого 9 минут, а на расстояние от пляжа до моста потратит вдвое больше времени — 18 минут.

Второй способ. Пусть расстояние от моста до пляжа равно 1. Папа плывёт по течению со скоростью $\frac{1}{9}$, а против течения — со скоростью $\frac{1}{12}$, поэтому скорость течения равна

$$\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right):2=\frac{1}{72}.$$

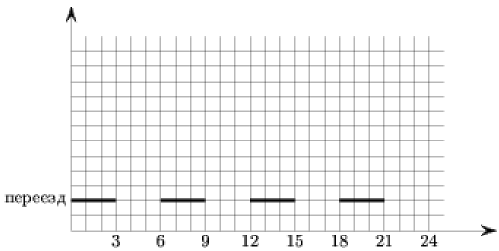
Сын плывёт по течению со скоростью $\frac{1}{12}$, поэтому против течения он плывёт со скоростью

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{1}{18}.$$

Значит, чтобы доплыть от пляжа до моста, ему потребуется 18 минут. □

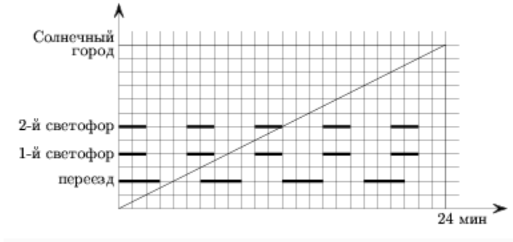
Задача 3.7.18. («Математический праздник» — 2004.7.6) Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и так далее. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)?

Подсказка. Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой-пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что график движения Незнайки (прямая) не может пересекать выделенные отрезки.



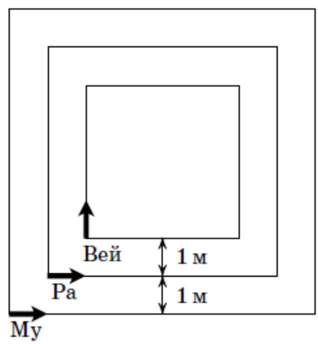
Решение. Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат — расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость электромобиля постоянна, то график его движения — прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой-пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что прямая не может пересекать выделенные на рисунке выше отрезки.

Аналогично можно отметить отрезки, которые запрещено пересекать из-за светофоров. На рисунке ниже проведена прямая, с наибольшим угловым коэффициентом, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков.

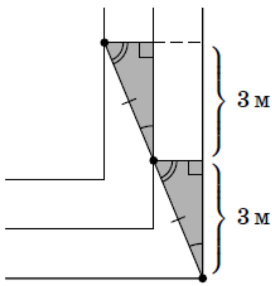


Следовательно, Незнайка сможет доехать до Солнечного города за 24 минуты. □

Задача 3.7.19. («Математический праздник» — 2013.7.5) Три квадратные дорожки с общим центром отстоят друг от друга на 1 м. Три муравья стартуют одновременно из левых нижних углов дорожек и бегут с одинаковой скоростью: Му и Ра против часовой стрелки, а Вей по часовой. Когда Му добежал до правого нижнего угла большой дорожки, двое других, не успев ещё сделать полного круга, находились на правых сторонах своих дорожек, и все трое оказались на одной прямой. Найдите стороны квадратов.

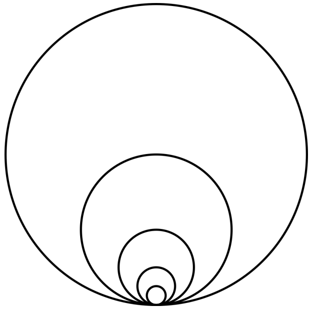


Решение. Длины сторон двух соседних дорожек отличаются на 2 м. Поэтому в момент, когда Му добежал до угла, Ра пробежал по правой стороне дорожки 2 м и находился на расстоянии $2 + 1 = 3$ м от «нижней» стороны внешней дорожки. Поскольку Ра находится посередине между Му и Веем, Вей в этот момент находится на вдвое большем расстоянии от этой стороны (6 м). То есть Вею остаётся ещё пробежать по боковой стороне $6 - 1 - 1 = 4$ м.



Но если бы Вей бежал против часовой стрелки, то он пробежал бы всю нижнюю сторону и ещё 4 м по правой стороне (так как эта сторона на 4 м короче стороны внешнего квадрата), то есть оказался бы в той же точке. Раз Вей попадает в одну и ту же точку, двигаясь и по часовой стрелке, и против часовой стрелки, эта точка — правый верхний угол квадрата. То есть сторона этого квадрата равна 4 м. Соответственно, стороны двух других квадратов равны $4 + 2 = 6$ м и $6 + 2 = 8$ м. □

Задача 3.7.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.8) Лабиринт состоит из пяти окружностей (на рисунке ниже). Длины окружностей равны 10, 20, 40, 80 и 160 метров. По лабиринту с постоянной скоростью начинает ходить человек, который обходит все его окружности по часовой стрелке в порядке возрастания их длин.



Пройдя самую большую окружность, он переходит на самую маленькую и начинает всё сначала. Через некоторое время по лабиринту начинает ходить ещё один человек, который ходит с той же скоростью и по тому же плану, что и первый, но обходит окружности против часовой стрелки. Докажите, что эти два человека обязательно встретятся.

Решение. Заметим, что если два человека окажутся в некоторый момент на одной окружности, то они встретятся, так как движутся навстречу друг другу.

Рассмотрим какой-нибудь из моментов времени, когда первый человек начал путь по самой большой окружности. Соответственно, второй человек в этот момент должен находиться на какой-нибудь из оставшихся четырёх. Но суммарная длина четырёх маленьких окружностей $10 + 20 + 40 + 80 = 150$ м, то есть раньше, чем первый человек закончит свой путь по большой окружности, второй пройдёт все остальные и тоже пойдёт по большой окружности. Значит, они встретятся. □

Задача 3.7.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.9) Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а ещё через три плюшки — автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала — автобус, через три плюшки — автомобиль, а ещё через три плюшки — мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля 60 км/ч, а скорость мотоцикла 30 км/ч.

Решение. Пусть в тот момент, когда автобус проезжал мимо Пончика, мотоциклу оставалось x км до первого кафе. Это означает, что за время трёх плюшек автомобиль проезжает x км.

Автомобиль движется вдвое быстрее мотоцикла и проехал за это же время $2x$ км. Столько же он проехал и за следующее время трёх плюшек. Значит, в тот момент, когда мимо Пончика проезжал автобус, автомашина была от него вчетверо дальше, чем мотоцикл.

Когда же автобус проезжал мимо Сиропчика, и автомашина, и мотоцикл были позади него на расстоянии $2x$ км. Стало быть, пока автобус ехал от Пончика до Сиропчика, автомашина догнала мотоцикл, ликвидировав отставание в $4x - x = 3x$ км. За это же время автомашина сократила отставание от автобуса на $4x - 2x = 2x$ км. Это значит, что скорость, с которой машина догоняет мотоцикл (30 км/ч), составляет 3/2 от скорости, с которой она догоняет автобус. То есть машина догоняет автобус со скоростью 20 км/ч, значит, скорость автобуса $60 - 20 = 40$ км/ч. □

8 Части и отношения

Задача 3.8.5. («Математический праздник» — 2014.6.1;7.1) Дети ходили в лес по грибы. Если Аня отдаст половину своих грибов Вите, у всех детей станет поровну грибов, а если вместо этого Аня отдаст все свои грибы Саше, то у Саши станет столько же грибов, сколько у всех остальных вместе взятых. Сколько детей ходило за грибами?

Решение. Пусть Аня отдала половину грибов Вите. Теперь у всех ребят поровну грибов (это означает, что у Вити своих грибов не было). Чтобы Саша теперь получил все Анины грибы, ему надо забрать грибы у Вити и Ани. У него тогда будут грибы трёх ребят — Вити, Ани и его собственные. Ещё столько же будет у остальных, значит, с Витей, Аней и Сашей в лес ходило ещё трое детей. Следовательно, за грибами ходили 6 детей. □

Задача 3.8.6. («Математический праздник» — 2011.6.1) «А это вам видеть пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано?

Решение. То, что видеть пока рано, две трети девочек увидели правым глазом, а две трети мальчиков — левым. Всего, стало быть, один глаз не закрыли две трети всех учеников — 22 человека. □

Задача 3.8.7. («Математический праздник» — 2010.6.1) На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

Решение. Заметим, что количество частей всегда на 1 больше количества разрезов. Значит, красных колец 4, жёлтых 6, а зелёных 10. Таким образом, всего разрезов $4 + 6 + 10 = 20$, а кусков 21. □

Задача 3.8.8. («Математический праздник» — 2007.6.1) По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

Решение. На первом канале между началом каждой части и началом следующей проходит 22 минуты. За это время на втором канале пройдут две части по 10 минут и две минутные рекламные паузы. Следовательно, началу каждой части на первом канале соответствует тот же момент фильма на втором. Когда на первом канале начнётся последняя часть, до конца фильма останется 20 минут, рекламы уже не будет. На втором же канале покажут две части по 10 минут с минутной рекламной паузой, поэтому на первом канале фильм закончится на одну минуту раньше. □

Задача 3.8.9. («Математический праздник» — 1995.6.1) После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

Решение. Половина персиков составляет одну треть объёма банки, то есть половину от оставшихся двух третей компота. Поэтому половина этой половины составляет четверть оставшегося в банке компота. Значит, уровень компота понизится на одну четверть. □

Задача 3.8.10. («Математический праздник» — 2008.6.1) Винни–Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа–Иа опустошили бочонок мёда. При этом Пятачок съел половину того, что съел Винни–Пух, Кролик — половину того, что не съел Винни–Пух, а ослику Иа–Иа досталась лишь десятая часть бочонка. Какая часть бочонка досталась Кролику?

Решение. Пятачок съел половину того, что съел Винни–Пух, Кролик — половину остатка. Это значит, что Пятачок вместе с Кроликом съели половину всего мёда. Вторую половину съели Винни–Пух и ослик Иа–Иа. Ослик съел десятую часть, значит, Винни–Пух съел

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

бочонка. Тогда он не съел $\frac{3}{5}$ бочонка, а Кролик съел половину от этого количества, то есть $\frac{3}{10}$. □

Задача 3.8.11. («Математический праздник» — 2006.7.1) Винни–Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

Решение. Треть доли Пуха увеличила втрое порцию Пятачка, то есть сама была вдвое больше неё. Значит, вся доля Пуха была в 6 раз больше доли Пятачка, то есть у Пуха было вначале $\frac{6}{7}$ торта, а у Пятачка — $\frac{1}{7}$. □

Задача 3.8.12. («Математический праздник» — 1992.6.2) На Нью-Васюковской валютной бирже за 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии — 21 динар, за 10 рупий — 3 талера, а за 5 крон — 2 талера. Сколько тугриков можно выменять за 13 крон?

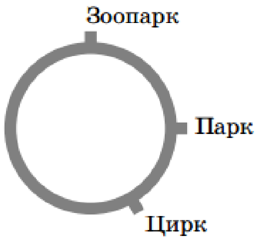
Решение. За 5 крон дают два талера, значит, за одну крону дают $\frac{2}{5}$ талера. Аналогично, за один талер дают $\frac{10}{3}$ рупии, за одну рупию — $\frac{21}{22}$ динара, за один динар — $\frac{11}{14}$ тугрика. Значит, за крону дают дают

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{21}{22} \cdot \frac{11}{14} = 1 \text{ тугрик},$$

а за 13 крон, соответственно, 13 тугриков. □

Задача 3.8.13. («Математический праздник» — 2016.6.2;7.2) В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз?

Решение. Сядем в трамвай на остановке Зоопарк и поедем через Цирк к Парку, а потом, не покидая трамвай, вернёмся к Зоопарку. Вторая часть пути втрое короче первой, то есть первая занимает три четверти полного круга, а вторая — четверть. Отметим на схеме Зоопарк и Парк и где-то на более длинной дуге между ними отметим Цирк. Теперь на том же трамвае поедем из Цирка к Зоопарку (при этом проезжая Парк, как видно на схеме).



Доехав до Зоопарка, на том же трамвае вернёмся к Цирку, описав круг. Первая часть пути вдвое короче второй, то есть занимает треть круга. Это значит, что путь (всё на том же трамвае) от Цирка к Парку не пройдёт через Зоопарк и составит

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

часть полного круга. Путь же через Зоопарк равен

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ круга,}$$

что в 11 раз длиннее.

Таким образом, путь не через Зоопарк короче в 11 раз. □

Задача 3.8.14. («Математический праздник» — 2015.7.2) В аквариуме живёт три вида рыбок: золотые, серебряные и красные. Если кот съест всех золотых рыбок, то рыбок станет на 1 меньше, чем 2/3 исходного числа. Если кот съест всех красных рыбок, то рыбок станет на 4 больше, чем 2/3 исходного числа. Каких рыбок — золотых или серебряных — больше и на сколько?

Решение. Из первого условия видно, что золотых рыбок на 1 больше, чем треть. Из второго условия следует, что красных рыб на 4 меньше, чем треть. Значит, серебряных на 3 больше, чем треть. Значит, серебряных рыбок на 2 больше, чем золотых. □

Задача 3.8.15. («Математический праздник» — 2009.7.2) На каждом из двух огородов Дед посадил по одинаковому количеству репок. Если в огород заходит Внучка, то она выдёргивает ровно 1/3 репок, имеющихся к этому моменту. Если заходит Жучка, то она выдёргивает 1/7 репок, а если заходит Мышка, то она выдёргивает только 1/12 репок. К концу недели на первом огороде осталось 7 репок, а на втором — 4. Заходила ли Жучка во второй огород?

Решение. **Первый способ.** Каждый раз после того, как в огород заходит Внучка, на нём остаётся 2/3 имевшихся до того репок, после визита Жучки — 6/7, а после визита Мышки — 11/12.

Если бы изначальное количество репок на первом огороде не было кратно 7, то оно не могло бы стать кратным 7. Значит, оно делилось на 7. В начале на втором огороде было столько же репок, сколько на первом, а в конце осталось 4. Поэтому в какой-то момент число репок там перестало делиться на 7. Но это могло случиться только после визита Жучки.

Второй способ. Так как во втором огороде меньше репок, туда кто-то заходил. Подумаем, кто туда заходил последним. Это не могла быть Мышка, так как 4 не делится на 11. По аналогичной причине это не могла быть Жучка. Значит, это могла быть только Внучка, и до её прихода на огороде было

$$4 : \frac{2}{3} = 6 \text{ репок.}$$

Число репок до посещения Внучки меньше 7, значит, и до этого в огород кто-то заходил. Аналогично предыдущему можно убедиться, что это могла быть только Жучка, и до её прихода на огороде было

$$6 : \frac{6}{7} = 7 \text{ репок}$$

. □

Задача 3.8.16. («Математический праздник» — 2007.6.3) Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка-2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой — кулинарную книгу «Красная Шапочка-2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросёнку Наф–Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

Решение. За книгу «Три поросёнка-2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается 1/3 остатка. За книгу «Красная шапочка-2» ему также полагается 1/3 гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы, то есть, 700 золотых монет. □

Задача 3.8.17. («Математический праздник» — 2001.6.4) Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

Решение. Если рядом поставить числа a и b, то следующим надо поставить число $b : a$. За ним $1 : a$, потом $1 : b$, и, наконец, $a : b$. При этом

$$a = \frac{a}{b} \cdot b,$$

и «круг замкнулся». Такие шесть чисел будут удовлетворять условию задачи, если они все различны. Например, они будут такими, если взять $a = 2$, $b = 3$:

$$2, \quad 3, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}.$$

□

Задача 3.8.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.4) Просыпаясь каждое утро в 8:30, истопник набивает печку углём до упора. При этом он кладёт ровно 5 кг угля. Каждый вечер, ложась спать (а ложится спать он также в одно и то же время), он опять набивает печку углём до упора и кладёт при этом ровно 7 кг угля. В какое время истопник ложится спать?

Решение. Так как утром в печку влезает 5 кг угля, а вечером — уже 7 кг, то за время бодрствования истопника сгорает 7 кг угля (5 кг тех, которые были положены утром, и ещё 2 кг, уже лежавшие в печке). Вечером в печку кладут 7 кг, следовательно, за время сна сгорает 5 кг из них (чтобы утром можно было положить ровно 5 кг угля) Таким образом, моменты засыпания и пробуждения истопника делят сутки на две части, длины которых относятся как $7 : 5$, то есть на 14 и 10 часов. Значит, истопник бодрствует 14 часов. Следовательно, он ложится спать в 22:30. □

Задача 3.8.19. («Математический праздник» — 1997.7.5) В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $1/5$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Решение. Двоечник ошибся в половине вопросов. При этом число вопросов, в которых он ошибся, равно $4/5$ от числа вопросов, на которые он отвечал наугад. Значит, он ответил наугад на

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

от общего числа вопросов. А ответы на остальные $\frac{3}{8}$ вопросов он списал. □

Задача 3.8.20. («Математический праздник» — 2012.7.5) Вася написал верное утверждение:

«В этой фразе 1/3 всех цифр — цифры 3, а 1/2 всех цифр — цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе 1/... всех цифр — цифры $*$, доли цифр $*$ и $*$ одинаковы и равны 1/..., а доля всех остальных цифр составляет 1/...».

Вставьте вместо звёздочек три разные цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение.

Решение. Если какое-то из заменённых многоточием чисел хотя бы трёхзначное, то всего в этой фразе не менее 100 цифр, что невозможно (тогда одно из чисел состоит минимум из 30 знаков, но тогда всего цифр не менее 1030 и т. д. — ясно, что так быть не может). Поэтому все числа или однозначные, или двузначные, а цифр всего от 9 до 12.

Цифр «1» не менее 4, их доля не менее $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, поэтому знаменатель первой дроби однозначный, то есть цифр меньше 12.

Все знаменатели — делители количества цифр, большие единицы. Поэтому цифр не может быть ни 11 (у числа 11 нет отличных от единицы однозначных делителей), ни 9 (четыре слагаемых вида $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ в сумме не дадут 1).

Значит, всего цифр 10, а доля цифр «1» равна $\frac{1}{2}$. Остальные дроби могут быть равны $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. Сумма долей должна быть равна 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}.$$

В знаменателях по разу встретились цифры 0, 2 и 5, любые две можно упомянуть явно, тогда их доля будет $\frac{1}{5}$, а на долю единственной оставшейся цифры придётся $\frac{1}{10}$.

Таким образом, Коля написал: «В этой фразе 1/2 всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны 1/5, а доля всех остальных цифр составляет 1/10». (или «...доли цифр 0 и 2 одинаковы...» или «...доли цифр 0 и 5 одинаковы...»). □

9 Проценты

Задача 3.9.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.7.1) Три пирата делили мешок монет. Первый забрал 3/7 всех монет, второй — 51% остатка, после чего третьему осталось на 8 монет меньше, чем получил второй. Сколько монет было в мешке?

Решение. Так как второй пират забрал 51% монет, оставшихся после первого, то третьему пирату досталось 49% этого количества. Следовательно, 8 монет составляют 2% монет, оставшихся после первого пирата. Значит, на долю второго и третьего пришлось $8 \cdot 50 = 400$ монет, что составляет $4/7$ от их общего количества. Таким образом, в мешке было

$$400 : \frac{4}{7} = 700 \text{ монет.}$$

□

Задача 3.9.7. («Математический праздник» — 1994.7.1) За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объём выпускаемой продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

Подсказка. Если объём выпускаемой продукции снизился на 51%, значит, он составил 49% от исходного, а $49 = 7^2$.

Решение. Пусть за год выпуск снижался на x%. Приняв исходный объём выпуска продукции за 1, получим, что через год выпуск продукции составил

$$a = 1 - \frac{x}{100},$$

а через два года — a^2. Отсюда $a^2 = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$, то есть $a = 0{,}7$. Значит, объём выпускаемой продукции каждый год снижался на 30%. □

Задача 3.9.8. («Математический праздник» — 1996.6.2) Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше Алика собрал грибов Вася?

Решение. Пусть Боря собрал x грибов. Тогда Алик собрал $0{,}8x$, а Вася — $1{,}2x$ грибов. Таким образом, Вася собрал грибов в $1{,}2 : 0{,}8 = 1{,}5$ раза больше, чем Алик. Следовательно, Вася собрал на 50% больше грибов, чем Алик. □

Задача 3.9.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.6.2) Одно число увеличили на 2%, а другое — на 3%. Могла ли сумма увеличиться на 5%? (Числа считаются положительными.)

Решение. Пусть наши числа — x и y, тогда:

$$1{,}02x + 1{,}03y = 1{,}05(x + y).$$

Откуда $0{,}03x = -0{,}02y$, что невозможно для двух положительных чисел x и y. □

Задача 3.9.10. («Математический праздник» — 2009.6.3) В парке росли липы и клёны. Клёнов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего клёнов стало 20%. А осенью посадили клёны, и клёнов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

Решение. Сначала лип было в 1,5 раза меньше, чем клёнов, а летом стало в 4 раза больше. При этом количество клёнов не изменилось. Значит, лип стало в $1{,}5 \cdot 4 = 6$ раз больше. К концу года отношение числа лип к количеству всех деревьев стало таким же, как было в начале. Но осенью количество лип не менялось, значит, количество всех деревьев (по сравнению с исходным) увеличилось в шесть раз. □

Задача 3.9.11. (Турнир Архимеда — 2015.2) На завтрак Малыш и Карлсон ели конфеты, причем Карлсон съел все свои конфеты, а Малыш только 20% своих конфет. Известно, что вместе они съели 80% всех конфет, имевшихся у них до завтрака. У кого из них до завтрака было больше конфет и во сколько раз?

Решение. **Первый способ.** Заметим, что 80% конфет, имевшихся у Малыша, составляют 20% общего количества конфет. Следовательно, 100% имевшихся у Малыша конфет составляют 25% общего их количества. Остальные 75% общего количества конфет — конфеты Карлсона. Следовательно, у Карлсона первоначально было в 3 раза больше конфет, чем у Малыша.

Второй способ. Пусть у Малыша x конфет, а у Карлсона y конфет, тогда всего съедено $0{,}2x + y$ конфет.

С другой стороны, съеденных конфет — $0{,}8(x + y)$. Получаем уравнение:

$$0{,}2x + y = 0{,}8(x + y).$$

Откуда $2y = 6x$ или $y = 3x$. Следовательно, у Карлсона конфет больше в 3 раза. □

Задача 3.9.12. (Турнир Архимеда — 2011.2) У Феди в дневнике на 10% больше двоек, чем у Лизы. Федя исправил 10% своих двоек, а Лиза — 1% своих. У кого из них осталось больше неисправленных двоек?

Решение. Пусть x — количество двоек у Лизы, тогда у Феди $1{,}1x$ двоек. Количество неисправленных двоек у Феди — $0{,}9 \cdot 1{,}1x = 0{,}99x$, а у Лизы — $0{,}99x$. Значит, у Феди и Лизы осталось одинаковое количество неисправленных двоек. □

Задача 3.9.13. («Математический праздник» — 2001.7.2) Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха — уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у игрока оказаться 80 рублей 19 копеек?

Подсказка. $8019 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$.

Решение. Увеличение на 10% означает умножение на 1,1. Уменьшение на 10% означает умножение на 0,9. Так как $8019 = 729 \cdot 11 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$, то после трёх промахов и одного попадания у игрока будет $100 \cdot (0{,}9)^3 \cdot 1{,}1 = 80{,}19$ рублей. □

Задача 3.9.14. («Математический праздник» — 1998.7.2) В банановой республике прошли выборы в парламент, в котором участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

Подсказка. Найдите двумя способами, сколько человек любят мандарины.

Решение. Пусть всё население республики — N человек, из них за «Мандарин» проголосовало M человек. Тогда, с одной стороны, мандарины любят $0{,}46N$ человек, а с другой, это число равно числу проголосовавших за «Мандарин» плюс 10% от оставшихся, то есть $0{,}1 \cdot (N - M)$. Отсюда

$$M + 0,1(N - M) = 0{,}46N,$$

или $0{,}9M = 0{,}36N$. Итак,

$$\frac{M}{N} = \frac{0{,}36}{0{,}9} = 0{,}4.$$

Значит, партия «Мандарин» набрала на выборах 40% голосов. □

Задача 3.9.15. («Математический праздник» — 1991.7.3) В начале года винтики, шпунтики и гаечки продавались по одинаковой цене 1 рубль за 1 кг. 27 февраля Верховный Совет СССР принял закон о повышении цены на винтики на 50% и снижении цены на шпунтики на 50%. 28 февраля Верховный Совет РСФСР принял закон о снижении цены на винтики на 50% и повышении цены на шпунтики на 50%. Какой товар будет самым дорогим и какой самым дешёвым в марте?

Решение. Цена на гаечки не изменится, и они окажутся самыми дорогими, а винтики и шпунтики будут стоить по 75 коп. □

Задача 3.9.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.4) В начале года в 7 классе учились 25 человек. После того, как туда пришли семеро новеньких, процентный состав отличников увеличился на 10 (если в начале года он был $a\%$, то теперь — $(a+10)\%$). Сколько теперь отличников в классе?

Решение. Пусть в классе было x отличников, а пришло ещё y отличников. Из условия следует равенство:

$$x + \frac{y}{32} - \frac{x}{25} = 0{,}1.$$

Избавившись от знаменателей, получим: $25y - 7x = 80$. Следовательно,

$$7x = 5 \cdot (5y - 16).$$

Отсюда видно, что $5y - 16$ делится на 7. Поэтому на 7 делится и

$$(5y - 16) + 21 = 5 \cdot (y + 1).$$

Значит, $y + 1$ кратно 7. Так как $y \leqslant 7$, то $y = 6$. Таким образом, $x = 10$, а отличников стало 16. $\square$

Задача 3.9.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.6) Толстый выпуск газеты стоит 30 рублей, а тонкий — дешевле. Для пенсионеров установлена скидка на одно и то же количество процентов на все газеты, поэтому тонкий выпуск той же газеты они покупают за 15 рублей. Известно, что в любом случае газета стоит целое количество рублей. Сколько стоит тонкая газета без скидки и сколько стоит толстая газета для пенсионеров?

Решение. Пусть толстая газета для пенсионеров стоит $30k$ рублей ($k < 1$), а полная стоимость тонкой газеты — x рублей ($x < 30$).

Тогда $kx = 15$, $30kx = 450$. По условию $30k$ и x — целые числа, поэтому x — делитель числа $450 = 2 \cdot 32 \cdot 52$, причём $15 < x < 30$. Отсюда $x = 25$ или $x = 18$. Значит, тонкая газета без скидки и толстая газета для пенсионеров стоят либо 25 рублей и 18 рублей, либо 18 рублей и 25 рублей соответственно. $\square$

Задача 3.9.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.8) Буратино закопал на Поле Чудес два слитка — золотой и серебряный. В те дни, когда погода хорошая, золотой слиток увеличивается на 30%, а серебряный — на 20%. А в те дни, когда погода плохая, золотой слиток уменьшается на 30%, а серебряный — на 20%. Через неделю оказалось, что один из слитков увеличился, а другой уменьшился. Сколько дней была хорошая погода?

Решение. Увеличение числа на 20% равносильно его умножению на 1,2, а уменьшение числа на 20% — его умножению на 0,8 (для 30% — соответственно на 1,3 и 0,7). Поэтому результат не зависит от чередования хорошей и плохой погоды, а только от количества хороших и плохих дней.

После одного хорошего и одного плохого дня оба слитка уменьшаются: $1{,}2 \cdot 0{,}8 < 1$ и $1{,}3 \cdot 0{,}7 < 1$. (Это утверждение верно для любого количества процентов.) Это значит, что после трёх хороших и трёх плохих дней оба слитка уменьшились.

Следовательно, хороших дней — не меньше четырёх. Вариант с четырьмя хорошими днями подходит: золотой слиток уменьшается, а серебряный увеличивается. Действительно, $1{,}24 \cdot 0{,}8^3 > 1$, а $1{,}34 \cdot 0{,}7^3 < 1$.

С другой стороны, после двух хороших и одного плохого дня золотой слиток увеличивается. Значит, он увеличивается также после четырёх хороших и двух плохих дней, и тем более после пяти хороших и двух плохих. Таким образом, если хороших дней пять и более, то золотой слиток растёт. Поэтому только при четырёх хороших днях один слиток растёт, а другой уменьшается. □

Задача 3.9.19. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.8) Вася положил некую сумму в рублях в банк под 20% годовых. Петя взял другую сумму в рублях, перевёл её в доллары и положил в банк под 10% годовых. За год цена одного доллара в рублях увеличилась на 9,5%. Когда через год Петя перевёл свой вклад в рубли, то оказалось, что за год Вася и Петя получили одинаковую прибыль. У кого первоначально была сумма больше — у Васи или у Пети?

Решение. Только за счёт повышения курса доллара Петя получил 9,5% прибыли. Кроме того, он получил 10% прибыли от банка и $10 \cdot 0{,}095 = 0{,}95\%$ прибыли за счёт перевода этой прибыли в рубли. Итого он получил 20,45% прибыли — больше, чем 20%, которые получил Вася. Значит, исходный капитал у Васи был больше. □

10 Смеси и концентрации

Задача 3.10.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.5) Буфетчик делает молочно–вишнёвый коктейль, смешивая в миксере молоко и вишнёвый сок. Молоко стоит 20 рублей за литр, а вишнёвый сок — 30 рублей за литр. Известно, что стоимость молока, заливаемого в миксер, равна стоимости сока, заливаемого в миксер. Сколько стоит литр молочно–вишнёвого коктейля?

Решение. **Первый способ.** Пусть буфетчик заливает в миксер x литров сока. Стоимость x л сока составляет $30x$ рублей. Значит, стоимость молока, заливаемого в миксер тоже составляет $30x$ рублей. Поскольку литр молока стоит 20 рублей, то $30x$ рублей соответствуют $1{,}5x$ л сока. В результате буфетчик получает $x + 1{,}5x$ л коктейля общей стоимостью $30x + 30x$ рублей. Чтобы узнать цену за литр молочно–вишнёвого коктейля, надо стоимость коктейля разделить на его объём, т. е. $60x$ разделить на $2{,}5x$, получится 24 рубля.

Второй способ. На рубль в миксер заливается 1/20 литра молока, и ещё на рубль — 1/30 литра сока. Таким образом, стоимость обоих компонентов одинакова, причём на 2 рубля получается

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} \text{ литра}$$

коктейля, поэтому литр коктейля стоит $2 \cdot 12 = 24$ рубля. □

Задача 3.10.6. (Московская математическая олимпиада — 1994.8.1) Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

Решение. **Первый способ.** На банку напитка уходит 1/6 бидона яблочного и 1/10 бидона виноградного сока, значит, объём банки равен

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$$

объёма бидона. После изменения рецептуры на банку напитка уходит 1/5 бидона яблочного сока и

$$\frac{4}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

бидона виноградного сока.

Второй способ. На 30 банок напитка было затрачено пять бидонов яблочного и три бидона виноградного сока, то есть всего 8 бидонов. По новой рецептуре на 30 банок затратят 6 бидонов яблочного сока. Значит, виноградного сока затратят два бидона. Итак, бидона виноградного сока хватит на 15 банок. □

Задача 3.10.7. (Региональный этап олимпиады им. Леонарда Эйлера — 2011.8.3) Имеются три литровых банки и мерка объёмом 100 мл. Первая банка пуста, во второй — 700 мл сладкого чая, в третьей — 800 мл сладкого чая.

При этом во второй банке растворено 50 г сахара, а в третьей — 60 г сахара. Разрешается набрать из любой банки полную мерку чая и перелить весь этот чай в любую другую банку. Можно ли несколькими такими переливаниями добиться, чтобы первая банка была пуста, а количество сахара во второй банке равнялось количеству сахара в третьей банке?

Решение. Исходная концентрация сахара во второй банке составляет $50/700 = 1/14$, а в третьей — $60/800 = 3/40$. Поскольку $3/40 > 1/14$, после любых переливаний концентрация сахара в каждой непустой банке будет не больше $3/40$. Заметим, что после любых переливаний количество чая в каждой банке кратно 100 мл. Поэтому если весь чай оказался во второй и третьей банках, то в одной из них его не больше 700 мл. Допустим, в ней оказалась половина всего сахара. Тогда его концентрация в ней не меньше чем $55/700 = 11/140 > 3/40$, что невозможно. □

11 Прогрессии и закономерности

Задача 3.11.5. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2011/2012.11.1) Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение каждых двух различных её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.

Решение. Пусть a — один из членов прогрессии, а d — её разность. По условию, числа $a \cdot (a + d)$ и $a \cdot (a + 2d)$ — также члены прогрессии. Значит, их разность имеет вид nd при некотором целом n, то есть $ad = nd$. Поскольку $d > 0$, получаем $a = n$, то есть a — целое число. □

Задача 3.11.6. (Турнир им. Ломоносова — 1982.04) а) Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. Найти эти числа и доказать, что других нет.

б) Тот же вопрос про 100 чисел, дающих в сумме 5051.

Решение. Расположим числа в порядке возрастания. Тогда очевидно, что каждое число будет больше своего номера. Найдём сумму номеров всех чисел:

а) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$;
б) $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$.

Последнюю сумму можно посчитать следующим способом: $(1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$.

В обоих случаях эта сумма на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число на единицу больше своего номера, а остальные — равны ему. Числом, большим своего номера, может быть только последнее. Действительно, если какое-то число больше своего номера, то все последующие числа тоже больше своего номера. Поэтому искомыми числами будут:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 7;
б) 1, 2, …, 99, 101.

□

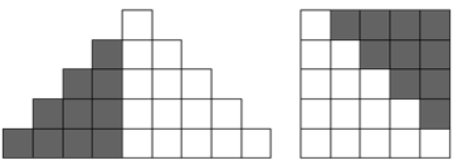
Задача 3.11.7. («Математический праздник» — 1993.6.1) Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в субботу?

Подсказка. Разбейте «следующее» высказывание пополам и сравните с «предыдущим».

Решение. Разбив «следующее» высказывание на две равные части, мы видим, что первая половина совпадает с «предыдущим», а вторая получается из предыдущего «отражением в зеркале», то есть заменой букв А на буквы У и наоборот. Значит, в субботу инопланетянин воскликнет «АУУАУААУУААУАУУАУААУАУУААУУАУААУ!». □

Задача 3.11.8. (Турнир им. Ломоносова — 1999.02) На клетчатой бумаге нарисована фигура: в верхнем ряду — одна клеточка, во втором сверху — три клеточки, в следующем ряду — 5 клеточек, и т. д., всего рядов — n. Докажите, что общее число клеточек есть квадрат некоторого числа.

Решение. На рисунке показано, как фигуру, описанную в условии задачи, разрезать на две части (квадраты в одной из частей перечёркнуты) и из этих частей сложить квадрат. Количество клеточек в квадрате, нарисованном на клетчатой бумаге, очевидно, равно квадрату количества клеток, расположенных вдоль его стороны.



Таким образом, мы не только показали, что количество клеточек равно квадрату некоторого числа (что требовалось в условии задачи), но и нашли это число n, то есть показали, что

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (n > 0).$$

□

12 Неравенства в текстовых задачах

Задача 3.12.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.1) Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причём по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

Решение. Выясним, сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39, результат будет меньше 857. Значит, в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет:

$$1 + \ldots + 40 = 820, \quad 857 - 820 = 37.$$

Следовательно, два билета было продано на тридцать седьмое место. □

Задача 3.12.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.1;7.1) В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, …, 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

Решение. Сдача тремя разными монетами составляет не меньше, чем $1 + 2 + 3 = 6$ сольдо. Так как этих денег не хватило на мороженое, то оно стоит не меньше 7 сольдо.

Больше 7 сольдо мороженое стоить не может, иначе на два мороженых Буратино потратил бы не меньше $8 + 8 = 16$ сольдо, но у него была всего одна монета, то есть не больше 20 сольдо, и тогда он не смог бы получить 6 сольдо сдачи. Значит, мороженое может стоить только 7 сольдо. При этом процесс платы за мороженое выглядел так:

$$20 - 7 = 13, \quad 13 - 7 = 6 = 1 + 2 + 3.$$

□

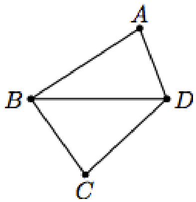
Задача 3.12.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.2) В комнате у Папы Карло на каждой стене висят часы, причём они все показывают неверное время: первые часы ошибаются на 2 минуты, вторые — на 3 минуты, третьи — на 4 минуты и четвёртые — на 5 минут. Однажды Папа Карло, выходя на улицу, решил узнать точное время и увидел такие показания часов: 14:54, 14:57, 15:02 и 15:03. Помогите Папе Карло определить точное время.

Решение. Показания первых и четвёртых часов различаются на 9 минут. Значит, из них одни ошибаются на 4 минуты, а другие — на 5 минут. Следовательно, точное время: 14:59 или 14:58.

В первом случае вторые часы на 2 минуты отстают, а третьи на три минуты спешат. Это не противоречит условию задачи.

Второй случай невозможен, так как часы, показывающие 14:57, ошибаются ровно на 1 минуту, что противоречит условию. □

Задача 3.12.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.2) На карте обозначены 4 деревни: A, B, C и D, соединённые тропинками (с рисунок). В справочнике указано, что на маршрутах $A-B-C$ и $B-C-D$ есть по 10 колдобин, на маршруте $A-B-D$ колдобин 22, а на маршруте $A-D-B$ колдобин 45. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо двигаться?



Решение. Существует три возможных маршрута из A в D:

1. $A-D$;
2. $A-B-D$;
3. $A-B-C-D$.

Из того, что на маршруте $A-B-D$ находятся 22 колдобины, следует, что на тропинке $B-D$ их не больше, чем 22. Значит, из 45 колдобин маршрута $A-D-B$ не меньше, чем 23 колдобины находятся на тропинке $A-D$. Таким образом, маршрут 2 выгоднее маршрута 1.

Так как на маршруте $A-B-C$ есть 10 колдобин, то на тропинке $A-B$ их не больше 10. Значит, из 22 колдобин маршрута $A-B-D$ не менее двенадцати приходится на тропинку $B - D$. Но на участке $B - C - D$ есть только 10 колдобин, поэтому он выгоднее, чем $B - D$. Итак, маршрут 3 выгоднее маршрута 2. Следовательно, туристам нужно двигаться по маршруту $A - B - C - D$. $\square$

Задача 3.12.9. («Математический праздник» — 2006.6.3) Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире №333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Решение. Если на этаже не более трёх квартир, то в десяти подъездах их не более, чем $10 \cdot 9 \cdot 3 = 270$, то есть в 10-м подъезде квартиры №333 не будет.

Если на этаже не менее пяти квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее, чем $9 \cdot 9 \cdot 5 = 405$ квартир, то есть Сашина квартира будет не в 10-м подъезде. Значит, квартир на этаже 4, в первых девяти подъездах $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$ квартиры.

Тогда в 10-м подъезде квартиры начинаются с 325-й. На втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем — с 333-й. Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж. $\square$

Задача 3.12.10. («Математический праздник» — 2001.6.3) Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Этой коробки Наташе хватило на 41 чашку чая, а Инне — на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

Решение. Заметим, что в коробке не могло быть меньше 20 пакетиков: если их хотя бы 19, то Инна не сможет выпить больше $19 \cdot 3 = 57$ чашек, а она выпила 58.

С другой стороны, в коробке не могло быть больше 20 пакетиков: если их хотя бы 21, то Наташа не могла выпить меньше $21 \cdot 2 = 42$ чашек, а она выпила 41.

Тем самым, в коробке было 20 пакетиков: Инна заварила 18 пакетиков по три раза и два пакетика по два раза, а Наташа заварила один пакетик три раза и 19 пакетиков по два раза. $\square$

Задача 3.12.11. («Математический праздник» — 1997.6.3;7.4) В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

Подсказка. Обратите внимание: среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик.

Решение. Поскольку среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, то груздей не может быть больше 11. А поскольку среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь, то рыжиков не может быть больше 19.

Но поскольку всего в корзине 30 грибов, то единственный возможный вариант — в корзине 19 рыжиков и 11 груздей. □

Задача 3.12.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.3) Волшебным считается момент, в который число минут на электронных часах совпадает с числом часов. Чтобы сварить волшебное зелье, его надо и поставить на огонь, и снять с огня в волшебные моменты. А чтобы оно получилось вкусным, его надо варить от полутора до двух часов. Сколько времени варится вкусное волшебное зелье?

Решение. Число часов на электронных часах равно числу минут 23 раза в сутки:

$$00{:}00, 01{:}01, 02{:}02, \ldots, 21{:}21, 22{:}22, 23{:}23.$$

Если мы находимся в пределах одних суток, то разница между этими числами равна либо 1 часу 1 минуте, либо 2 часам 2 минутам, и так далее. То есть, если зелье варится без перехода через полночь, то оно не может быть вкусным.

При переходе через полночь можно двумя способами получить разницу времени от полутора до двух часов: начать в 22:22 и закончить в 00:00 или начать в 23:23 и закончить в 01:01. В обоих случаях зелье нужно варить 1 час 38 минут. □

Задача 3.12.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.3) Пятеро друзей скинулись на покупку. Может ли оказаться так, что любые два друга в сумме внесли менее трети стоимости покупки?

Решение. Пусть друзья внесли a, b, c, d и e рублей соответственно. Тогда общая сумма S внесённых денег равна $a + b + c + d + e$.

Предположим, что каждые два друга внесли меньше, чем $S/3$ рублей. Тогда каждое из чисел $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$ и $e+a$ меньше $S/3$. Складывая, получим $2 \cdot (a + b + c + d + e) < 5S/3$, то есть $6S < 5S$. Противоречие. □

Задача 3.12.14. («Математический праздник» — 2001.7.3) Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал два подъезда и добавил три этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать ещё два подъезда и добавить ещё три этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

Решение. Пусть в исходном проекте было 5 подъездов, 2 этажа и на каждом этаже по одной квартире. Тогда квартир было 10. После изменения проекта стало 3 подъезда и 5 этажей — 15 квартир, а после второго изменения — 1 подъезд и 8 этажей — 8 квартир. Таким образом, квартир могло стать меньше. □

Задача 3.12.15. (Турнир Архимеда — 2016.3) Вася и Петя задумали по 5 натуральных чисел, причём все 10 задуманных чисел оказались различными. Среднее арифметическое чисел Васиного набора равно наибольшему числу Петиного набора. Может ли среднее арифметическое чисел Петиного набора быть равно:

а) наименьшему числу Васиного набора;
б) наибольшему числу Васиного набора?

Решение. а) Может, например. Числа Васи: 6, 8, 11, 12 и 13. Среднее арифметическое: 10. Числа Пети: 1, 3, 7, 9 и 10. Среднее арифметическое: 6.

б) Среднее арифметическое меньше самого большого из чисел. Значит, самое большое число Васи больше самого большого числа Пети. Среднее арифметическое Васи меньше самого большого числа Васи, которое больше самого большого числа Пети. Равенство невозможно. □

Задача 3.12.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.3) Пётр Петрович и Иван Иванович ехали вместе в поезде. Каждый из них сначала смотрел в окно, потом читал газету, потом разгадывал кроссворд и под конец пил чай. Только у Петра Петровича на каждое следующее занятие уходило вдвое больше времени, чем на предыдущее, а у Ивана Ивановича — в 4 раза. Начали смотреть в окно они одновременно и кончили пить чай также одновременно. Что делал Пётр Петрович, когда Иван Иванович приступил к кроссворду?

Решение. Пусть Пётр Петрович смотрел в окно x минут, а Иван Иванович — y минут. Тогда $x + 2x + 4x + 8x = y + 4y + 16y + 64y$, то есть $15x = 85y$. Иван Иванович начал разгадывать кроссворд через $5y = 15x/17$ минут. Это меньше, чем x, значит, Пётр Петрович в это время смотрел в окно. □

Задача 3.12.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.4) В классе учатся 27 человек, но на урок физкультуры пришли не все. Учитель разбил пришедших на две равные по численности команды для игры в пионербол. При этом в первой команде была половина всех пришедших мальчиков и треть всех пришедших девочек, а во второй — половина всех пришедших девочек и четверть всех пришедших мальчиков. Остальные пришедшие ребята помогали судить. Сколько помощников могло быть у судьи?

Решение. Из условия следует, что количество пришедших девочек кратно 6, а количество пришедших мальчиков кратно 4. Обозначим эти количества через $6d$ и $4m$ соответственно. Так как численность двух команд была одинаковой, то $2m + 2d = 3d + m$, откуда $m = d$.

Учитывая, что $6d + 4m < 27$, то есть $10d < 27$, получим

$$m = d = 1 \text{ или } m = d = 2.$$

Так как судье помогали шестая часть девочек и четверть мальчиков, то количество помощников равно $m + d$. Значит, их было либо двое, либо четверо. $\square$

Задача 3.12.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.4) Если каждой девочке дать по одной шоколадке, а каждому мальчику по две, то шоколадок хватит. А если каждому мальчику дать по одной шоколадке, а каждой девочке по две, то их не хватит. А если девочкам не давать вообще, то хватит ли каждому мальчику по три шоколадки?

Решение. Выдадим каждому ребёнку по одной шоколадке. Из условия следует, что добавки по одной шоколадке мальчикам хватит, а девочкам — нет. Следовательно, девочек больше, чем мальчиков. Добавим мальчикам по шоколадке. Теперь отберём все шоколадки у девочек; их с лихвой хватит на ещё одну добавку мальчикам. $\square$

Задача 3.12.19. («Математический праздник» — 2010.7.4) В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трёх исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причём за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

Решение. Число голосов, поданных за Петуха и Ворону, не может быть больше $15 + 13 = 28$. Аналогично за Ворону и Кукушку в сумме не может быть подано больше $18 + 13 = 31$ голоса, а за Кукушку и Петуха — не больше $20 + 13 = 33$ голосов.

Сложив эти три результата, мы оценим сверху удвоенное число всех голосов. Таким образом, число членов жюри не больше $(28 + 31 + 33) : 2 = 46$. С другой стороны, из первого объявления Дятла оно не меньше $59 - 13 = 46$. Тем самым, членов жюри ровно 46, а все неравенства на самом деле обращаются в равенства.

Число проголосовавших за Ворону можно найти как разность общего числа членов жюри и суммы проголосовавших за Кукушку и Петуха: $46 - 33 = 13$ судей. $\square$

Задача 3.12.20. («Математический праздник» — 1993.6.5) Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между Дядей Фёдором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

Подсказка. Матроскин и до пересадки был крайним слева.

Решение. По условию, крайний справа — это Шарик. В частности, он сидит правее Матроскина. После пересадки Шарика слева от Матроскина никого не оказалось. Значит, там никого и не было! То есть, крайний слева — это Матроскин. Рядом с ним по условию — Дядя Фёдор. Ну а потом, на единственном оставшемся свободным месте — почтальон.

Значит, они сидят слева направо в следующем порядке: кот Матроскин, Дядя Фёдор, почтальон Печкин, Шарик. □

Задача 3.12.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.5) У папы Карло есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек — пароход, из 14 дощечек — самолёт. Самолёт стоит 19 золотых, пароход — 8 золотых, мельница — 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать папа Карло?

Решение. На один самолёт идут те же 14 дощечек, что и на два парохода, но самолёт приносит больший доход. Поэтому не имеет смысла делать более одного парохода.

Из 15 дощечек можно сделать три мельницы (доход 18 золотых) или самолёт (доход 19 золотых, а лишняя дощечка не повредит). Поэтому имеет смысл делать не более двух мельниц.

Следовательно, на пароходы и мельницы папе Карло следует потратить не более $7 + 2 \cdot 5 = 17$ дощечек. Поэтому самолётов надо сделать 8 или 9.

Во втором случае мы получим только 9 самолётов, в первом помимо 8 самолётов дощечек хватит ещё на две мельницы и пароход (что стоит дороже самолёта). Итого папа Карло заработает $8 \cdot 19 + 2 \cdot 6 + 8 = 172$ золотых. □

Задача 3.12.22. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.5) Али–Баба и 40 разбойников делят добычу. Делёж считается справедливым, если любым 30 участникам достаётся в сумме не менее половины добычи. Какая наибольшая доля может достаться Али–Бабе при справедливом дележе?

Решение. Выберем среди разбойников 30 наиболее бедных. Они в сумме получили не более 3/4 того, что досталось все разбойникам. При этом, так как у них (по условию) по крайней мере половина добычи, у всех сорока разбойников будет хотя бы

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

добытого богатства.

Пусть Али–Баба возьмёт треть добычи, сорок разбойников — поровну, то есть по

$$\frac{4}{3} : 40 = \frac{1}{60}$$

добычи. Тогда у любых 30 разбойников ровно половина добычи, а у любых 29 плюс у Али–Бабы — ещё больше. $\square$

Задача 3.12.23. («Математический праздник» — 1994.6.6) Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причём Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

Подсказка. Подумайте, хватило бы всем кофе и молока, если бы в семье было 7 человек.

Решение. Объём четырёх чашек равен объёму всего молока плюс 2/3 объёма кофе, то есть меньше общего объёма молока и кофе. Значит, в семье больше четырёх человек. А объём шести чашек больше общего объёма молока и кофе, значит, в семье меньше шести человек. Следовательно, в семье 5 человек. $\square$

Задача 3.12.24. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.6) На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Останавливаясь у каждого столба, Бобик заметил, что если сложить все цифры, записанные на обеих сторонах таблички, то получится 13. Найдите расстояние между сёлами.

Решение. Расстояние между сёлами не может быть больше, чем 49 километров, так как тогда на одном из столбов будет написано с одной стороны 49, а с другой — не 0, то есть, сумма цифр будет больше 13.

На первых девяти столбах с одной стороны записаны однозначные числа от 1 до 9, поэтому числа, записанные с другой стороны, также должны быть из одного десятка (чтобы суммы цифр были одинаковы). Следовательно, искомое расстояние выражается числом, оканчивающимся на 9. Числа 9, 19, 29 и 39 решениями не являются, так как на первом столбе сумма цифр не будет равна 13.

Таким образом, искомое расстояние равно 49 километрам. $\square$

Задача 3.12.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.7) Вася живёт в многоквартирном доме. В каждом подъезде дома одинаковое количество этажей, на каждом этаже по четыре квартиры, каждая квартира имеет одно-, дву- или трёхзначный номер. Вася заметил, что количество квартир с двузначным номером у него в подъезде в десять раз больше количества подъездов в доме. Сколько всего квартир может быть в этом доме?

Решение. Так как двузначных номеров квартир не больше, чем 90, то количество подъездов не больше, чем 9. Рассмотрим два случая.

Пусть все двузначные номера квартир находятся в Васином подъезде. Тогда Вася живёт в первом подъезде, квартир в нём не меньше, чем 100, значит, этажей в доме не меньше 25. Следовательно в доме 9 подъездов, в каждом из которых может быть по 100, по 104 или по 108 квартир ($112 \cdot 9 > 1000$). Значит, всего квартир в доме 900, 936 или 972.

Пусть не все двузначные номера квартир находятся в Васином подъезде. Обозначив количество подъездов через n, получим, что у него в подъезде $10n$ квартир с двузначными номерами, где n — натуральное число от 1 до 8. Если этот подъезд первый, то в нём есть однозначные номера квартир, поэтому в Васином подъезде их $10n + 9$, что не делится на 4. Противоречие.

Следовательно, в Васином подъезде не может быть 80, 70, 60 или 50 квартир с двузначными номерами (такие количества бывают только в первом подъезде). Если же в этом подъезде есть квартиры с трёхзначными номерами, то во всех предыдущих подъездах в сумме $99 - 10n$ квартир, что не делится на 4. Противоречие.

Таким образом, в Васином подъезде есть только двузначные номера квартир. Если их 40, то подъездов 4, и в каждом по 40 квартир. Тогда в доме: $40 \cdot 4 = 160$ квартир. Если же их не больше, чем 30, то подъездов не более трёх, а квартир не больше, чем 90, что противоречит тому, что в доме есть квартиры с трёхзначными номерами.

Значит, в Васином доме может быть 160, 900, 936 или 972 квартир. $\square$

Задача 3.12.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.7) Илья Муромец помнит, что на то, чтобы нейтрализовать 10-голового огнедышащего дракона, достаточно четырёх огнетушителей. А для того, чтобы нейтрализовать 16-голового дракона, достаточно семи огнетушителей. Какое наименьшее количество огнетушителей нужно для того, чтобы нейтрализовать 19-голового дракона?

Решение. Из условия следует, что для нейтрализации 20-голового дракона хватит восьми огнетушителей. Следовательно, такого количества огнетушителей хватит и для нейтрализации 19-голового дракона.

Докажем, что семи огнетушителей будет недостаточно. Предположим, что это не так, то есть, для нейтрализации 19-голового дракона семи огнетушителей хватит. Поскольку на нейтрализацию 16-голового дракона требуется не менее семи огнетушителей, то для нейтрализации трёх голов должно хватить менее одного огнетушителя. Это означает, что на каждую голову тратится менее 1/3 огнетушителя, то есть на 16 голов — менее 16/3, а значит меньше, чем 6 огнетушителей. Противоречие. □

Задача 3.12.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.6) На спортивном празднике ученики седьмых классов парами соревновались в беге по следующим правилам. По команде два человека начинают бежать с места старта в разные стороны по круговой дорожке стадиона. Финишем считается момент их встречи. Саша и Юра пробежали круг за 45 секунд. Две Алёны начали бежать с постоянными скоростями (не обязательно равными), но, когда им оставалось пробежать полкруга, одна Алёна увеличила скорость на 25%, а другая — на 28%. Оказалось, что первые полкруга они бежали на 5 секунд больше, чем вторые полкруга. У кого лучше результат: у девочек или у мальчиков?

Решение. Предположим, что обе Алёны увеличили скорость на 25%. Обозначим за x время, за которое они пробежали первые полкруга. Время за которое они пробежали вторые полкруга уменьшилось в 4/5 раза. По условию задачи

$$\frac{4}{5}x + 5 = x, \ \Rightarrow \ x = 25,$$

а общее время, за которое они пробежали бы круг, равно $25 + 25 - 5 = 45$ секунд. Но поскольку одна из Алён увеличила скорость больше, чем на 25%, то их общая скорость увеличилась больше, чем на 25%, а значит, и времени они потратили меньше, чем 45 секунд, то есть, результат у девочек лучше. □

Задача 3.12.28. («Покори Воробьёвы горы» 2016.5–6.1) Миша, Петя, Коля и Вася играли в «подкидного дурака», всего сыграли 16 партий. Каждый остался «в дураках» хотя бы один раз. Известно, что больше всех оставался Миша, а Петя и Коля в сумме остались 9 раз. Сколько раз остался «в дураках» Вася?

Решение. Петя или Коля остались не менее 5 раз, значит, Миша оставался не менее 6 раз. Следовательно, Вася остался «в дураках» один раз (ноль раз он не мог по условию). □

Задача 3.12.29. (Олимпиада «Ломоносов» — 2016.5–6.2,7–8.1) На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год.

Решение. Так как в году 365 дней или 366, а в неделе 7 дней, то мы можем узнать сколько недель в году: $365 : 7 = 52$ (остаток 1). В году 52 целых недели и остаётся 1 день. Поэтому если хотя бы 1 день считается за неделю, то в итоге на год приходится 53 недели, а если год високосный, то 54, так как эти 2 дня могут приходиться на разные недели (воскресенье первой недели и понедельник последней). □

Задача 3.12.30. (Олимпиада «Ломоносов» — 2017.5–6.3, 7–8.2) А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых лёгких весят в сумме 80 г, четыре самых тяжёлых — 200 г, а суммарный вес всех котят равен 500 г. Сколько котят родила кошка?

Решение. Оставшиеся котята должны весить больше, чем более тяжелый из двух самых лёгких, и меньше, чем более лёгкий из четырёх тяжёлых.

Вес самого тяжёлого из лёгких не меньше 40 г. Вес самого лёгкого из тяжёлых до 50 г. Т. е. оставшиеся котята весят от 40 до 50 г.

Вес оставшихся котят: $500 - (200 + 80) = 220$ г. Наибольшее количество котят может быть при наименьшем весе и, наоборот, наименьшее количество при наибольшем весе:

$$220 : 50 = 4{,}4, \qquad 220 : 40 = 5{,}5.$$

Значит, количество оставшихся котят x удовлетворяет условию: $4{,}4 < x < 5{,}5$. При этом x — натуральное число, следовательно $x = 5$. Тогда всего котят:

$$2 + 5 + 4 = 11.$$

□

Задача 3.12.31. (Курчатов — 2015.7.1) Пятерых детей выстроили в шеренгу и раздали им 111 конфет. У детей, стоящих слева от Данила — 96 конфет, справа от Люды — 57, слева от Максима — 69, справа от Саши — 75 конфет. Пятого ребенка зовут Валя. Как зовут того, кому досталось больше всего конфет, и сколько у него конфет?

Решение. Поскольку справа от Саши конфет больше, чем справа от Люды, то Люда стоит правее Саши. Аналогично, Максим — левее Данила.

Поскольку конфет слева от Максима и справа от Люды в сумме больше, чем всего конфет ($69 + 57 > 111$), то чьи-то конфеты сосчитаны более одного раза. Значит, между Людой и Максимом кто-то стоит, и это может быть только

Валя. Именно за счёт неё насчитано $69+57-111 = 15$ лишних конфет. Значит, у Вали как раз 15 конфет.

А вообще, справа налево дети стоят в таком порядке: Саша, Люда, Валя, Максим, Данил.

Справа от Саши на $75 - 57 = 18$ конфет больше, чем справа от Люды — за счёт Люды. Слева от Данила на $96 - 69 = 27$ конфет больше, чем слева от Максима — за счёт Максима.

Сашины конфеты дополняют до 111 конфеты справа от него, то есть, у него $111 - 75 = 36$ конфет. Аналогично, у Данила $111 - 96 = 15$ конфет. Итак, больше всех конфет досталось Саше. □

Задача 3.12.32. (Курчатов — 2014.7.3) От двух игрушечных азбук осталось всего 14 букв. Каждая буква первой азбуки тяжелее любой буквы из второй, но если буквы взяты из одной и той же азбуки, то весят поровну. Известно, что составленное из этих букв слово ЦИРКУЛЬ легче, чем слово ЧАСТНОЕ; слово ЧАСТЬ легче, чем КРЕСТ; а буква Е легче Ь. Определите все тяжёлые буквы.

Решение. В словах ЦИРКУЛЬ и ЧАСТНОЕ по 7 букв и нет повторяющихся. По условию, букв всего 14. Значит, среди всех рассматриваемых кубиков — нет с одинаковыми буквами вообще (каждая буква или из набора лёгких кубиков, или из набора тяжёлых, но только из одного).

Рассмотрим слова ЧАСТЬ и КРЕСТ. Из первого пункта следует, что буквы СТ весят одинаково, значит рассматривать нужно только сочетания ЧАЬ и КРЕ.

Известно, что Е легче Ь, а ЧАЬ легче КРЕ. Это возможно только в том случае, если ЧА из более лёгкой азбуки, а КР из более тяжёлой, т. е. в ЧАЬ 2 буквы лёгкие, одна тяжёлая, а в КРЕ 1 буква лёгкая, 2 тяжёлые. Легко проверить, что при любых других вариантах получается, что КРЕ весит или также, или меньше, чем ЧАЬ.

Рассмотрим ЦИРКУЛЬ и ЧАСТНОЕ, учитывая, что КРЬ — тяжёлые кубики, ЧАЕ — лёгкие. Слово ЦИРКУЛЬ может быть легче, чем слово ЧАСТНОЕ, только в случае, если все неизвестные по весу в слове ЦИРКУЛЬ буквы ЦИУЛ — лёгкие , а все неизвестные по весу в слове ЧАСТНОЕ буквы СТНО — тяжёлые, т. е. если в слове ЦИРКУЛЬ 4 лёгкие и 3 тяжёлые буквы, а в слове ЧАСТНОЕ — 3 лёгкие и 4 тяжёлые. При любых других вариантах условие задачи не выполняется.

Таким образом, все тяжелые буквы: К, Р, Ь, С, Т, Н, О. □

Задача 3.12.33. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2015.7.4) Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок. Причём в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?

Решение. Пусть в первой банке x жуков, тогда во второй банке не меньше, чем $x+1$ жук, в третьей не меньше, чем $x+2$ жука, $\ldots$, в десятой банке не меньше чем $x+9$ жуков. Следовательно, общее количество жуков не меньше, чем $10x+45$. Учитывая, что всего рассаживали 150 жуков, получим $x \leqslant 10$.

С другой стороны, в десятой банке должно быть не больше, чем $2x$ жуков, в девятой — не больше чем $2x-1$ жук, и так далее. Это означает, что в первой банке не больше, чем $2x-9$ жуков, а всего жуков не больше, чем $20x-45$. Так как всего рассаживали 150 жуков, то $x \geqslant 10$.

Таким образом, в первой банке ровно 10 жуков, а в последней банке — 19 или 20. Найдём сумму одиннадцати последовательных чисел, начиная с десяти: $10+11+\ldots+19+20=165$.

Так как всего должно быть 150 жуков, то отсутствует банка, в которой 15 жуков. Следовательно, рассадка определяется однозначно: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 и 20 жуков с первой по десятую банки соответственно. Значит, в шестой банке — 16 жуков. $\square$

Глава 4

Теория чисел

1 Чётность

Задача 4.1.7. (Тургор. Весенний тур. Основной вариант — 1986/1987.7-8.1) Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки — пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

Подсказка. Каждая операция не меняет чётность количества монет у Пети.

Решение. Операция не меняет чётность количества монет у Пети, поэтому у него всегда будет нечётное число монет. □

Задача 4.1.8. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1992/1993. 10-11.4) Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах. Например: $(12, 3, 5) \to (12, 20, 5)$ (или $(4, 3, 5)$). Можно ли, начав с куч 1993, 199 и 19, сделать одну из куч пустой?

Решение. В каждой из исходных куч нечётное число камней. Нетрудно убедиться, что разрешённые операции сохраняют это свойство, и число камней в каждой из куч остаётся нечётным. Поэтому пустой ни одна из куч стать не может. □

Задача 4.1.9. (Тургор. Весенний тур. Основной вариант — 2010/2011.8-9.1) По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочерёдно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.

Доказательство. Пусть все разности рядом стоящих чисел нечётны. Тогда чётные и нечётные числа по кругу чередуются. Но это значит, что либо каждое чётное число больше обоих соседних нечётных, либо каждое чётное число меньше обоих соседних нечётных. В первом случае не найдётся места для числа 2, а во втором — для числа 2010. Противоречие. □

Задача 4.1.10. («Математический праздник» — 1990.5.1) В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Подсказка. Сумма двух чисел и их разность имеют одну чётность.

Решение. Количества голосов, поданных «за» и «против», имеют одну чётность (их сумма равна числу всех депутатов). Значит, их разность не может быть нечётным числом. □

Задача 4.1.11. (Турнир Архимеда — 2013.5.5) Как-то раз Дядя Фёдор, Матроскин и Шарик отправились с почты домой. Дядя Фёдор вышел первым, а Матроскин последним. По дороге домой Дядя Фёдор обгонял других, либо его обгоняли ровно 8 раз. Матроскин обгонял других, либо его обгоняли ровно 6 раз. Известно, что Дядя Фёдор пришёл домой позже, чем Шарик. В каком порядке друзья пришли домой?

Решение. Заметим, что если по пути какие-то два участника обгоняли друг друга чётное количество раз, то в результате этих обгонов их взаимное расположение не изменилось.

Так как Дядя Фёдор вышел раньше Шарика, а пришёл позже него, то они обгоняли друг друга нечётное количество раз. На счету у Дяди Фёдора 8 «обгонов», поэтому он и Матроскин обгоняли друг друга нечётное количество раз. Следовательно, Матроскин пришёл домой раньше дяди Фёдора.

Но тогда и Матроскин с Шариком обгоняли друг друга нечётное количество раз. Значит, Матроскин обошёл и Шарика!

Таким образом, первым пришёл Матроскин, вторым — Шарик, а третьим — Дядя Фёдор. □

Задача 4.1.12. («Математический праздник» — 2005.6.3) Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

Решение. а) Лиса раскладывает конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну конфет, и они не будут жаловаться. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, для того чтобы уравнять доли медвежат, ей придётся съесть ещё 70 конфет.

б) В итоге медвежата съели поровну конфет, поэтому суммарное число конфет, съеденных медвежатами, чётно. Так как 100 — чётное число, то Лиса также съела чётное число конфет (то есть, 65 конфет она съесть не могла). □

Задача 4.1.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.3) На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?

Решение. Заметим, что если отрезок разбит на два отрезка с целыми длинами, то возможны два случая: либо все три отрезка имеют чётную длину, либо два отрезка имеют нечётную длину и один — чётную.

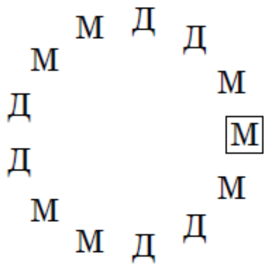
Если хотя бы по одному из измерений прямоугольника все отрезки чётной длины, то и все площади чётные. Если же по обеим сторонам есть по два отрезка нечётной длины, то всего будет $2 \cdot 2 = 4$ нечётные площади. □

Задача 4.1.14. («Математический праздник» — 2013.6.4) За круглый стол сели 13 детей и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

Решение. Понятно, что за столом были и мальчики, и девочки. За группой сидящих рядом мальчиков следует группа девочек, затем снова мальчики, снова девочки и так далее (группа может состоять и из одного человека). Группы мальчиков и девочек чередуются, поэтому их чётное число.

Неверные утверждения звучали на переходах от группы к группе, то есть их тоже чётное число. Так как утверждений «большинство из нас мальчики» прозвучало семь, то неверны шесть утверждений «большинство из нас девочки», и групп тоже было шесть.

Чередование верных и неверных утверждений означает, что в группах было по двое детей. Лишь сидящие рядом первый и последний ребенок сказали одно и то же, поэтому в их группе три человека. Это мальчики, так как их большинство. Всего за столом сидели $2+2+2=6$ девочек и $2+2+3=7$ мальчиков. На рисунке показано, как именно ребята сидели за столом. Первый говорящий обведён в рамочку.



□

Задача 4.1.15. («Математический праздник» — 1991.6.4;7.2) Подпольный миллионер Тарас Артёмов пришёл в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-рублёвых купюр старого образца. Ему была выдана 1991 купюра более мелкого достоинства[2], причём среди них не было 10-рублёвых. Докажите, что его обсчитали.

Решение. Исходная сумма денег (сумма какого-то числа 50-рублёвых и 100-рублёвых купюр) чётна, а полученная сумма (сумма 1991 купюры по 1, 3, 5 или 25 рублей) нечётна. □

Задача 4.1.16. («Математический праздник» — 2002.7.3) В написанном на доске примере на умножение хулиган Петя исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример и объясните, как Вы это сделали.

Подсказка. В исходном примере хотя бы один сомножитель чётный.

Решение. В получившемся примере три сомножителя чётные, значит, в исходном примере хотя бы один был чётным. Поэтому и произведение было чётным числом, то есть последняя цифра произведения была изменена. Таким образом, слева изменено не более одной цифры. Значит, в исходном примере слева были и пятёрки, и четвёрки, а оканчивалось произведение на 0.

Если бы ни один из сомножителей не был исправлен, то произведение равнялось бы $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$. Но запись числа 1600 отличается от записи

[2] В то время имели хождение купюры по 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей (нового образца).

числа 2240 более чем на одну цифру. Значит, ровно один из сомножителей исправлен, а произведение равно 2240. Поэтому одна из семёрок Петей была исправлена на пятёрку. Таким образом, исходный пример мог быть следующим: $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$. □

Задача 4.1.17. («Математический праздник» — 2000.7.4) Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

Решение. **Первый способ.** Пусть последовательные числа — это n и $n+1$, а соседние чётные числа — это m и $m+2 (m > 0)$. Если $m \geqslant n$, то

$$m(m+2) > n(n+1).$$

Если же $m < n$, то $m+2 \leqslant n+1$ и $m \cdot (m+2) < n \cdot (n+1)$.

Второй способ. Пусть $m \cdot (m+2) = n \cdot (n+1)$. Тогда

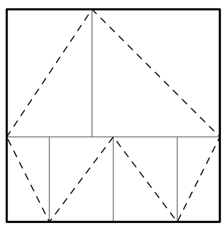
$$(m+1)^2 = m \cdot (m+2) + 1 = n \cdot (n+1) + 1 = n^2 + n + 1.$$

Но $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$, то есть $n^2 < (m+1)^2 < (n+1)^2$, откуда $n < m+1 < n+1$, что невозможно. □

Задача 4.1.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.4) В школе 450 учеников и 225 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

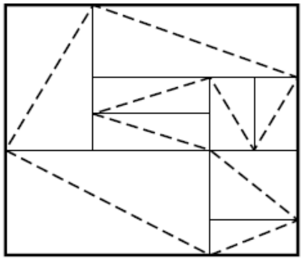
Решение. Девочек, сидящих попарно, чётное число. Всего девочек ещё вдвое больше, то есть, количество девочек делится на 4. Если бы мальчиков можно было рассадить подобным образом, то и количество мальчиков было бы кратно 4. Но общее количество детей (450) не делится на 4, поэтому такое пересаживание невозможно. □

Задача 4.1.19. («Математический праздник» — 2013.6.5) Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (на рисунке справа).

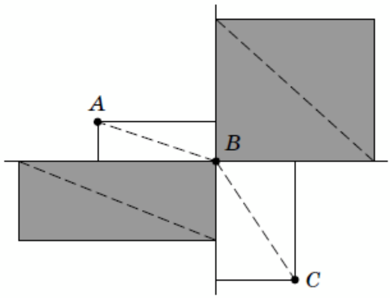


Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нём нечётное число графств. Сколько графств у вас получилось?

Решение. На рисунке приведён пример для девяти графств.



Замечания. Для семи графств (или меньше) примера не существует. Все дороги можно поделить на два типа: одни дороги соединяют левый верхний угол графства с правым нижним, а другие — левый нижний с правым верхним. Если бы при прохождении замкнутого пути дороги разных типов всегда чередовались, их общее количество было бы чётным (как групп мальчиков и девочек в задаче 4.1.14). На Большом острове, стало быть, будут две дороги одного типа подряд.



Пусть, например, подряд идут дороги AB и BC одного типа (на рисунке выше). Помимо графств, в которых они проведены, к вершине B примыкают ещё два, закрашенных серым цветом. Дороги в этих графствах по условию не проходят через точку B. Проведём их.

Теперь на рисунке четыре дороги. Чтобы всего их было семь, нужно тремя отрезками соединить их в единую цепь. Для этого придётся соединить отрезком какие-то два конца дорог в «серых графствах», а это невозможно. ☐

Задача 4.1.20. («Математический праздник» — 2010.6.6) На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

Решение. Раскрасим чашки через одну в синий и красный цвет. Пусть Мартовский Заяц вначале пил из красной чашки.

Докажем, что вначале Соня пила из синей чашки. В самом деле, если бы она пила из красной, то после любого поворота стола опорожнялись бы две чашки одного цвета. Поскольку и тех, и других по 15, а выпиваются они парами, в конце остались бы две чашки разного цвета, которые никаким поворотом стола нельзя было бы одновременно поместить перед Соней и Мартовским Зайцем.

Теперь ясно, почему Заяц мог всегда поворачивать стол, ставя перед собой чашку через одну от только что выпитой, — при этом перед ним по очереди предстали бы все красные, а перед Соней — все синие чашки. □

Задача 4.1.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.7) Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (на рисунке ниже). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Решение. Заметим, что каждый прыжок из клетки с нечётным номером обязательно будет в клетку с чётным номером, и наоборот. Поскольку Маша сначала прыгнула в клетку с нечётным номером 1, а выпрыгнула из клетки с чётным номером 10, то она должна была побывать одинаковое количество раз в клетках с чётными и нечётными номерами.

В «нечётных» клетках она побывала $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ раз, а в «чётных» клетках — $2 + 4 + 6 + 8 + x$, где x — количество прыжков на клетку 10. Приравняем оба выражения и получим, что на клетке 10 Маша побывала 5 раз. □

2 Признаки делимости

Задача 4.2.5. («Математический праздник» — 2016.6.1) У Незнайки есть пять карточек с цифрами: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$. Помогите ему составить из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе.

Решение. Условию задачи удовлетворяют пары чисел: 532 и 14 $(532 : 14 = 38)$ или 215 и 43 $(215 : 43 = 5)$.

Замечания. Конечно, задача решается подбором, но полезно при этом пользоваться свойствами делимости чисел. Например, подбирая двузначное число, не нужно рассматривать:

- ни 15, ни 25, ни 35, ни 45 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 5);
- ни 24, ни 42 (из оставшихся карточек нельзя сложить чётное число);
- ни 12, ни 32, ни 52 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 4);
- 54 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 9).

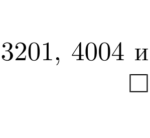
$\square$

Задача 4.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.1) Астролог считает, что 2013 год *счастливый*, потому что 2013 нацело делится на сумму $20 + 13$. Будет ли когда-нибудь два счастливых года подряд?

Решение. Например, 2024 и 2025 — счастливые годы: 2024 кратно $20+24 = 44$, а 2025 кратно $20 + 25 = 45$.

Замечания. Существуют и другие примеры: 3024 и 3025, 3200 и 3201, 4004 и 4005, 9800 и 9801. $\square$

Задача 4.2.7. («Математический праздник» — 2015.6.2) а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.

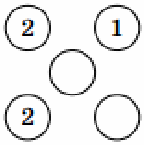


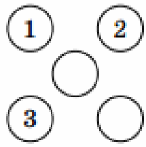
б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

Решение. б) Из условия видно, что сумма всех цифр делится как на 8, так и на 6. Минимальное такое натуральное число — 24.

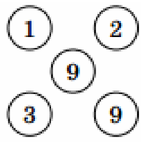
Следующее число равно 48, но сумма всех пяти цифр не может превышать $5 \cdot 9 = 45$. Итак, сумма всех цифр равна 24, сумма двух верхних равна 3, сумма двух левых равна 4.

Легко видеть, что цифры в трёх кружках слева и сверху можно разместить только двумя способами (на рисунке ниже).





В первом случае сумма двух остальных цифр равна 19, что невозможно, а во втором равна 18, что возможно, только если они обе девятки.



$\square$

Задача 4.2.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.2) Существуют ли такие цифры **Г** и **У**, что число **УГУ** делится на 13, а число **ГУГ** — не делится?

Решение. Нет, поскольку

$$\mathbf{ГУГ} - \mathbf{УГУ} = 100 \cdot \mathbf{Г} + 10 \cdot \mathbf{У} + \mathbf{Г} - (100 \cdot \mathbf{У} + 10 \cdot \mathbf{Г} + \mathbf{У}) = 91 \cdot \mathbf{Г} - 91 \cdot \mathbf{У}$$

делится на 13. $\square$

Задача 4.2.9. («Математический праздник» — 2012.6.3) Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

Решение. Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело.

Поскольку в часе более одной минуты, в нём должно быть 7 минут — ни на какое другое число, большее единицы, 77 и 91 одновременно не делятся ($\text{НОД}(77, 91) = 7$). Тогда в сутках $77 : 7 = 11$ часов и $11 \cdot 91 = 1001$ секунда. $\square$

Задача 4.2.10. («Математический праздник» — 2008.6.3) На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причём все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

Решение. Пусть всего было k крыс ($k > 7$), тогда каждая съела в первую ночь по $10/k$ головок сыра. Во вторую ночь каждая крыса съела вдвое меньше, то есть $5/k$ головок.

Семь крыс съели тем самым $35/k$ головок. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, — само число 35. Поэтому $35/k = 1$, и всего на складе до нашествия крыс было $10 + 1 = 11$ головок сыра. □

Задача 4.2.11. («Математический праздник» — 2010.7.3) Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

Решение. Выберем из детей одного — к примеру, Петю. Если из всех остальных конфет забрать 7, останется столько же, сколько у Пети. Поэтому удвоенное число конфет Пети равно общему числу конфет без семи. То же можно сказать про любого из детей, значит, у всех детей конфет поровну — скажем, по одной кучке.

Ясно, что каждый съел на целое число кучек меньше остальных вместе. Поэтому 7 делится на размер кучки. Значит (так как по условию каждый съел больше одной конфеты), в кучках по 7 конфет, то есть каждый съел на кучку меньше, чем все остальные. Петя съел одну кучку, следовательно, остальные — две. Значит, всего кучек три, а конфет 21. □

Задача 4.2.12. («Математический праздник» — 2006.7.4) Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: $2006 : 17 = 118$. Назовите:

а) первый номер матпраздника, для которого это тоже было выполнено.
б) последний номер матпраздника, для которого это тоже будет выполнено.

Решение. а) Первый матпраздник был в 1990 году. Ясно, что год его проведения делится на его номер, потому что номер равен единице.

б) Пусть N — номер матпраздника. Тогда год его проведения равен

$$(2006 - 17) + N = 1989 + N.$$

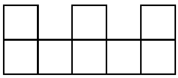
Пусть год проведения делится на номер, то есть $1989+N$ делится на N. Значит, 1989 делится на N. Поскольку мы ищем наибольшее возможное N, то нужно взять $N = 1989$. □

Задача 4.2.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.7.5) Среди некоторых 13 последовательных натуральных чисел 7 чётных и 5 кратных трём. Сколько среди них чисел, кратных 6?

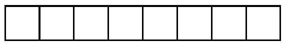
Решение. Легко показать, что последовательность начинается с числа, кратного 3 и с чётного числа, т. е. с числа, кратного 6.

Так как числа последовательные, то следующим числом, делящимся на 6, будет седьмое число, а ещё одним — тринадцатое. □

Задача 4.2.14. («Математический праздник» — 2017.7.5) Можно ли так расставить цифры $1, 2, \ldots, 8$ в клетках а) буквы **Ш**, б) полоски (на рисунке ниже); чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.)



а)



б)

Решение. Пусть сумма чисел в одной из частей равна m, в другой — n, и n делится на m. Тогда и $m+n$ делится на m, а это сумма всех чисел, она равна $1+2+\ldots+8 = 36$. Значит, меньшая из сумм частей является делителем числа 36. Верно и обратное: если 36 делится на m, то и $36-m$ делится на m.

а) Для фигуры, заполненной, как на рисунке ниже, при разрезании на две части получаются такие меньшие суммы:

$$2, \quad 2+7=9, \quad 2+7+3=12, \quad 1, \quad 6+8+4=18, \quad 8+4=12, \quad 4.$$

2		1		4
7	3	5	6	8

Все они являются делителями числа 36. Есть и другие расстановки, удовлетворяющие условию.

б) Выпишем все делители числа 36, меньшие этого числа, и их дополнения до 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30, 32, 33, 34, 35.

Предположим, что расставить числа в полоске требуемым образом удалось. Выпишем сумму чисел в первой клетке, первых двух клетках, первых трёх клетках и т. д. У нас получится возрастающая последовательность из восьми чисел, первое из которых не больше 8, а последнее равно 36. При этом соседние члены этой последовательности различаются не больше, чем на 8.

Если в этой последовательности есть число 18, то предыдущее число должно быть не менее $18 - 8 = 10$. Единственное число между 10 и 18 в последовательности — это 12. Следовать за 18 может число не более $18 + 8 = 26$, подходит только 24. Но тогда в двух разных клетках должно стоять число $6 = 18-12 = 24-18$. Следовательно, числа 18 в этой последовательности нет.

Посмотрим на то место, где после числа, меньшего 18, идёт число, большее 18. Разность этих чисел должна быть равна как минимум $24 - 12 = 12$. Но они должны отличаться на число, не большее 8. Противоречие. □

Задача 4.2.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.7) Докажите, что сумма цифр числа, делящегося на 7, может быть равна любому натуральному числу, кроме единицы.

Решение. Число с суммой цифр, равной единице, очевидно является степенью десятки и не может делиться на 7.

Покажем, что для любой другой суммы цифр можно построить пример числа, кратного семи. Для этого воспользуемся тем, что число $1001 = 7 \cdot 143$ делится на 7.

Если сумма цифр числа чётна и равна $2k$, рассмотрим число $10011001\ldots1001$, где число 1001 написано k раз подряд. Оно делится на 7:

$$10011001\ldots1001 = 7 \cdot 1430143\ldots0143,$$

а сумма его цифр равна $2k$.

Если сумма цифр числа нечётна и равна $2k + 1$, то рассмотрим число $2110011001\ldots1001$, где после цифр 2 и 1 число 1001 выписано $k-1$ раз подряд. Сумма его цифр равна $3 + 2(k - 1) = 2k + 1$, и оно кратно 7:

$$2110011001\ldots1001 = 7 \cdot 701430143\ldots0143.$$

□

Задача 4.2.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.7.8) Последовательные натуральные числа 2 и 3 делятся на последовательные нечётные числа 1 и 3 соответственно; числа 8, 9 и 10 — делятся на 1, 3 и 5 соответственно. Найдутся ли 11 последовательных натуральных чисел, которые делятся на 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21 соответственно?

Решение. Рассмотрим число

$$A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21.$$

Тогда числа

$$1/2(A+1),\ 1/2(A+3),\ 1/2(A+5), \ldots, 1/2(A+19),\ 1/2(A+21)$$

являются последовательными натуральными числами и делятся на

$$1, 3, 5, \ldots, 19$$

и 21 соответственно.

Замечания. Из решения ясно, что такие числа найдутся для любого количества последовательных нечётных чисел. □

Задача 4.2.17. («Математический праздник» — 2004.7.1) Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

Подсказка. Воспользуйтесь признаками делимости на 2, 5, 3.

Решение. Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на чётную цифру (то есть на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра 7. □

Задача 4.2.18. («Математический праздник» — 2002.6.3) На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

Решение. Пусть x — наименьшее из написанных чисел. Обозначим через $x+y$ вычеркнутое число ($0 < y < 9$). Тогда

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) +$$
$$+ (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) - (x+y) = 2002,$$

то есть $9x = 1957 + y$. А $1957 + y$ делится на 9 только при $y = 5$. Значит, $x = 1962 : 9 = 218$.

Таким образом, на доске остались числа: 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227. □

Задача 4.2.19. («Математический праздник» — 2003.7.3) Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

Подсказка. Воспользуйтесь признаком делимости на 3.

Решение. Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр — 17, во втором — 16, в третьем — 15, а в последнем — 14. По признаку делимости на 3 годится только третий вариант.

Итак, в коде 6 двоек и одна тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, равно 32.

Таким образом, код 2222232 открывает сейф. □

Задача 4.2.20. (Турнир Архимеда — 2016.4) Известно, что сумма

$$\mathbf{ТУРНИР} + \mathbf{АРХИМЕДА}$$

кратна 2016. Докажите, что сумма $\mathbf{ИР} + \mathbf{АР}$ кратна 9. (Цифры заменены буквами: разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами)

Решение. Поскольку сумма кратна 2016, она кратна 9. Пусть у **ТУРНИР** остаток x, тогда у **АРХИМЕДА** остаток $(9 - x)$ при делении на 9.

Остаток числа совпадает с остатком суммы цифр. Сумма

$$\mathbf{Т} + \mathbf{У} + \mathbf{Р} + \mathbf{Н} + \mathbf{И} + \mathbf{Р}$$

даёт остаток x, сумма $\mathbf{А} + \mathbf{Р} + \mathbf{Х} + \mathbf{И} + \mathbf{М} + \mathbf{Е} + \mathbf{Д} + \mathbf{А}$ даёт остаток $(9 - x)$. Сумма

$$\mathbf{Т} + \mathbf{У} + \mathbf{Р} + \mathbf{Н} + \mathbf{И} + \mathbf{Р} + \mathbf{А} + \mathbf{Р} + \mathbf{Х} + \mathbf{И} + \mathbf{М} + \mathbf{Е} + \mathbf{Д} + \mathbf{А}$$

даёт остаток 0. При этом $\mathbf{Т}+\mathbf{У}+\mathbf{Р}+\mathbf{Н}+\mathbf{И}+\mathbf{А}+\mathbf{Х}+\mathbf{М}+\mathbf{Е}+\mathbf{Д} = 45$, поскольку тут присутствует ровно 10 различных букв. Значит, $\mathbf{Р} + \mathbf{А} + \mathbf{Р} + \mathbf{И}$ имеет остаток 0. Теперь докажем двумя способами, что сумма $\mathbf{ИР} + \mathbf{АР}$ кратна 9.

Первый способ. $\mathbf{И} + \mathbf{Р}$ и $\mathbf{А} + \mathbf{Р}$ имеют соответственно остатки n и $9 - n$. Значит, эти же остатки будут и у **ИР**, и **АР**. Значит, $\mathbf{ИР} + \mathbf{АР}$ делится на 9.

3) *Второй способ.* $\mathbf{ИР} + \mathbf{АР} = 9 \cdot (\mathbf{И} + \mathbf{А}) + (\mathbf{Р} + \mathbf{А} + \mathbf{Р} + \mathbf{И})$ делится на 9, так как каждое слагаемое делится на 9.

Пример существования таких чисел: $104384 + 24986752 = 25091136$ ($\mathbf{Т} = 1$, $\mathbf{У} = 0$, $\mathbf{Р} = 4$, $\mathbf{Н} = 3$, $\mathbf{И} = 8$, $\mathbf{А} = 2$, $\mathbf{Х} = 9$, $\mathbf{М} = 6$, $\mathbf{Е} = 7$, $\mathbf{Д} = 5$). □

Задача 4.2.21. («Математический праздник» — 1995.7.5) Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и так далее. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

Подсказка. Разность между числом и суммой его цифр делится на 9.

Решение. Разность между числом и суммой его цифр делится на 9. Поэтому все числа, которые мы получали, делились на 9 (кроме, может быть, исходного).

Пойдём с конца. Нуль в принципе получается из любого однозначного натурального числа после вычитания из него суммы цифр. Но из них на 9 делится только 9. Поэтому на предпоследнем шаге у нас было число 9. Но 9 можно получить только из одного числа, делящегося на 9, — из 18. И так далее, пока не дойдём до числа 81.

Тут путь раздваивается — 81 можно получить и из 90, и из 99. Сделаем последний шаг назад (теперь делимость на 9 нам уже не важна!) — 90 ни из какого числа получить нельзя, а для 99 есть целых 10 возможных предшественников: $100, 101, 102, \ldots, 109$. □

Задача 4.2.22. («Математический праздник» — 2011.7.5) В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове **ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ** одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.)

Решение. Буква **Е** в слове **ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ** встречается 4 раза, а остальные 9 букв — по одному разу. Это значит, что в числе все 10 цифр будут присутствовать по одному разу, а какая-то одна цифра (соответствующая букве **Е**) — ещё 3 раза сверх того.

Сумма 10 цифр от 0 до 9 равна 45, то есть кратна 3. Сумма трёх одинаковых цифр также кратна 3. Тем самым, как бы мы ни заменяли буквы на цифры в слове **ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ**, сумма цифр полученного числа будет кратна трём. Значит, и полученное число будет делиться на 3.

Поскольку единственное простое число, кратное 3, — это само число 3, а наше число заведомо его больше, полученное число не может быть простым. □

3 Сравнения по модулю

Задача 4.3.4. (Московская математическая олимпиада — 1940.7-8.4) Сколько существует таких пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, что $x^2 + y^2$ делится на 7.

Решение. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y кратны 7 (Если n не делится на 7, то n^2 при делении на 7 даёт один из остатков 1, 2, 4. Нетрудно проверить, что сумма двух таких остатков на 7 не делится).

Количество целых чисел, заключённых между 1 и 1000 и кратных 7, равно 142 (поскольку $1000 = 142 \cdot 7 + 6$). Поэтому искомое число равно $142^2 = 201614$. □

Задача 4.3.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.1) В ряд лежат 1000 конфет. Сначала Вася съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Петя съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?

Решение. Вася начал с девятой конфеты слева, значит, из 992 конфет он съедал по одной конфете из каждых семи. Так как $992 : 7 = 141$ (остаток 5), то Вася съел 141 конфету вдобавок к первой съеденной, то есть 142. После этого осталось 858 конфет.

Петя начал с седьмой конфеты слева, то есть из 852 конфет он съедал по одной конфете из каждых девяти. Так как $852 : 9 = 94$ (остаток 6), то Петя съел 94 конфеты вдобавок к первой съеденной, то есть 95.

Таким образом, осталось 763 конфеты. □

Задача 4.3.6. («Математический праздник» — 1998.7.5) На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

Подсказка. Остаток от деления 1, 15 и 50 на 7 равен 1.

Решение. Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Незнайка отдал k монет на сумму A и получил сдачу C. Тогда

$$A \equiv k \pmod 7, \text{ а } C \equiv k + 1 \pmod 7.$$

Поэтому цена покупки $A - C \equiv 6 \pmod 7$. Следовательно, эта цена покупки не может быть меньше 6 фертингов.

Пример, когда покупка стоит 6 фертингов: Незнайка заплатил две монеты — 1 фертинг и 50 фертингов, а сдачу получил тремя монетами по 15 фертингов. □

Задача 4.3.7. (Московская математическая регата — 2011/2012.8.3) Сколько существует таких натуральных n, не превосходящих 2012, что сумма

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

оканчивается на 0?

Решение. **Первый способ.** Разберём три случая.

1. Если n нечётно, то число $1n + 4n$ нечётно и делится на $1 + 4 = 5$. Следовательно, оно оканчивается на 5. Аналогично на 5 оканчивается число $2n + 3n$. Значит, данная сумма оканчивается на 0.
2. Если $n = 4k + 2$, то число $1n + 2n$ нечётно и делится на $1^2 + 2^2 = 5$. Следовательно, оно оканчивается на 5. Число $3n + 4n$ также нечётно и делится на $3^2 + 4^2 = 25$. Снова наша сумма оканчивается на 0.
3. Число $n = 4k$. Последняя цифра чисел 2^4 и 4^4 равна 6. Значит, и последняя цифра чисел $2^n = (2^4)^k$ и $4^n = (4^4)^k$ равна 6. Аналогично последняя цифра числа 3^n равна 1. Следовательно, наша сумма оканчивается на 4.

Среди 2012 последовательных ровно четверть чисел, кратных 4, то есть 503. А «хороших» чисел $2012 - 503 = 1509$.

Второй способ. Составим таблицу значений последних цифр у каждого слагаемого и у суммы для нескольких начальных значений n.

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
сумма	0	0	0	4	0

При $n = 5$ последние цифры у всех слагаемых такие же, как и при $n = 1$, значит, общий период повторения последних цифр равен 4. При этом, для каждых четырёх последовательных значений n ровно в трёх случаях сумма оканчивается на 0.

Так как $2012 : 4 = 503$, то искомое количество равно $503 \cdot 3 = 1509$. □

Задача 4.3.8. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2011.9.4) Незнайка утверждает, что существует восемь таких последовательных натуральных чисел, что в разложение их на простые множители каждый множитель входит в нечётной степени (например, два таких последовательных числа: $23 = 23^1$ и $24 = 2^3 \cdot 3^1$). Прав ли он?

Решение. Восемь последовательных натуральных чисел дают различные остатки при делении на 8. Следовательно, среди них найдётся число, которое при делении на 8 даёт остаток 4. Это число делится на 4, но не делится на 8, поэтому в разложение его на простые множители двойка входит во второй степени. $\square$

Задача 4.3.9. (Тургор. Весенний тур. Основной вариант — 2009/2010. 10-11.1) Из Южной Америки в Россию 2010 кораблей везут бананы, лимоны и ананасы. Число бананов на каждом корабле равно числу лимонов на остальных кораблях вместе взятых, а число лимонов на каждом корабле равно числу ананасов на остальных кораблях вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

Решение. Общее число бананов в 2009 раз больше числа лимонов, которое в 2009 раз больше числа ананасов. Следовательно, общее число фруктов в $2009^2 + 2009 + 1$ раз больше числа ананасов,

$$2009^2 + 2009 + 1 \equiv (-6)^2 - 6 + 1 \equiv 0 \pmod{31}.$$

$\square$

Задача 4.3.10. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1986/1987. 9-10.1) Можно ли число 1986 представить в виде суммы шести квадратов нечётных чисел?

Решение. Квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт в остатке 1, так как

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1,$$

а одно из чисел k, $k+1$ чётно, поэтому $4k(k+1)$ делится на 8. Значит, сумма шести квадратов при делении на 8 даст остаток 6.

А $1986 \equiv 2 \pmod 8$. Поэтому 1986 не может быть суммой шести квадратов. $\square$

Задача 4.3.11. (Московская математическая регата — 2012/2013.10.5) Известно, что $b = 2013^{2013} + 2$. Будут ли числа $b^3 + 1$ и $b^2 + 2$ взаимно простыми?

Решение. Число 2013 делится на 3, так как сумма его цифр равна 6. Поэтому $b^3 \equiv -1 \pmod 3$. Значит,

$$b^3 + 1 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3 \quad \text{и} \quad b^2 + 2 \equiv 1 + 2 = 0 \pmod 3.$$

Таким образом, данные числа имеют общий делитель 3, следовательно, не являются взаимно простыми. □

Задача 4.3.12. (Московская математическая регата — 2012/2013.11.5) Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Решение. Квадрат любого натурального числа при делении на 4 дает в остатке либо 0, либо 1. Значит, сумма двух квадратов при делении на 4 может иметь в остатке либо 0, либо 1, либо 2.

Но среди четырёх последовательных натуральных чисел одно даёт остаток 3 при делении на 4, поэтому оно не может быть представлено в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. □

4 Основная теорема арифметики

Задача 4.4.3. («Математический праздник» — 1995.7.1) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

Подсказка. Разложите число 1995 на простые множители.

Решение. Разложим 1995 на простые множители: $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Нужно разбить это произведение на две группы: часть множителей войдёт в исходное число, а другая часть будет его цифрами.

Ясно, что 19 войдёт в искомое число (цифры «19» нет!). Остаётся несложный перебор, который даёт единственный ответ — 57: $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$. □

Задача 4.4.4. («Математический праздник» — 2008.7.1) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

Решение. Искомое число является делителем числа $2008 = 2^3 \cdot 251$. Выпишем все делители числа 2008: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008.

Найдя сумму цифр каждого из них, заметим, что условие задачи выполняется только для числа 251: $2008 = 251 \cdot (2 + 5 + 1)$. □

Задача 4.4.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.1) Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, ко второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

Решение. Заметим, что $234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$. Максимальный сомножитель, полученный Лёней, мог равняться $9 + 4 = 13$. Этот сомножитель в произведении, несомненно, имелся, потому что меньшие числа на 13 не делятся, а 234 делится. Значит, последняя цифра Юриного числа — девятка.

Остальные три сомножителя дают в произведении 18. Единиц среди них быть не может, так как числа с нуля не начинаются. Единственный возможный вариант $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Понятно, что третья цифра в этом случае 0, а для первых двух цифр возможны два варианта: 2009 или 1109. □

Задача 4.4.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.2) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

Решение. Каждый рассказчик удваивал или утраивал длину хвоста, поэтому 864 является произведением некоторого количества двоек и троек. Так как $864 = 27 \cdot 32 = 3^3 \cdot 2^5$, то хвост волку «отрастили» пять простых и трое творческих людей. □

Задача 4.4.7. («Математический праздник» — 1999.6.2) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

Подсказка. Разложите 420 на множители.

Решение. Разложим 420 на множители: $420 = 6 \cdot 7 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Теперь уже несложно сгруппировать эти множители в пять групп так, чтобы в сумме получилось 20: $7 + 5 + 3 + 4 + 1 = 20$. □

Задача 4.4.8. («Математический праздник» — 2007.6.2;7.2) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

Решение. Разложим 2007 на множители: $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223 = 9 \cdot 223 = 3 \cdot 669$. Поскольку отметки 9 не бывает, то подходит только первый вариант.

Так как троек у Вовочки больше, чем двоек, и последняя отметка, как ни переставляй множители, — тройка, можно надеяться, что тройку в четверти он получит. □

Задача 4.4.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.2) Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6. Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырёхзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?

Решение. Для того, чтобы число делилось на 9, его сумма цифр должна делиться на 9. Значит, следующий такой год будет не раньше, чем через 9 лет, то есть в 2025 году.

Этот год удовлетворяет условию задачи, так как из карточек 2, 0, 2 и 5 можно составить число 2520. Оно делится на любое однозначное число от 1 до 9, поскольку $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. □

Задача 4.4.10. («Математический праздник» — 2009.7.6) Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

Решение. Объясним, как эту задачу можно было бы решать. Заметим, что выражение можно составлять из произвольных чисел, заменив каждое из них на сумму соответствующего числа единиц. В частности, 2009 можно получить как сумму 2009 единиц.

Но так как произведение обычно больше суммы, выгоднее числа не складывать, а умножать. Если разложить 2009 на простые множители, получится выражение $7 \cdot 7 \cdot 41$ стоимостью $7 + 7 + 41 = 55$ рублей.

Теперь можно попробовать получить более дешёвым способом эти сомножители. Ясно, что если число стоит рядом с дешёвым, то и само оно не слишком дорогое. Например, 41 стоит рядом с числом $40 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Поэтому 41 можно получить за 12 рублей: $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1$. Аналогично $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Воспользовавшись этим, можно получить 2009 за 24 рубля:

$$(2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 3 + 1)(5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1).$$

Можно попробовать удешевить один из сомножителей по-другому: например, представить 41 как $42 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 + 1) - 1$. Снова получилось 12 рублей.

Итак, дальше удешевлять отдельные сомножители таким образом не получается, но можно попробовать применить ту же идею для каких-то их произведений. Например, можно представить $7 \cdot 7 = 49$ как $48 + 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1$ или $50 - 1 = 5 \cdot 5 \cdot 2 - 1$. К сожалению, это не позволяет улучшить результат (24 рубля).

Зато если представить $7 \cdot 41 = 287$ как $288 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1$, то получится выражение для 2009 всего за 23 рубля:

$$2009 = (2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1).$$

Этот результат наилучший. Однако неизвестно доказательство этого, не использующее компьютерного перебора.

Докажем, что 2009 нельзя получить за 20 рублей, используя только операции сложения и умножения. Для этого докажем, что за 20 рублей нельзя получить больше, чем $3^6 \cdot 2 = 1458 < 2009$.

Рассмотрим выражение ценой 20 рублей с наибольшим значением. Во-первых, ясно, что в этом выражении нет умножения на 1. Во-вторых, это выражение представляет собой произведение некоторых натуральных чисел. Действительно, фрагмент вида $a + b \cdot c$ можно заменить на $(a + b) \cdot c$, сохранив цену, но увеличив значение выражения. В-третьих, каждый сомножитель меньше 5. Действительно, $5 + a$ можно заменить на $2 \cdot 3 + a$, сохранив цену, но увеличив значение выражения. Наконец, все четвёрки можно заменить на $2 \cdot 2$. Значит, выражение является произведением нескольких двоек и троек с суммой 20. Так как $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$ (то есть три двойки выгодно заменить на две тройки), из таких выражений максимальное значение имеет $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 1458$. □

Задача 4.4.11. («Математический праздник» — 1996.7.6) Произведение последовательных чисел от 1 до n называется *n-факториал* и обозначается $n!$ $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!)$. Можно ли вычеркнуть из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

Решение. Заметим, что

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100! = 1! \cdot \ldots \cdot 100! = (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (99!)^2 \cdot 100 = \\ = 2^{50} \cdot (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99!)^2 \cdot 50!.$$

Отсюда видно, что, вычеркнув 50!, мы получим квадрат числа

$$2^{25} \cdot 1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99!.$$

□

5 НОД и НОК. Алгоритм Евклида

Задача 4.5.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.7.3) На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Гуляя по этой дороге, Бобик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 3 или 5 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между сёлами.

Решение. Из условия следует, что расстояние между сёлами должно делиться на 3 и на 5. Значит, оно делится на 15.

Если бы расстояние было больше 15, то числа, записанные с двух сторон на каждом пятнадцатом столбе, делились бы на 15, то есть, среди наибольших общих делителей встретилось бы и число 15. □

Задача 4.5.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.4) Назовём натуральные числа a и b ***друзьями***, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b, то a — друг НОД(a, b).

Решение. **Первый способ.** Пусть $d =$ НОД(a, b). Тогда $a = md$, $b = nd$, где m и n — взаимно простые натуральные числа.

Из условия следует, что число $ab = mnd^2$ — точный квадрат, значит, и mn — точный квадрат. Следовательно, каждое из чисел m и n — точный квадрат: $m = k^2$. Отсюда

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) = md^2 = (kd)^2,$$

то есть a — друг НОД(a, b).

Второй способ. Число является точным квадратом, если в его разложение на простые множители каждый из них входит с чётным показателем степени.

Разложим числа a и b на простые множители. Так как a и b — друзья, то каждое простое число входит в эти разложения с показателями степеней одинаковой чётности.

Так как в разложение НОД(a, b) каждый простой множитель входит с наименьшим показателем из этих двух, то в разложения чисел a и НОД(a, b) каждое простое число также входит с показателями степеней одинаковой чётности. Это и означает, что a и НОД(a, b) — друзья. □

Задача 4.5.7. (Турнир. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1996/1997. 10-11.2) Числа a и b — натуральные. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b, $a = du$, $b = dv$. Сокращая на d^2, получим, что $u^2 + v^2$ делится на uv.

Но $\text{НОД}(u^2+v^2, uv) = 1$, так как u и v взаимно просты. Следовательно, $uv = 1$. Значит, $u = v = 1$, $a = b = d$. $\square$

Задача 4.5.8. (Московская математическая олимпиада — 1964.9.2) Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

Решение. Предположим, что $n \cdot (n+1) = a^m$, где $m \geqslant 2$ (a, m и n — натуральные числа).

Числа n и $n+1$ не имеют общих делителей, поэтому $n = b^m$ и $n+1 = c^m$. Но этого не может быть, потому что разность между двумя последовательными m-ми степенями больше 1. $\square$

Задача 4.5.9. (Турнир городов. Осенний тур. Основной вариант — 2014/2015.8-9.2) Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:

а) ровно в шесть раз;
б) ровно в пять раз?

Решение. а) Например, 1, 2, ..., 9, 15. Сумма их равна 60, среднее арифметическое — 6, а НОД равен 1.

б) Пусть НОД десяти чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ равен d. Тогда

$$a_1 \geqslant d, a_2 \geqslant 2d, \ldots, a_{10} \geqslant 10d.$$

Значит, сумма этих чисел не меньше $55d$, а среднее арифметическое не меньше $5{,}5d$. Следовательно, удовлетворяющих условию чисел не существует. $\square$

Задача 4.5.10. (Московская математическая олимпиада — 1935.8.1) Докажите, что

$$\text{НОК}(a, b, c) \cdot \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(b, c) \cdot \text{НОД}(c, a) = \text{НОД}(a, b, c) \cdot abc.$$

Решение. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = p^\alpha, b = p^\beta, c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В этом случае

$$\text{НОК}(a, b, c) \cdot \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(b, c) \cdot \text{НОД}(c, a) =$$
$$= p^\gamma p^\alpha p^\beta p^\alpha = p^\alpha p^\alpha p^\beta p^\gamma = \text{НОД}(a, b, c) \cdot abc.$$

$\square$

Задача 4.5.11. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 1983/1984.7-8.2) Найти все такие натуральные k, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

Решение. Любое нечётное число $k = 2n + 1 > 3$ легко представить в нужном виде: $k = n + (n + 1)$.

Чётное число, кратное 4, ($k = 4n$) представляется в виде суммы чисел $2n + 1$ и $2n - 1$. Последнее число больше 1 при $k \geqslant 8$.

Наконец, число k вида $4n+2$ представляется в виде суммы $(2n+3)+(2n-1)$. Эти числа взаимно просты, поскольку из разность равна 4, а 4 взаимно просто с любыми нечётными числами. Последнее число больше 1 при $k \geqslant 10$.

Таким образом, мы представили в нужном виде все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6. Нетрудно проверить, что ни одно этих чисел в требуемом виде представить нельзя. □

Задача 4.5.12. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 1998/1998.8-9.1) а) Докажите, что если НОК$(a, a+5)$ = НОК$(b, b+5)$ (a, b — натуральные), то $a = b$.

б) Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a+c, b+c)$ быть равны (a, b, c — натуральные)?

Решение. а) Так как НОД$(a + 5, a)$ делит также и разность $(a + 5) - a = 5$, то он может равняться только 5 или 1. То же верно и для НОД$(b, b + 5)$.

Заметим, что НОД$(a, a + 5) = 5$ тогда и только тогда, когда НОК$(a, a + 5)$ делится на 5. Поэтому из равенства

$$\text{НОК}(a, a + 5) = \text{НОК}(b, b + 5)$$

следует равенство

$$\text{НОД}(a, a + 5) = \text{НОД}(b, b + 5),$$

а значит, и равенство

$$a \cdot (a + 5) = b \cdot (b + 5),$$

поскольку НОК$(m, n) \cdot$ НОД$(m, n) = mn$.

Теперь ясно, что $a = b$. Если, например, $a < b$, то

$$a + 5 < b + 5 \quad \text{и} \quad a \cdot (a + 5) < b \cdot (b + 5).$$

Противоречие.

б) Предположим, что такие числа существуют. Можно считать, что

$$\text{НОД}(a, b, c) = 1,$$

в противном случае все числа можно сократить на общий делитель.

Обозначим $m = \text{НОК}(a+c, b+c)$, $d = \text{НОД}(a+c, b+c)$. Так как

$$\text{НОК}(a+c, b+c) = \text{НОК}(a, b) \leqslant ab < (a+c)(b+c),$$

то $d > 1$. Заметим, что ab делится на m, а m, в свою очередь, делится на d, то есть ab делится на d. Поэтому либо a, либо b (пусть a) имеет общий делитель $\delta > 1$ с числом d.

Но тогда числа $c = (a+c) - a$ и $b = (b+c) - c$ также делятся на δ. Мы получили противоречие с условием $\text{НОД}(a, b, c) = 1$. □

6 Простые числа

Задача 4.6.6. («Математический праздник» — 2013.6.1) Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но всё равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся?

Решение. Может, например: $0{,}2 \cdot 10 = 2$ и $0{,}2 \cdot 15 = 3$ — простые числа.

Замечания. Приведённый пример единственный: простое число Пети в полтора раза больше простого числа Васи. Значит, простое число Васи чётно, то есть равно 2, а исходное число в 10 раз меньше. □

Задача 4.6.7. («Математический праздник» — 2001.7.1) В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно

$$23021^{377} - 1.$$

Не опечатка ли это?

Подсказка. Какая последняя цифра у числа $23021^{377} - 1$?

Решение. Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377} - 1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом. □

Задача 4.6.8. («Математический праздник» — 2017.6.2) На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

Решение. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, чётны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Поэтому такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках не имеет смысла.

Остаются цифры 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, то из них можно сложить составное число 39. Если же они записаны на одной карточке, то на второй записаны 1 и 7, и тогда можно сложить составное число $91 = 7 \cdot 13$. □

Задача 4.6.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.3) Мальвина попросила Буратино выписать все девятизначные числа, составленные из различных цифр. Буратино забыл, как пишется цифра 7, поэтому записал только те девятизначные числа, в которых этой цифры нет. Затем Мальвина предложила ему вычеркнуть из каждого числа по шесть цифр так, чтобы оставшееся трёхзначное число было простым. Буратино тут же заявил, что это возможно не для всех записанных чисел. Прав ли он?

Решение. Рассмотрим число 319562480. Если из него не вычеркнуть все последние 6 цифр, то полученное число будет оканчиваться чётной цифрой или пятёркой, то есть не будет простым. Если же вычеркнуть последние шесть цифр то получится $319 = 29 \cdot 11$. Значит, Буратино прав. □

Задача 4.6.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.7.4) Незнайка хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Знайка утверждает, что это невозможно. Прав ли Знайка?

Решение. Пусть Незнайке удалось расположить числа по кругу так, как указано в условии. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Соединим стрелочками соседние числа, двигаясь по часовой стрелке. На каждой стрелочке запишем частное от деления числа, стоящего в её конце, на число, стоящее в её начале. По условию, это либо простое число, либо число, обратное простому.

Заметим, что каждое из исходных чисел ровно один раз было в роли делимого и ровно один раз — в роли делителя. Значит, произведение всех чисел, записанных на стрелочках, равно 1. Следовательно, для каждого числа вида p среди них должна найтись соответствующее число вида $1/p$. Но тогда целых чисел и правильных дробей поровну, что невозможно, так как их общее количество равно 2015.

Второй способ. Рассмотрим разложение каждого из записанных чисел на простые множители. Подсчитаем количество простых множителей у каждого числа (если среди простых множителей есть одинаковые, то их учитываем столько раз, с каким показателем степени они входят в разложение, а разложение числа 1, если оно оказалось среди записанных 2015, будем считать состоящим из нуля простых множителей).

Так как отношение соседних чисел равно простому числу, то количества простых множителей в разложениях этих чисел отличаются ровно на 1. Поэтому у всех чисел, стоящих на нечётных местах, количество простых множителей имеет одну и ту же чётность. Но первое и 2015-е число стоят рядом, а потому количества их простых множителей должны отличаться на 1 и не могут иметь одну чётность. Противоречие.

Значит, Знайка прав. □

Задача 4.6.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.6) Является ли простым число 1111112111111?

Решение. Это число можно разложить на множители:

$$1111112111111 = 1111111000000 + 1111111 =$$
$$= 1111111 \cdot (1000000 + 1) = 1111111 \cdot 10000001.$$

Следовательно, оно не является простым. □

Задача 4.6.12. (Турнир им. Ломоносова — 1989.7.13) Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.

Решение. Докажем, что любое простое число $p > 11$ представляется в виде суммы двух составных.

Поскольку любое такое число нечётно, то число $p - 9$ чётно и, следовательно, составное. Поэтому $p = (p - 9) + 9$ — искомое представление.

С другой стороны, непосредственно проверяется, что числа 2, 3, 5, 7 и 11 не представимы в виде суммы двух составных. □

7 Дроби

Задача 4.7.5. («Математический праздник» — 1999.7.1) Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит 1/3. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

Решение. Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше её знаменатель — и тем больше сама дробь (так как и числитель, и знаменатель — положительные числа): $25/76$ ещё меньше $1/3$, а $26/75$ — уже больше. $\square$

Задача 4.7.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.1) Записаны шесть положительных несократимых дробей, сумма числителей которых равна сумме их знаменателей. Паша перевёл каждую из неправильных дробей в смешанное число. Обязательно ли найдутся два числа, у которых одинаковы либо целые части, либо дробные части?

Решение. Например, рассмотрим дроби:

$$3/2 = 1\frac{1}{2}, \quad 7/3 = 2\frac{1}{3}, \quad 13/4 = 3\frac{1}{4}, \quad 21/5 = 4\frac{1}{5}, \quad 31/6 = 5\frac{1}{6} \quad \text{и} \quad 1/56.$$

Сумма их числителей, так же, как и сумма их знаменателей, равна 76. При этом, и целые части и дробные части этих чисел попарно различны.

Замечания. Бесконечное число примеров можно построить из следующих соображений. Возьмём пять произвольных несократимых неправильных дробей с различными знаменателями и различными целыми частями. Пусть сумма их числителей на n больше суммы знаменателей. Теперь добавим к набору дробь $1/(n+1)$: её целая часть равна нулю, а дробная часть меньше, чем у любой ранее выбранной дроби. $\square$

Задача 4.7.7. («Математический праздник» — 1997.6.2) В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменён буквой x. Найдите этот знаменатель.

Решение. Выразим $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{73} - \frac{1}{60} - \frac{1}{219} - \frac{1}{292} = \frac{1}{365}.$$

Значит, $x = 365$. $\square$

Задача 4.7.8. («Математический праздник» — 2000.7.2) Карлсон написал дробь $10/97$. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь: а) равную $1/2$; б) равную 1?

Решение. а) Умножение числителя и знаменателя на одно и то же число не влияют на величину дроби. Поэтому задача сводится к уравнению

$$2 \cdot (10 + x) = 97 + x,$$

откуда $x = 77$.

б) Дробь равна единице, если её числитель и знаменатель равны. А Малыш не сможет из неравных чисел сделать равные. □

Задача 4.7.9. («Математический праздник» — 2004.6.3) а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (то есть заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

Подсказка. а) Подберите три дроби с числителями, равными 1.

б) Найдите сначала три дроби с разными знаменателями, дающие в сумме 1.

Решение. а) Например: 1/2, 1/3, 1/6.

б) Например: 2/11, 3/11, 6/11. □

Задача 4.7.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.3) Мальвина записала по порядку 2016 обыкновенных правильных дробей: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, ... (в том числе и сократимые). Дроби, значение которых меньше, чем 1/2, она покрасила в красный цвет, а остальные дроби — в синий. На сколько количество красных дробей меньше количества синих?

Решение. Заметим, что записана только одна дробь со знаменателем 2, ровно две дроби со знаменателем 3, ровно три — со знаменателем 4, и так далее.

Так как $2016 = 64 \cdot 63 : 2$, то число 2016 равно сумме всех натуральных чисел от 1 до 63. Значит, Мальвина записала все дроби со знаменателями 2, 3, ..., 64.

Рассмотрим дроби с одинаковым знаменателем, записанные в порядке возрастания. Если знаменатель нечётный, то каждая из дробей первой половины меньше, чем 1/2, а каждая из дробей второй половины больше, чем 1/2. Если знаменатель чётный, то есть дробь, равная 1/2, а из остальных дробей половина меньше, чем 1/2, а другая половина — больше, чем 1/2.

Таким образом, количество красных дробей меньше количества синих в точности на количество дробей, равных 1/2. Это дроби 1/2, 2/4, 3/6, ..., 32/36, их количество равно 32. □

Задача 4.7.11. («Математический праздник» — 2016.7.4) Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным:

$$\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}.$$

Решение. Например,

$$\frac{1}{6}+\frac{7}{3}=\frac{5}{2}.$$

Замечания. Есть и другие примеры. Поиск примера упрощается, если заметить, что ни один знаменатель не может быть равен ни 1 (тогда знаменатели оставшихся дробей совпадали бы), ни 5 или 7 (потому что если знаменатели двух несократимых дробей не делятся на простое число, то не делится на это простое число и знаменатель их суммы или разности). □

Задача 4.7.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.5) Можно ли в равенстве

$$\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=*$$

заменить звёздочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

Решение. Можно, из возможных примеров приведём два:

$$\frac{7}{4}+\frac{6}{8}+\frac{5}{1}+\frac{3}{2}=9, \quad \frac{5}{4}+\frac{6}{8}+\frac{9}{3}+\frac{2}{1}=7.$$

□

8 Системы счисления

Задача 4.8.2. («Математический праздник» — 2008.6.1) Сегодня 17 февраля 2008 года. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырёх цифр равна сумме последних четырёх. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз?

Решение. Последний раз такое совпадение случится 25 декабря 2008 года. Нетрудно проверить, что в оставшиеся дни до конца года такого совпадения больше не будет. □

Задача 4.8.3. («Математический праздник» — 2009.6.1) У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?

Решение. В 2010, 2011, ..., 2019 годах и в 2021 году в номере года есть единица, и если её поставить на первое место, число заведомо уменьшится. Число 2020 можно уменьшить до 2002. А вот число 2022 нельзя уменьшить, переставляя цифры. □

Задача 4.8.4. («Математический праздник» — 2002.7.1) Год проведения олимпиады (2002) — год–палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год–палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов–непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)?

Решение. Пусть сейчас год–палиндром, имеющий вид $\overline{abba}$. Когда наступит следующий такой год? Рассмотрим два случая.

Пусть $b = 9$ (год вида $\overline{a99a}$, $a < 9$). Тогда через 11 лет наступит ещё один год–палиндром:

$$\overline{(a+1)00(a+1)}.$$

Например, годы 3993 и 4004.

Теперь пусть $b < 9$. В этом случае следующий год–палиндром наступит через 110 лет:

$$\overline{a(b+1)(b+1)a}.$$

Например, годы 9339 и 9449.

Поэтому наибольшее число годов–непалиндромов подряд — 109. □

Задача 4.8.5. («Математический праздник» — 1993.6.4) Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

Подсказка. Если $a < b$, то наименьшее число с суммой цифр a будет меньше, чем наименьшее число с суммой цифр b.

Решение. Докажем сначала, что если $a < b$, то наименьшее число с суммой цифр a будет меньше, чем наименьшее число с суммой цифр b. Пусть B — наименьшее число с суммой цифр b. Если уменьшить на 1 любую ненулевую цифру числа B, то сумма цифр уменьшится ровно на 1, и само число тоже уменьшится. Значит, после нескольких (а именно, $b - a$) таких операций мы получим число, меньшее B, с суммой цифр, в точности равной a. Значит, и наименьшее число с суммой цифр, равной a, будет меньше, чем B.

Теперь мы легко можем решить задачу. Наименьшее число с суммой цифр, равной 2, — это 11. Наименьшее число с суммой цифр, равной 11, — это 29, а наименьшее число с суммой цифр 29 — это 2999. $\square$

Задача 4.8.6. («Математический праздник» — 1991.6.5) Найдите числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

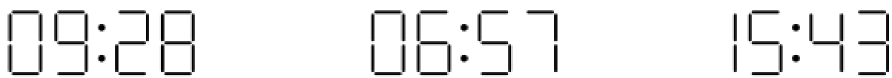
Подсказка. Если первая цифра двузначного числа равна a, а вторая равна b, то само число равно $10a + b$.

Решение. Легко заметить, что однозначных чисел, больших нуля, с требуемым свойством нет. Попробуем найти решение среди двузначных чисел. Если первая цифра двузначного числа равна a, а вторая равна b, то само число равно $10a + b$. Имеем $10a + b = 2 \cdot (a + b)$. Отсюда $8a = b$, то есть $a = 1$, $b = 8$.

Значит, искомые числа: 0, 18.

Замечания. Можно показать, что других решений нет. Идея: самое маленькое трёхзначное число — 100, а самая большая сумма трёх цифр $9 + 9 + 9 = 27$. Но это на олимпиаде не требовалось. $\square$

Задача 4.8.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.6) На рисунке приведены три примера показаний исправных электронных часов. Сколько палочек могут перестать работать, чтобы время всегда можно было определить однозначно?



Решение. На первой позиции требуется различить три цифры: 0, 1 и 2. Для этого можно обойтись двумя палочками, например, верхней и средней: если они горят обе, то это 2, если только верхняя, то это 0, а если не горит ни одна — это 1. Одной палочкой, очевидно, обойтись нельзя.

На второй и на четвёртой позициях надо уметь различать все 10 цифр. Обязаны работать пять палочек: верхняя, иначе мы спутаем 7 и 1; средняя, иначе спутаем 8 и 0; левая верхняя, иначе спутаем 9 и 3; левая нижняя, иначе спутаем 6 и 5; правая верхняя, иначе спутаем 9 и 5. Палочки нижняя и правая нижняя могут не работать — несложно проверить, что путаницы в цифрах не будет.

Осталась третья позиция, на которой нужно уметь различать цифры от 0 до 5. Две палочки дают четыре комбинации, значит, необходимы, как минимум, три работающие палочки. И действительно, можно обойтись верхней, левой верхней и левой нижней палочками. Тогда цифры на этой позиции будут выглядеть так (цифре 1 соответствует пустое изображение).

Таким образом, на первой позиции может не работать 5 палочек, на второй и на четвертой — по две и на третьей — 4. Итого: $5+2+2+4=13$ палочек. $\square$

Задача 4.8.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.6) Некоторые числа представимы в виде суммы $\overline{abc}+\overline{ab}+a$, а некоторые — нет. (Например, число 1001 представимо, поскольку $1001 = 993 + 99 + 9$. А числа 220 и 1514 — не представимы.) Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде суммы $\overline{abc}+\overline{ab}+a$?

Решение. Поскольку всего трёхзначных чисел 900 штук, то достаточно заметить, что неравенству $\overline{abc}+\overline{ab}+a > 999$ удовлетворяют в точности те числа $\overline{abc}$, которые начинаются с цифры 9, кроме числа 900 (таких чисел 801). Кроме того, легко видеть, что из разных трёхзначных чисел получаются разные значения суммы. $\square$

Задача 4.8.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.7.7) Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше — сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог.

Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить».

Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить».

Какое число было сообщено Саше?

Решение. Пусть $\overline{ab}$ — задуманное двузначное число, тогда $P = ab$ — произведение его цифр.

Так как Петя берётся угадать задуманное число с трёх попыток, то число P должно раскладываться на два множителя, которые являются цифрами, ровно тремя способами, учитывая порядок множителей. Следовательно:

- $b \neq 0$ (иначе $P = 0 = a \cdot 0$ при любом a от 1 до 9, то есть указанных способов — 9);

- для чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ значение P одно и то же, поэтому P должно быть квадратом какой-то из цифр (иначе P раскладывается указанным образом чётным количеством способов).

Таким образом, достаточно рассмотреть квадраты всех цифр и выписать все способы их указанного разложения на множители:

$$1 = 1 \cdot 1,\ 4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 4 \cdot 1,\ 9 = 3 \cdot 3 = 1 \cdot 9 = 9 \cdot 1,\ 16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8 = 8 \cdot 2,$$
$$25 = 5 \cdot 5,\ 36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 9 \cdot 4,\ 49 = 7 \cdot 7,\ 64 = 8 \cdot 8,\ 81 = 9 \cdot 9.$$

Следовательно, из фразы Пети Саша может сделать вывод, что задуманным могло оказаться только одно из следующих чисел:

$$22,\ 14,\ 41,\ 33,\ 19,\ 91,\ 44,\ 28,\ 82,\ 66,\ 49,\ 94.$$

Среди них: одно число с суммой цифр 4 (22), два числа с суммой цифр 5 (14 и 41), одно число с суммой цифр 6 (33), одно число с суммой цифр 8 (44), четыре числа с суммой цифр 10 (19, 91, 28, 82), одно число с суммой цифр 12 (66) и два числа с суммой цифр 13 (49 и 94). Так как Саше требуется четыре попытки, то искомая сумма равна 10. $\square$

Глава 5
Размышления и игры

1 Логические задачи

Задача 5.1.4. («Математический праздник» — 2010.6.2) В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Всё моё золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжёшь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

Решение. Предположим, что *А* — эльф. Тогда он сказал правду, а *Б* солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит, *А* гном.

Говоря про золото, он солгал. Поэтому *Б* сказал про *А* правду. Это мог сделать только гном. □

Задача 5.1.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.2) Некоторые жители *Острова Разноцветных Лягушек* говорят только правду, а остальные всегда лгут. Трое островитян сказали так:

Бре: На нашем острове нет синих лягушек.

Ке: Бре — лгун. Он же сам синяя лягушка!

Кекс: Конечно, Бре — лгун. Но он красная лягушка.

Водятся ли на этом острове синие лягушки?

Решение. *Ке* и *Кекс*, говоря о цвете *Бре*, противоречат друг другу, значит, по крайней мере один из них лжец.

Следовательно, высказывание «*Бре* — лгун» неверно. Значит, *Бре* сказал правду. □

Задача 5.1.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.2) Дом имеет форму квадрата, разделённого на девять одинаковых квадратных комнат. В каждой комнате живёт либо рыцарь, который всегда говорит только правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый житель дома заявил: «Среди моих соседей рыцарей больше, чем лжецов». Известно, что среди жителей дома есть и рыцари, и лжецы. Сколько среди них рыцарей? (Соседними считаются комнаты, имеющие общую стену.)

Решение. Предположим, что в центральной комнате дома живёт лжец. Тогда возможны две ситуации.

1. Среди соседей лжеца, живущего в центральной комнате, есть рыцарь. Тогда, поскольку о своих соседях этот рыцарь сказал правду, два его соседа, живущие в угловых комнатах, должны быть рыцарями. Соседи рыцарей, живущих в угловых комнатах, могут быть только рыцарями. Получается, что среди соседей лжеца, живущего в центральной комнате, есть по крайней мере три рыцаря. Это значит, что слова лжеца правдивы, а это невозможно.
2. Все соседи лжеца, живущего в центральной комнате, тоже лжецы. Тогда у жильцов угловых комнат все соседи — лжецы, а значит, они сказали неправду. Получается, что все жильцы дома — лжецы, что противоречит условию задачи.

Значит, наше первоначальное предположение неверно, и в центральной комнате живёт рыцарь. Тогда среди всех его соседей есть по крайней мере три рыцаря. Если у жильца угловой комнаты оба соседа — рыцари, он тоже должен быть рыцарем. Значит в двух угловых комнатах живут рыцари. Получается, что в доме живут по крайней мере шесть рыцарей.

Рассмотрим последние три комнаты. Здесь снова возможны две ситуации.

1. В средней из этих комнат живёт рыцарь. Тогда оба соседа жильцов угловых комнат — рыцари, значит в обеих угловых комнатах живут рыцари, а это значит, что все жители дома — рыцари, что противоречит условию.
2. В средней комнате живёт лжец. Тогда жители обеих угловых комнат солгали, значит, они тоже лжецы. Следовательно, в доме живут шесть рыцарей и три лжеца.

□

Задача 5.1.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.2) Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

Решение. Заметим, что так как первый и второй приятели дали различные ответы, то один из них — лжец, а другой — рыцарь.

Кроме того, рыцарь не мог ответить «Нет» на предложенный ему вопрос, так как в этом случае он бы сказал неправду (среди двух оставшихся точно есть лжец). Следовательно, первый — лжец. Он солгал, значит, среди двух оставшихся должен быть лжец, и им может быть только третий приятель. Следовательно, третий ответил «Нет». □

Задача 5.1.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.2) В шеренге стоят 2014 человек, и одного из них зовут Артур. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Артура, сказал: «Между мной и Артуром стоят ровно два лжеца». Сколько лжецов в этой шеренге, если известно, что Артур — рыцарь?

Решение. Те, кто стоят рядом с Артуром, и те, кто стоят через одного человека от него, заведомо врут. Поэтому тот, между кем и Артуром стоят ровно два человека, — рыцарь.

Перебирая по очереди каждого стоящего за этим рыцарем (удаляясь от Артура), убеждаемся, что все они — также рыцари.

Заметим теперь, что количество людей, стоящих в шеренге рядом с Артуром или через одного человека от него, может быть различным. Их может быть:

- двое, если Артур — крайний в шеренге;
- трое, если Артур — второй с краю;
- четверо во всех остальных случаях.

Таким образом, лжецов в шеренге 2, 3 или 4. □

Задача 5.1.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.2) В семье весёлых гномов папа, мама и ребёнок. Имена членов семьи: Саша, Женя и Валя. За обеденным столом два гнома сделали по два заявления. Валя: «Женя и Саша разного пола. Женя и Саша — мои родители». Саша: «Я — отец Вали. Я — дочь Жени». Восстановите имя и отчество гнома–ребёнка, если известно, что каждый гном один раз сказал правду, и один раз пошутил.

Решение. Если Женя и Саша — родители Вали, то они разного пола, и оба заявления Вали правдивы, что невозможно. Поэтому Женя и Саша разного пола, но кто-то из них не родитель. Значит, Валя — родитель.

В таком случае Саша не может быть отцом Вали, и из Сашиных высказываний правдиво второе: она — дочь Жени. Так как Саша и Женя разного пола, то Женя — отец Саши, тогда Валя — её мама. Следовательно, гнома–ребёнка зовут Александра Евгеньевна. □

Задача 5.1.10. («Математический праздник» — 2003.6.3) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

Подсказка. Подумайте, может ли первый отвечающий быть рыцарем.

Решение. Предположим, что первый — рыцарь, тогда оба остальных лжецы, но тогда получается, что второй сказал правду, значит первый — лжец.

Предположим, что второй — лжец, тогда третий обязательно рыцарь, и получается, что второй сказал правду. Значит второй — рыцарь. А это, в свою очередь, означает, что третий — тоже рыцарь, и он сказал «Один». □

Задача 5.1.11. («Математический праздник» — 2015.6.3) Математик с пятью детьми зашёл в пиццерию.

Маша: Мне с помидорами и чтоб без колбасы.

Даша: Я буду без помидоров.

Никита: А я с помидорами. Но без грибов!

Игорь: И я без грибов. Зато с колбасой!

Ваня: А мне с грибами.

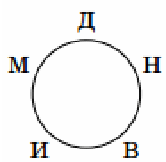
Папа: Да, с такими привередами одной пиццей явно не обойдёшься...

Сможет ли математик заказать две пиццы и угостить каждого ребёнка такой, какую тот просил, или всё же придётся три пиццы заказывать?

Решение. Пусть удалось обойтись двумя пиццами. Для Вани папа должен заказать пиццу с грибами. Другие мальчики грибы не едят, так что вторая пицца непременно будет с помидорами и колбасой.

Маша такую пиццу есть откажется, так что в Ванину пиццу придётся добавить помидоры. Теперь помидоры есть в обеих пиццах, и для Даши придется заказывать третью.

Замечания. Решение можно сделать более наглядным с помощью следующей схемы. Посадим детей в пиццерии за круглый стол так, как показано на рисунке.



Каждые двое, сидящие рядом, по условию не станут есть одну пиццу. Но если заказано всего две пиццы, то какая-то достанется по крайней мере троим, а среди трёх ребят всегда найдутся соседи за столом. □

Задача 5.1.12. («Математический праздник» — 2011.6.3;7.3) Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;
б) в ворота «Юга» забьют;
в) «Север» выиграет;
г) «Север» не проиграет;
д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч?

Решение. Предположим, что «Север» выиграл. Тогда 4 прогноза (а), б), в) и г)) оказались верными, что противоречит условию.

Предположим, что матч закончился ничьей. Тогда заведомо неверны прогнозы а), в) и д) (при ничьей количество забитых голов чётно), что также противоречит условию.

Итак, этот матч «Север» проиграл. Тогда прогнозы в) и г) неверны, а оставшиеся 3 прогноза верны.

А именно: ничьей не было, в ворота «Юга» забили, и в матче было забито ровно 3 гола. Значит, матч закончился со счётом 1 : 2. □

Задача 5.1.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.3) Карлсон открыл школу, и 1 сентября во всех трёх первых классах было по три урока: Курощение, Низведение и Дуракаваляние. Один и тот же предмет в двух классах одновременно идти не может. Курощение в 1Б было первым уроком. Учитель Дуракаваляния похвалил учеников 1Б: «У вас получается ещё лучше, чем у 1А». Низведение на втором уроке было не в 1А. В каком классе валяли дурака на последнем уроке?

Решение. Из условия следует, что Дуракаваляние в классе 1Б было либо на втором, либо на третьем уроке.

Предположим, что оно было на втором уроке. В 1А оно было раньше, то есть на первом уроке. Так как Низведение на втором уроке было не в 1А, то в 1А оно было на третьем уроке. Так как в 1Б первым уроком было Курощение, то Низведение там тоже могло быть только третьим уроком. Противоречие.

Значит, Дуракаваляние было на третьем уроке в 1Б.

Замечания. Условию задачи соответствуют два варианта расписания.

1А	1Б	1В
Дур.	Кур.	Низв.
Кур.	Низв.	Дур.
Низв.	Дур.	Кур.

1А	1Б	1В
Низв.	Кур.	Дур.
Дур.	Низв.	Кур.
Кур.	Дур.	Низв.

□

Задача 5.1.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.3) Четверо детей сказали друг о друге так.

Маша: Задачу решили трое: Саша, Наташа и Гриша.

Саша: Задачу не решили трое: Маша, Наташа и Гриша.

Наташа: Маша и Саша солгали.

Гриша: Маша, Саша и Наташа сказали правду.

Сколько детей на самом деле сказали правду?

Решение. Высказывания Маши и Саши противоречат друг другу, следовательно, Гриша наверняка солгал. Далее возможны два случая.

Наташа сказала правду. Тогда солгали и Маша, и Саша, то есть правду сказал один ребёнок.

Наташа солгала. Тогда правду сказала либо Маша, либо Саша. И в этом случае сказал правду тоже один ребёнок. □

Задача 5.1.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.3) В XIX и XX веках Россией правили 6 императоров из династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович и Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях — после отца сын. Как известно, последнего русского императора звали Николаем. Восстановите порядок правления императоров. (К сожалению, жюри упорно делает вид, что не знает русской истории, и не верит ничему, кроме логических рассуждений.)

Решение. Поскольку Петров среди этих императоров нет, то первым правил Павел Петрович.

Последним мог править как Николай Павлович, так и Николай Александрович.

В первом случае, поскольку, кроме Павла Петровича среди императоров Павлов не было, то пятым должен был править тоже Павлович (брат Николая

Павловича), но и вторым тоже должен править Павлович (сын Павла Петровича). Двух Павловичей среди оставшихся императоров у нас нет, поэтому этот случай невозможен. Итак, первым точно правил Павел Петрович, а последним — Николай Александрович.

Оба оставшихся Павловича могли править только после Павла Петровича, следовательно, они были братьями. Оставшиеся два императора — отец и сын, следовательно четвёртым правил Александр Николаевич, а пятым — Александр Александрович. Тогда третьим был Николай Павлович.

Следовательно, императоры правили в следующем порядке: Павел Петрович, Александр Павлович, Николай Павлович, Александр Николаевич, Александр Александрович, Николай Александрович. □

Задача 5.1.16. (Турнир Архимеда — 2015.3) Однажды на остров Рыцарей (которые всегда говорят правду) и Лжецов (всегда лгут), приехал путешественник. Выйдя на берег, он встретил процессию из четырёх островитян, которые несли 12 красных и 4 синих шариков (по 4 каждый). Каждый из них высказал одно утверждение. Первый сказал: «Красных шариков у меня меньше, чем синих». Второй сказал: «Синих шариков у меня не меньше, чем красных». Третий сказал: «Синих и красных шариков у меня поровну». Четвёртый сказал: «Красных у меня не более одного». Не можете ли Вы указать, сколько рыцарей могло быть среди них?

Решение. Докажем, что среди четырёх встреченных островитян не более двух рыцарей.

Действительно, если высказывания первого и третьего истинны одновременно, то синих шаров не менее 5. Следовательно, среди этих двух островитян есть лжец. Если высказывания второго и четвертого островитян истинны одновременно, то синих шаров не менее 5. Следовательно, среди этих двух островитян тоже есть лжец. То есть, среди островитян не менее двух лжецов.

Приведём примеры, когда рыцарей 0, 1 или 2.

1. Рыцарей нет: у первого все шары красные, у второго и третьего по три красных и одному синему, у четвёртого два синих и два красных.
2. Рыцарь один: у каждого из первых трёх четыре красных шара (лжецы), у четвёртого четыре синих шара (он рыцарь).
3. Рыцарей два: у первого и четвёртого все шары красные (лжецы), у второго и третьего по два синих и два красных шара (рыцари).

Таким образом, рыцарей может быть 0, 1 или 2. □

Задача 5.1.17. («Математический праздник» — 2009.7.3) У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

Решение. Так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду. Если все осьминоги лгут, то у каждого из них по 7 ног. Значит, вместе у них 28 ног. Но тогда синий осьминог сказал правду — противоречие.

Если же три осьминога солгали, а четвёртый сказал правду, то у солгавших осьминогов должно быть по 7 ног, а у сказавшего правду — либо 6, либо 8. Поэтому вместе у них либо 27, либо 29 ног, то есть правду сказал зелёный осьминог. Таким образом, у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног. □

Задача 5.1.18. («Математический праздник» — 2009.6.4) Если у осьминога чётное число ног, он всегда говорит правду. Если нечётное, то он всегда лжёт. Однажды зелёный осьминог сказал тёмно–синему:

— У меня 8 ног. А у тебя только 6.

— Это у меня 8 ног, — обиделся тёмно-синий. — А у тебя всего 7.

— У тёмно–синего действительно 8 ног, — поддержал фиолетовый и похвастался: — А вот у меня целых 9!

— Ни у кого из вас не 8 ног, — вступил в разговор полосатый осьминог. — Только у меня 8 ног!

У кого из осьминогов было ровно 8 ног?

Решение. Если фиолетовый осьминог говорит правду, то у него чётное число ног. Но в таком случае он не может сказать, что у него 9 ног. Значит, фиолетовый осьминог лжёт.

Поэтому у тёмно–синего осьминога не 8 ног. Но тёмно–синий говорит, что у него 8 ног, то есть лжёт. Поэтому у него нечётное число ног.

Сказав, что у тёмно–синего осьминога 6 ног, зелёный солгал. Поэтому он солгал и в первый раз, и у него не 8 ног.

Итак, первое утверждение полосатого осьминога верно. Значит, верно и второе, и у него действительно 8 ног. А у остальных осьминогов нечётное число ног. □

Задача 5.1.19. («Математический праздник» — 1996.6.4) Три человека A, B, C пересчитали кучу шариков четырёх цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой — оранжевый и жёлтый, а третий — жёлтый и зелёный. Результаты их подсчётов приведены в таблице. Сколько каких шариков было на самом деле?

	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

Решение. Ошибиться при подсчёте красных шариков мог только один из них, а двое правильно сосчитали число красных шариков. Поэтому красных шариков было 2.

В подсчёте красных шариков ошибся C, значит, он путал красные с оранжевыми, а жёлтые и зелёные считал правильно. Получаем, что жёлтых — 8, а зелёных — 9.

Все оставшиеся шарики — оранжевые. Общее число шариков все считали правильно — 23. Значит, оранжевых шариков было 4.

Значит, было 2 красных, 4 оранжевых, 8 жёлтых, 9 зелёных шариков. □

Задача 5.1.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.4) В школе колдовства 13 учеников. Перед экзаменом по ясновидению преподаватель посадил их за круглый стол и попросил угадать, кто получит диплом ясновидящего. Про себя и двух своих соседей все скромно умолчали, а про всех остальных написали: «Никто из этих десяти не получит!» Конечно же, все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько колдунов получили диплом?

Решение. Предположим, что никто не получил диплом. Тогда высказывание каждого ученика истинно. В этом случае все должны были получить дипломы — противоречие.

Значит, хотя бы один из учеников получил диплом ясновидящего. Он сказал правду, поэтому никто, кроме его соседей, диплома не получил.

Если оба соседа также остались без дипломов, то утверждение «Никто из этих десяти не получит!» для каждого из них истинно, но ведь они должны были ошибиться!

Если же оба соседа сдали экзамен, то они оба ошиблись в своих высказываниях. Значит, только один из соседей мог сдать экзамен успешно. Действительно, в этом случае его высказывание истинно, а высказывание второго соседа — ложно.

Таким образом, диплом получили два колдуна. □

Задача 5.1.21. («Математический праздник» — 1991.7.4) Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: «Ты Винтик?». «Да», — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто. Кого звали Винтиком?

Подсказка. Если бы они ответили одинаково, то Знайка никак не мог бы их различить.

Решение. Если бы они ответили одинаково, то Знайка никак не мог бы их различить. Значит, второй ответил: «нет».

Теперь, если бы Винтиком был первый, то получилось бы, что оба сказали правду. А это противоречит условию.

Значит, Винтик — второй, и они оба солгали (что условием не запрещено). □

Задача 5.1.22. («Математический праздник» — 1998.7.4) На острове Контрастов живут и рыцари, и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

Решение. Если два жителя острова сказали одно и то же, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов чётное число, а во втором и тех, и других — нечётное число. Значит, число людей на острове чётно. □

Задача 5.1.23. (Турнир Архимеда — 2013.4) У царя Гороха три сына: старший — Пётр, средний — Фёдор и младший — Иван–дурак. Царь хочет женить старшего сына на царевне Несмеяне. Известно, что два сына царя Гороха — рыцари (всегда говорят правду), а один — лжец (всегда врёт), но мало кто знает, кто из них кто. Царевна Несмеяна хочет выяснить, за кого (рыцаря или лжеца) ей предлагают выйти замуж. Может ли она это узнать, задав один вопрос Ивану? (Иван–дурак умеет отвечать на вопросы только «да» или «нет»; кто среди братьев рыцарь, и кто — лжец, ему известно).

Решение. Вариантов опроса могло быть несколько. Один из самых простых: «Верно ли, что Фёдор лжец?»

Иван ответит «да» в двух случаях: когда он и Пётр рыцари, а Фёдор лжец, либо когда он лжец, а Фёдор с Петром рыцари.

Иван ответит «нет» только в случае, когда он и Фёдор рыцари, а Пётр лжец.

Важно понимать, что возможно всего три случая. Составим таблицу.

Ответы Ивана	Пётр	Фёдор	Иван
«да»	Рыцарь	Лжец	Рыцарь
«да»	Рыцарь	Рыцарь	Лжец
«нет»	Лжец	Рыцарь	Рыцарь

Таким образом, при ответе Ивана «нет» — Пётр лжец, а при ответе «да» — Пётр всегда рыцарь. Аналогично будет рассматриваться и ситуация с вопросом: «Верно ли, что Фёдор рыцарь?».

Возможны и другие варианты вопросов. Например: «Верно ли, что Вы с Петром рыцари?», «Если бы я спросил тебя лжец ли Пётр, ты бы сказал да?».

Таким образом, Несмеяна может выяснить, за кого ей предлагают выйти замуж. □

Задача 5.1.24. (Турнир Архимеда — 2014.4) На конференции по математической физике за круглым столом собрались рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы — врут), причём известно, что среди физиков и математиков лжецов поровну. Каждому из участников конференции задали вопрос: «Кто ваш сосед справа: физик или математик?». Подводя итоги, председатель заметил: «Интересно, что нас здесь 34 человека, причём физиков и математиков поровну, однако каждый утверждает, что его сосед справа — математик». Определите, кем был председатель — рыцарем или лжецом?

Решение. Предположим, что председатель — рыцарь.

Первый способ. По условию задачи среди физиков и математиков лжецов поровну, то есть число всех лжецов — чётно. Тогда всего 34 человека, и 17 из них — математики. Получается, что ровно половина сказавших — 17 человек — солгали. Противоречие. Значит, председатель конференции — лжец.

Второй способ. По условию задачи среди физиков и математиков лжецов поровну, тогда, учитывая равное количество математиков и физиков (по 17), следует, что количество физиков–рыцарей и математиков–рыцарей также одинаково. Тогда правее каждого математика–лжеца сидит несколько физиков (может быть и не одного!), причём последний из этой серии физиков, обязательно, физик–рыцарь. То есть, на каждого математика–лжеца приходится физик–рыцарь, сидящий правее, а, следовательно, число математиков–лжецов равно числу физиков–рыцарей.

Но количества физиков–рыцарей и математиков–рыцарей одинаковы, как и количества физиков–лжецов и математиков–лжецов. Значит, число участников конференции в этом случае кратно 4, а председатель конференции — лжец. □

Задача 5.1.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.4) У Буратино есть 5 монет, ровно одна из них — фальшивая. Какая именно — известно только Коту Базилио. Буратино может выбрать три монеты, одну из них отдать Коту, и за это узнать про другие две, есть ли среди них фальшивая. Буратино знает, что Кот за настоящую монету скажет правду, а за фальшивую — соврёт. Как Буратино определить фальшивую монету среди всех пяти, задав не более трёх вопросов?

Решение. Сначала Буратино спрашивает про две любые монеты, заплатив третьей. Если Кот утверждает, что среди монет нет фальшивой, то эти три монеты настоящие. Если же Кот утверждает, что среди монет есть фальшивая, то какая-то из этих трёх монет фальшивая, значит, две оставшиеся монеты настоящие. В любом случае из четырёх монет, оставшихся у него, Буратино определит две настоящие.

Потом Буратино отдаёт одну из известных ему настоящих монет Коту, а другую объединяет в пару с одной из неизвестных и показывает эту пару Коту. Ответ будет правдив, поэтому либо фальшивая монета в этой паре (и тогда Буратино её определит), либо обе монеты настоящие, и тогда фальшивой может быть либо третья его монета, либо первая монета, выплаченная Коту.

Теперь Буратино снова отдаёт настоящую монету Коту и спрашивает про две оставшиеся у него монеты. Ответ опять правдив, поэтому фальшивая монета однозначно определяется. □

Задача 5.1.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.4) Вовочка пришёл сдавать компьютерный тест. На экране появились 6 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». После ответа на все вопросы компьютер вычисляет количество правильных ответов и ставит: двойку, если правильных ответов не более двух; тройку — если их три; четвёрку — если четыре; пятёрку — если пять или шесть.

Вовочка не знал ответа ни на один из вопросов. Тем не менее, по предыдущему опыту он знал следующее: первый и последний вопросы требуют противоположных ответов; не бывает, что на три подряд вопроса ответ один и тот же; не бывает, что утвердительные и отрицательные ответы строго чередуются; последовательность ответов на первые три вопроса не бывает в точности такой же, как последовательность ответов на последние три вопроса.

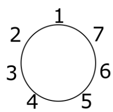
Помогите Вовочке не получить двойку.

Решение. Возможны лишь следующие варианты: 001011, 001101, 010011, 011001, 101100, 100110, 110010, 110100 (здесь 0 — «нет», 1 — «да»). Три ответа «да» будут обязательно (и три ответа «нет» будут обязательно). Поэтому, можно ответить «да» на все вопросы (или «нет» на все вопросы) и получить не меньше тройки. □

Задача 5.1.27. («Математический праздник» — 2011.6.5) Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?

Решение. **Первый способ.** Каждый гном видит все колпаки, кроме двух: своего и спрятанного. Надо договориться, какой из двух цветов назвать. Это можно сделать следующим образом.

Пронумеруем цвета числами от 1 до 7 (например, в том же порядке, как и цвета радуги) и заранее расположим их по кругу как показано на рисунке ниже.

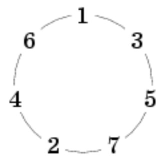


Каждый гном должен назвать тот из двух цветов, от которого до другого цвета ближе добраться по часовой стрелке. Тогда три гнома угадают, а три других ошибутся. Например, если спрятан колпак цвета 1, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 2, 3 и 4.

Второй способ. Если гном не видит два цвета одной чётности, то он называет цвет с большим номером, а если цвета, которые он не видит, имеют разную чётность, то он называет меньший номер. Какой бы цвет ни имел спрятанный колпак, его назовут ровно три гнома. Например, если спрятан колпак цвета 3, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 1, 4 и 6. Остальные случаи можно разобрать аналогично.

Замечания. Принцип действия гномов, изложенный во втором способе, применяется в однокруговых шахматных турнирах с нечётным количеством участников для того, чтобы каждый шахматист сыграл белым и чёрным цветом одинаковое количество партий. А именно: каждый участник турнира получает свой номер, и если встречаются шахматисты с номерами одной чётности, то белыми играет тот, у кого больше номер, а если номера участников имеют разную чётность, белыми играет тот, у кого номер меньше. Можно убедиться, что в этом случае каждый шахматист проведёт белыми и чёрными одинаковое количество партий.

Строго говоря, способы решения отличаются только нумерацией цветов. Если расположить цвета по кругу, как на рисунке ниже, то принцип действия гномов из первого способа в точности описывает второй способ.



Можно доказать, что никакая договорённость не позволит наверняка угадать цвет спрятанного колпака более, чем половине гномов. □

Задача 5.1.28. («Математический праздник» — 2002.6.5) Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие — Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю», и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались.

Решение. Проверим, что годится вопрос: «Правда ли, что у тебя золотых монет больше, чем у Алёши Поповича?».

Если у Ильи Муромца две золотые монеты, он скажет «да», поскольку у Алёши Поповича не может быть больше одной золотой монеты.

Если обе монеты у Ильи серебряные, то у Алёши хотя бы одна золотая, и Илья Муромец ответит «нет».

Ну а если ему достались разные монеты, то он ответит «не знаю», так как у Алёши может оказаться как две золотые, так и две серебряные монеты.

Конечно, можно было задать и другие вопросы, например: «Правда ли, что одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?», «Верно ли, что два других богатыря получили хотя бы по одной золотой монете каждый?», «Если я заберу у тебя одну монету и дам вместо неё золотую, станет ли у тебя больше золотых?»

Заметьте, что в последнем вопросе не упоминаются монеты двух других богатырей, а только монеты, доставшиеся Илье Муромцу! □

Задача 5.1.29. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.5) На острове рыцарей и лжецов путешественник пришёл в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

— Интересно, а сколько среди вас рыцарей? — спросил он.

— А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, — посоветовал один из гостей.

— Хорошо. Скажи мне каждый: кто твои соседи? — спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

— Данных недостаточно! — сказал путешественник.

— Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, — сказал один из гостей.

— Да, сегодня день его рождения! — сказал его сосед.

И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей. Действительно, сколько же их?

Решение. Если бы каждый сказал: «Оба моих соседа — рыцари», то можно было бы сразу определить, что все, сидящие за столом, — рыцари. Действительно, знакомый путешественника — рыцарь — сказал правду, значит, оба его соседа также сказали правду, и так далее, то есть каждый сказал правду.

Если бы каждый сказал: «Мои соседи — рыцарь и лжец», то также можно было бы сразу определить количество рыцарей. Действительно, знакомый путешественника сказал правду, значит, его соседи — рыцарь и лжец. Сосед–рыцарь также сказал правду, значит, другой его сосед — лжец. А сосед–лжец солгал, и значит, оба его соседи рыцари. Продолжая таким образом, получим, что за столом: две пары рыцарей, сидящих рядом, и два лжеца между ними.

Следовательно, каждый сказал: «Оба моих соседа лжецы». Это возможно в двух случаях:

- рыцари и лжецы сидели через одного;
- соседи рыцарей — лжецы, а соседи лжецов — рыцарь и лжец, то есть за столом — два рыцаря и четыре лжеца.

Так как двое сидящих рядом сказали одно и то же про день рождения, то первый случай невозможен. Таким образом, за столом — два рыцаря. □

Задача 5.1.30. (Турнир Архимеда — 2017.5) Кощей Бессмертный испытывает Ивана–царевича. На клетчатой доске 5×9 он отметил невидимыми чернилами квадрат 2×2. Ивану разрешается, выбрав несколько клеток, спросить у Кощея, есть ли среди них хотя бы одна отмеченная, на что Кощей обязан ответить правдиво: «да» или «нет». Сможет ли Иван найти отмеченный квадрат, задав не более 5 вопросов?

Решение. **Первый способ.** Отметим клетки цифрами. Заметим, что искомые четыре клетки обязательно помечены цифрами 1, 2, 3, 4.

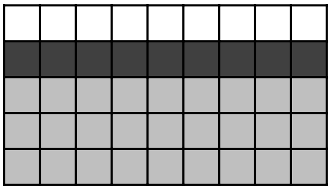
1	3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1

Найдём искомую клетку, помеченную цифрой 4. Всего таких клеток 8, одна из них искомая. Найдём её половинным делением (спросили у Кощея сначала про 4 клетки, а затем про две из отмеченных четырёх, а затем про одну из двух).

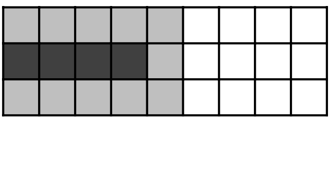
Таким образом, за три вопроса мы найдём отмеченную клетку с цифрой 4. Если мы нашли окрашенную клетку с 4 и теперь найдём клетку с 1, то квадрат будет определён однозначно.

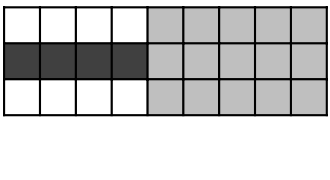
Рядом с найденной клеткой с 4 расположены четыре клетки с 1. За два вопроса половинным делением определим нужную клетку. Квадрат однозначно найден.

Второй способ. Закрасим первым действием вторую строку исходной таблицы 5×9 и узнаем у Кощея, есть среди точек второй строки хотя бы одна точка искомого квадрата 2×2. Если есть, то искомый квадрат будет находиться в верхней части таблицы 3×9, иначе — в нижней части.

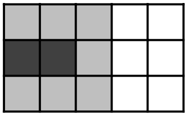
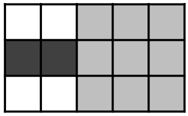


Закрасим в полученной таблице 3×9 четыре первые клетки среднего ряда и спросим у Кощея, есть ли среди них точки искомого квадрата. Если точки есть, то искомый квадрат будет находиться в левой части таблицы 3×5, иначе — в правой части.

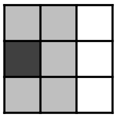
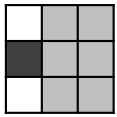




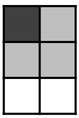
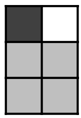
Закрасим в полученной таблице 3×5 две первые клетки среднего ряда и спросим у Кащея есть ли среди них точки искомого квадрата. Если точки есть, то искомый квадрат будет находиться в левой части таблицы 3×3, иначе в правой части.

Закрасим в полученной таблице 3×3 первую клетку среднего ряда и спросим у Кощея есть ли она в искомом квадрате. Если точка есть, то искомый квадрат будет находиться в левой части таблицы 3×2, иначе — в правой части.

Закрасим в полученной таблице 3×2 верхнюю левую клетку и спросим у Кощея, есть ли она в искомом квадрате. Если есть, то искомый квадрат будет находиться в верхней части таблицы 3×2, иначе искомый квадрат находится в нижней части.

Возможны и другие решения.

Таким образом, Иван–царевич сможет найти отмеченный квадрат. □

Задача 5.1.31. («Математический праздник» — 2005.6.6) В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело а) девять; б) десять жителей Пустоземья. Объясните своё решение.

Решение. Рассмотрим того, про кого сказали, что он — хоббит, и для удобства назовём его Боб. Боб не согласился с тем, что он хоббит, следующий не согласился с ним, а значит, подтвердил, что Боб хоббит, и так далее — все говорящие через раз подтверждали или отрицали, что Боб хоббит. Если пирующих было 9 (нечётное число), то на следующем круге каждый говорил противоположное к тому, что сказал на предыдущем, так что все они хоббиты, а первый хоббит про Боба сказал сначала правду, что вполне возможно. Мы решили пункт а) задачи.

Для решения пункта б) заметим, что, поскольку 10 — чётное число, то говорящие на каждом круге говорят одно и то же, поэтому хоббитов среди них нет. Тогда и Боб — не хоббит, а сказавший так про него его правый сосед солгал, то есть он гоблин. Сам же Боб уличил гоблина во лжи, так что он эльф. Его сосед слева снова гоблин, и так далее — за столом сидят, чередуясь, пять гоблинов и пять эльфов. □

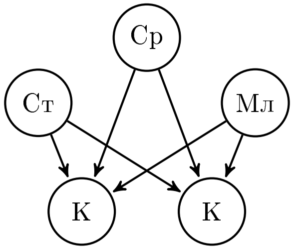
Задача 5.1.32. («Математический праздник» — 2007.6.6) Кощей Бессмертный похитил у царя трёх дочерей. Отправился Иван–царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

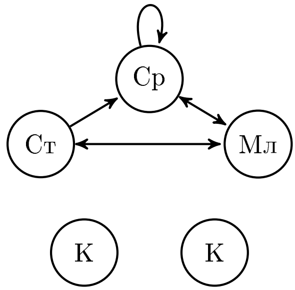
«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них — царёвы дочери, а ещё две — мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у неё спрашивать про каждую из пятерых: „Это царевна?“ Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если ещё и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей: а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

Решение. а) Пусть все царевны назовут царевнами Кощеевых дочек (рисунок слева). Тогда Кощеевых дочек назовут не менее трёх раз, а царевен — не более, чем дважды. Так Иван их и отличит.

б) **Первый способ.** Пусть старшая дочь назовёт царевнами среднюю и младшую, младшая — среднюю и старшую, а средняя — себя и младшую (рисунок справа). Тогда Иван сразу узнает среднюю царевну — это единственная девушка, которая назвала царевной себя, и её назвали царевной по крайней мере ещё две девушки. После этого Иван узнает младшую царевну (её назвала средняя), а потом и старшую (её назвала младшая).





Второй способ. Пусть та царевна, которая будет отвечать Кощею первой, назовёт среднюю и младшую царевен, вторая по счёту — старшую и младшую, последняя — старшую и среднюю. Тогда дочери Кощея — те две девушки, которых не назвали трое остальных. Ошибки быть не может, ведь каждую царевну называют как минимум двое. Теперь Иван знает, кто царевны, а старшинство определяется без труда.

Замечания. Любое из решений пункта б), конечно, годится и для пункта а).

□

Задача 5.1.33. («Математический праздник» — 2008.6.6;7.4) Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделённом тремя проходами на четыре комнаты, причём в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на неё. Если все стражники облокотятся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу. Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и разместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться?

Решение. Пусть, например, Василиса посадила Кощея в самую северную комнату, а стражников прислонила так: «к западной — к восточной — к западной стене» («ЗВЗ»). Покажем, что как бы Кощей ни ходил, стражники никогда не будут прислоняться к одной стене.

Заметим, что в любой момент выполняется следующее условие: стражники южнее Кощея остались в исходном положении, а положение стражников севернее Кощея изменилось. Действительно, это условие выполнено вначале и не нарушается при переходе Кощея из комнаты в комнату.

Значит, если Кощей в какой-то момент оказался в самой северной комнате, то все стражники остались в положении «ЗВЗ». Если Кощей оказался во второй комнате, то первый (самый северный) стражник поменял положение, а два других остались в исходном положении, то есть стражники приняли положение «ВВЗ». Если же Кощей оказался в третьей комнате, то стражники приняли положение «ВЗЗ». Наконец, если Кощей оказался в самой южной комнате, то все стражники изменили свое положение, то есть приняли положение «ВЗВ».

Значит, ни в какой момент все стражники не прислоняются к одной стене. $\square$

Задача 5.1.34. («Математический праздник» — 2012.6.6) Известно, что Шакал всегда лжёт, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

(«Как попало» означает, что один из ответов «да» или «нет» выбирается произвольно.)

Решение. На первый вопрос «Ты Шакал?» Лев и Шакал заведомо скажут «нет». Поэтому узнать Жирафа и не узнать Попугая Ёж может только в одном случае: если Жираф ответит «да$>$, а Попугай «нет». То же можно сказать и о втором вопросе «Ты Жираф?» — на него Лев и Жираф скажут «нет» (Жираф думает, что его спрашивают, Шакал ли он), стало быть, Шакал распознается потому, что только он один и сказал «да».

Поскольку ответа первого животного на третий вопрос хватило Ежу для определения всех (а до этого ответа информации не хватало), первым не стоял ни Жираф, ни Шакал (их ответы Ёжик мог предсказать заранее, и они ему ничего нового бы не сказали).

Первым не мог стоять и Лев (он на третий вопрос ответил бы «нет»), то есть первым был Попугай, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Шакал. У нас осталось две возможности расстановки.

1. Попугай, Жираф, Лев, Шакал.
2. Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

Рассмотрим их. Если бы имел место порядок 1, то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Попугай, ведь он не повторил ответ второго. А тогда после второго опроса все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы. А вот в случае порядка 2 варианты Попугай, Лев, Жираф, Шакал и Лев, Попугай, Жираф, Шакал действительно не различались бы до последнего вопроса.

Таким образом, животные стояли в следующем порядке: Попугай, Лев, Жираф, Шакал. □

Задача 5.1.35. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.6) На кружок пришли дети из двух классов: Ваня, Дима, Егор, Инна, Лёша, Саша и Таня. На вопрос: «Сколько здесь твоих одноклассников?» каждый честно ответил «Двое» или «Трое». Но мальчики думали, что спрашивают только про мальчиков–одноклассников, а девочки правильно понимали, что спрашивают про всех. Кто Саша — мальчик или девочка?

Решение. Пол каждого ребёнка, кроме Саши, определяется по именам однозначно, поэтому мальчиков на кружке либо 4, либо 5.

Предположим, что какие-то мальчики учатся в разных классах. Тогда их ответы показывают, что на кружок пришло не менее трёх мальчиков из каждого класса. Противоречие.

Следовательно, все присутствующие мальчики — одноклассники, но тогда их не могло быть пятеро. Значит, Саша — девочка.

Замечания. Описанная ситуация возможна: четыре мальчика учатся в одном классе, а три девочки — в другом. При этом каждый мальчик дал ответ «Трое», а каждая девочка — «Двое». □

Задача 5.1.36. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.6) На острове Правландия все жители могут ошибаться, но младшие никогда не противоречат старшим, а когда старшие противоречат младшим, они (старшие) не ошибаются. Между жителями А, Б и В произошёл такой разговор:

А: Б — самый высокий.

Б: А — самый высокий.

В: Я выше Б.

Следует ли из этого разговора, что чем моложе человек, тем он выше (для трёх говоривших)?

Решение. Как *Б*, так и *В* противоречат *А*. Значит, они старше *А*, то есть *А* — самый младший.

Когда старшие противоречат младшему, они не ошибаются, значит, действительно, *А* — самый высокий, и *В* выше *Б*, то есть *Б* самый низкий.

Но кто старше, *Б* или *В*, мы по данному разговору узнать не можем (они не противоречат друг другу). Могло быть и так, что самый низкий *Б* мог быть средним по возрасту. □

Задача 5.1.37. (Турнир Архимеда — 2012.6) За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо всегда лжёт (таких будем называть «лжецами»), либо всегда говорит правду (таких будем называть «правдивыми»). Мартышка задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является Ваш сосед справа — правдивым или лжецом?» (опрос шёл последовательно по кругу). Первые два попугая (справа от Мартышки) ответили: «мой сосед справа — лжец». Следующие два: «мой сосед справа — правдивый», следующие два: «мой сосед справа — лжец», и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 правдивых». Сколько правдивых было на самом деле?

Решение. **Первый случай.** Если опрос шёл справа налево, считая от Мартышки (против часовой стрелки), то возможны два случая.

1. Пусть сидящий справа от Мартышки попугай — лжец. Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (образуют цикл):
   $$(ЛПЛЛ)(ЛПЛЛ)\ldots$$
   Значит, 38 попугай, сидящий слева от Мартышки, — правдивый, а сама Мартышка — лжец. В этом случае 10 правдивых попугаев и 29 лжецов, считая Мартышку.
   Получается, что Мартышка сказала правду, а этого не может быть.
2. Пусть справа от Мартышки сидит правдивый попугай. Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (образуют цикл):
   $$(ПЛПП)(ПЛПП)\ldots$$
   Значит, сидящий слева от Мартышки попугай — лжец, а сама Мартышка — правдива. Всего в этом случае 29 правдивых, включая Мартышку, и 10 лжецов.
   Следовательно, Мартышка сказала правду. Противоречия нет.

Второй случай. Если опрос шёл слева направо, считая от Мартышки (по часовой стрелке), то также надо рассмотреть 2 варианта.

1. Мартышка правдива (или соответственно первый слева попугай лжец). Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (слева направо), образуя цикл:
   $$(ЛППП)(ЛППП)\ldots$$
   В этом случае 29 правдивых, включая Мартышку, и 10 лжецов.
2. Мартышка — лжец (или соответственно первый слева попугай правдивый). Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (слева направо), образуя цикл:

(ПЛЛЛ)(ПЛЛЛ)...

> В этом случае 10 правдивых попугаев и 29 лжецов, считая Мартышку. Получается, что Мартышка сказала правду, а этого не может быть. Получаем противоречие.

Следовательно, было 29 правдивых. □

Задача 5.1.38. (Турнир Архимеда — 2017.6) К остановке, где останавливаются автобусы с номерами $164, 171, 258, 285, 365, 367, 377, 577$, подошли учитель (он знает номер нужного автобуса) и три его ученика (они его не знают). Учитель предложил поиграть.

Он сообщил каждому (по секрету от остальных) одну из цифр номера: Лене — первую цифру, Васе — вторую, Коле — третью, и попросил угадать номер нужного автобуса (дети знают, кому сообщена первая цифра номера, кому — вторая, а кому — третья). После этого между ребятами состоялся разговор:

Лена: я не знаю номера, но понимаю, что и остальные его не знают.

Вася: я не знаю номера, но Коля теперь должен его знать.

Коля: да, я знаю номер, и вы двое помогли мне его определить.

Укажите и Вы номер нужного автобуса.

Решение. Если бы первой цифрой была 5, Лена бы сразу знала ответ. А она не знает, поэтому 5 не подходит. Значит, первой цифрой может быть 1, 2 или 3.

Если бы первой цифрой была 2, то у таких комбинаций была бы уникальная вторая цифра — 5 или 8. Поскольку Вася знает вторую цифру, то любой бы из этих вариантов однозначно дал бы ему ответ. Но ведь Лена уверяет, что Вася тоже не знает ответа. Значит, первой цифрой 2 не может быть. На первом месте могут быть цифры 1 и 3.

Если бы первой цифрой была бы 1, то уникальные цифры 4 и 1 на третьем месте дали бы ответ Коле. Но Лена уверена, что Коля ответа не знает. Значит, Лене названа не 1. Остаётся только 3.

Вася и Коля по фразе Лены могут определить первую цифру.

Если бы Васе была бы названа 7, он бы выбрал нужный вариант. Но он не смог, значит, ему назвали 6, и он не может определить третью цифру.

Коля знает, что речь идёт о первой цифре 3 после слов Лены. Если бы ему сообщили бы цифру 5, он бы знал ответ после слов Лены. Но он его узнал только после слов Васи. Значит, до этого он не мог выбрать между двумя вариантами с 7.

После слов Васи он знает, что речь может идти только о 6 на второй позиции. Следовательно, номер автобуса — 367. □

Задача 5.1.39. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.7) Врун всегда лжёт, Хитрец говорит правду или ложь, когда захочет, а Переменчик говорит то правду, то ложь попеременно. Путешественник встретил Вруна, Хитреца и Переменчика, которые знают друг друга. Сможет ли он, задавая им вопросы, выяснить, кто есть кто?

Решение. Спросим каждого из них по два раза: «Ты Врун?». Врун ответит: «нет, нет», а Переменчик ответит: либо «да, нет», либо «нет, да». Есть три возможных ответа Хитреца.

«Да, да». Тогда мы сразу узнаём, кто есть кто.

«Нет, нет». Тогда мы знаем, кто Переменчик и какой из двух его ответов правдив. Зададим Переменчику вопрос: «Он Врун?», указав на одного из двух оставшихся. Так как мы уже знаем, ответит ли Переменчик правду на третий вопрос, то мы поймём, кто из двоих Врун, а, значит, и кто из них Хитрец.

«Да, нет» или «нет, да». Тогда мы знаем, кто Врун. Зададим Вруну вопрос: «Он Хитрец?», указав на одного из двух оставшихся. По его ответу мы узнаем, кто из двоих Хитрец, а, значит, и кто из них Переменчик.

Таким образом, путешественник сможет выяснить, кто есть кто. □

Задача 5.1.40. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.9) В некотором государстве живут граждане трёх типов:

а) *дурак* считает всех дураками, а себя умным;

б) *скромный умный* про всех знает правильно, а себя считает дураком;

в) *уверенный умный* про всех знает правильно, а себя считает умным.

В думе — 200 депутатов. Премьер–министр провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По данным анкет он не смог узнать количество умных. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он заполнил анкету про всю думу, включая себя, и прочитав её, премьер–министр всё понял. Сколько умных могло быть в думе (включая путешественника)?

Решение. Все дураки дадут ответ «Один». Если бы умных в думе было три или больше, то все они назвали бы числа, не меньшие 2, и премьер-министр всё бы понял. Значит, умных могло быть 0, 1 или 2. Рассмотрим все эти случаи.

Если умных не было, то все сказали: «Один».

Если был один уверенный умный, то он тоже написал «Один», и ситуация не отличима от предыдущей. Если единственный умный — скромный, то он ответил: «Ни одного», и эта ситуация отличима.

Если было два скромных умных, они ответили: «Один», и ситуация не отличима от первой. Если бы было два уверенных умных, они ответили бы «Два», и ситуация была бы отличима. Наконец, если бы были один уверенный и один скромный умный, то уверенный ответил бы «Два», и ситуация также была бы отличима.

Таким образом, возможны три неразличимых варианта: нет умных, один уверенный умный и два скромных умных. Во всех этих случаях во всех анкетах ответ «Один».

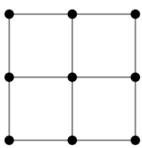
Посмотрим, какие ответы даст опоздавший думец в каждой из этих ситуаций в зависимости от его ума и скромности.

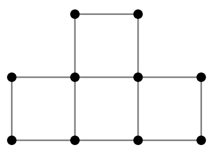
	дурак	уверенный умный	скромный умный
0 уверенных умных 0 скромных умных	1	1	0
1 уверенный умный 0 скромных умных	1	2	1
0 уверенных умных 2 скромных умных	1	3	2

Видно, что ответы 1 и 2 встречаются в нескольких клетках, то есть они не помогли бы различить ситуации.

Зато ответы 0 и 3 встречаются в таблице по одному разу и позволяют сделать однозначный вывод. Значит, опоздавший дал один из этих ответов. В первом случае в думе один умный, во втором — три. □

Задача 5.1.41. («Математический праздник» — 2007.7.6) Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрёстков которого зарыт клад. На каждом перекрёстке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрёстком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт (но Буратино не знает, лжёт оно или нет). Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид, как на рисунке ниже. (Перекрёстки отмечены точками.)

а) 

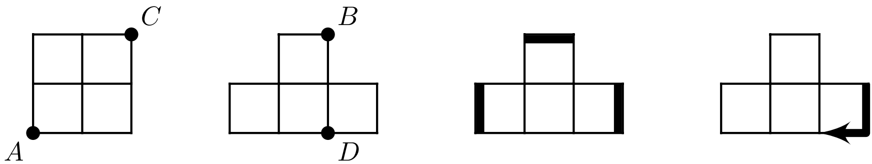
б) 

Решение. а) Всегда, когда Буратино приближается к перекрёстку A, он удаляется от перекрестка C (рисунок а)). Поэтому, Буратино не сможет различить следующие две ситуации:

1. Клад закопан на перекрестке A, и радио говорит правду.
2. Клад закопан на перекрестке C, и радио лжёт.

б) Заметим, что если Буратино знает, что радио говорит правду, то он сможет найти клад. Действительно, двигаясь по улице BD сверху вниз (рисунок б)), он найдёт горизонтальную улицу, на которой лежит клад. Затем, двигаясь по этой горизонтальной улице слева направо, он найдёт точное местоположение клада.

Если же Буратино знает, что радио лжёт, то он всё равно сможет найти клад (действуя тем же способом, но заменяя указания радио на противоположные).



а) б) в) г)

Теперь Буратино остаётся выяснить, лжёт ли радио.

Пусть вначале Буратино предположит, что радио говорит правду, и попытается найти клад. Действуя, как описано выше, он найдёт точку T, в которой может быть зарыт клад, либо (если сообщения радио будут противоречивы) поймёт, что радио лжет.

Аналогично, предположив, что радио лжёт, Буратино найдёт точку L, в которой предположительно лежит клад, либо сможет установить, что радио говорит правду.

Итак, проделав это, Буратино либо уже установил, говорит ли радио правду, либо нашёл две точки T и L, в одной из которых точно находится клад.

Рассмотрим на плане города три отрезка (рисунок в)). Хотя бы на одном из них не лежит ни T, ни L. Поэтому Буратино может встать в один из концов этого отрезка и совершить переход в соседнюю точку, не лежащую на этом отрезке (рисунок г)). При этом он приблизится как к T, так и к L.

Таким образом Буратино определит, лжёт ли радио, и узнает, где находится клад. □

Задача 5.1.42. («Математический праздник» — 1999.7.6) Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что два из этих квадратов имеют одинаковый размер.

Подсказка. Если два квадрата стоят в одной строке, то они одинаковы.

Решение. Если два квадрата из девяти находятся в одной горизонтальной строке, то они имеют одинаковую высоту, а будучи квадратами — и одинаковую ширину, так что в этом случае всё доказано. Точно так же можно рассуждать, если два квадрата окажутся в одном вертикальном столбце.

Осталось рассмотреть третий случай, когда все квадраты находятся в разных строках и столбцах. Тогда они попадают в девять столбцов из десяти и в девять строк из десяти, и остаётся одна свободная строка и один свободный столбец.

Докажем, что прямоугольник, стоящий на пересечении «свободной» строки и «свободного» столбца будет ещё одним, десятым квадратом. В самом деле, ширину свободного столбца можно найти, вычтя суммарную ширину девяти квадратов из ширины большого квадрата. Точно так же высота свободной строки равна разности высоты большого квадрата и суммы высот девяти квадратов, а высота любого квадрата равна его ширине. Но по условию десятого квадрата нет, так что третий случай невозможен. $\square$

2 Доказательство от противного

Задача 5.2.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.8) Можно ли 100 гирь массами

$$1, 2, 3, \dots, 99, 100$$

разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Решение. Предположим, что можно разложить гирьки в соответствии с условием задачи. Сумма масс всех гирек равна 5050. Значит, масса самой тяжёлой кучки не меньше $5050 : 10 = 505$. Так как в наборе нет гирек массы больше 100, то в этой кучке не меньше 6 гирек. Значит, общее количество гирек не меньше, чем

$$6 + 7 + 8 + \ldots + 15 = 105 > 100.$$

Противоречие. $\square$

Задача 5.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.8) На Всемирном конгрессе мудрецов звездочёты сидят в ряд напротив алхимиков за большим длинным столом, а во главе стола сидит Самый Почтенный Мудрец. В первый день конгресса оказалось, что напротив каждого алхимика сидит звездочёт с более длинной бородой, чем у него. На второй день алхимики договорились сесть за столом в порядке возрастания длины бороды от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Но и звездочёты договорились между собой сесть в порядке возрастания длиннобородости от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Докажите, что и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него.

Решение. Перенумеруем звездочётов и алхимиков (отдельно друг от друга) в порядке убывания длины бороды. Предположим, что алхимик с номером n более длиннобородый, чем сидящий напротив звездочёт.

Поскольку мудрецы сидят в порядке возрастания длины бороды, то все алхимики с номерами от 1 до n более длиннобородые, чем любой из звездочётов с номером, не меньшим n.

В первый день конгресса каждый из алхимиков сидел напротив более длиннобородого звездочёта. Значит, каждый из алхимиков с номером от 1 до n мог сидеть только напротив звездочёта с номером от 1 до $n-1$. Получается, что количество звездочётов, напротив которых могли сидеть в первый день первые n алхимиков, меньше n. Но это невозможно, значит, наше предположение неверно.

Следовательно, и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него. $\square$

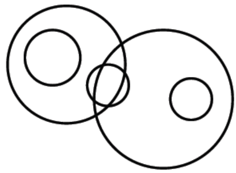
Задача 5.2.7. (Московская математическая олимпиада — 1977.10.4) Каждая точка числовой оси, координата которой — целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдётся цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k.

Решение. Пусть A и B — множества соответственно синих и красных точек. Предположим, утверждение задачи неверно.

Тогда найдётся такое натуральное число a, что A содержит лишь конечное число точек с координатами, кратными a. Также найдётся такое натуральное число b, что B содержит лишь конечное число точек с координатами, кратными b.

Но тогда $A \cup B$ содержит лишь конечное число точек с координатами, кратными ab. Противоречие, так как число таких точек бесконечно. $\square$

Задача 5.2.8. (Турнир им. Ломоносова — 2014.6.3) Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



Решение. Допустим, что лесник прав.

Первый способ. Посмотрим на левый и правый маленькие круги. В каждом из них лесник насчитал по три сосны. Значит, других сосен в больших кругах не должно быть. Но тогда в маленьком центральном круге не должно быть вообще ни одной сосны.

Второй способ. Судя по трём маленьким кругам, сосен не меньше 9. Но судя по большим кругам, сосен не больше шести. Противоречие. □

3 Принцип Дирихле

Задача 5.3.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.7.2) На кружок пришли четыре мальчика из 7А и четыре — из 7Б: три Лёши, три Вани и два Артёма. Могло ли оказаться так, что у каждого из них есть хотя бы один тёзка–одноклассник, пришедший на кружок?

Решение. Пусть это так. Тогда все Лёши учатся в одном классе (иначе для одного из них не найдётся тёзки из того же класса). Аналогично все Вани учатся в одном классе.

Так как из каждого класса на кружок пришло только четверо, то Лёши и Вани учатся в разных классах. Значит, один из Артёмов учится в 7А, а другой — в 7Б. Противоречие. □

Задача 5.3.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.7.3) Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку?

Решение. Так как среди каждых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, то детей — не более трёх. Никому из детей не может принадлежать более трёх носков (иначе нашлись бы пять носков, среди которых более трёх принадлежат одному хозяину).

Всего мама нашла девять носков, поэтому детей не может быть меньше трёх. А значит, в комнате живут трое детей, и каждому принадлежат ровно по три найденных носка. □

Задача 5.3.7. («Математический праздник» — 1994.6.7) Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся: а) 15; б) 16 одноклассников?

Решение. а) Разобьём всех школьников на группы одноклассников. Если среди школьников нет 15 одноклассников, то в каждой группе не более 14 школьников.

Пусть k — число групп, состоящих из двух и более школьников. Такие группы назовём большими. Из условия вытекает, что $k \leqslant 4$ (иначе, взяв по двое из пяти больших групп, мы получим 10 школьников, среди которых не будет трёх одноклассников). Рассмотрим два случая:

- $k \leqslant 3$. Тогда общее число школьников в больших группах не превышает $14 \cdot 3 = 42$. Следовательно, найдутся 18 школьников, которые не входят в большие группы, а значит, не имеют ни одного одноклассника! Противоречие.
- $k = 4$. Тогда общее число школьников в больших группах не превышает 56. Следовательно, найдутся 4 школьника, каждый из которых не имеет одноклассников. Взяв этих четверых и добавив к ним по два из всех четырёх больших групп, мы получим даже 12 школьников, среди которых не найдётся трёх одноклассников. Противоречие.

б) Не обязательно. Пример: по 15 школьников из четырёх классов. □

Задача 5.3.8. («Математический праздник» — 1994.7.6) В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

Подсказка. Посмотрите на самого «активного» школьника.

Решение. **Первый способ.** Всего было $20 \cdot 5 = 100$ посещений кружка. Если каждый школьник посетил кружок не более четырёх раз, то всего школьников было не менее чем $100 : 4 = 25$.

Пусть теперь хотя бы один школьник посетил кружок пять раз. Следовательно, на каждом из этих пяти занятий все остальные школьники разные. Их уже $5 \cdot 4 = 20$.

Второй способ. Из пяти школьников можно составить ровно 10 пар. Так как пары не повторялись, то всего кружок посетили $10 \cdot 20 = 200$ различных пар. Но из 19 школьников можно составить только $C_{19}^2 = 171$ различную пару. □

Задача 5.3.9. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 1988/1989.7.3) Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

Решение. По принципу Дирихле из семи чисел можно выбрать три, дающие одинаковые остатки при делении на 3. Их сумма делится на 3.

Замечание. Нетрудно понять, что даже из любых пяти натуральных чисел можно выбрать три, сумма которых делится на три. □

Задача 5.3.10. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2009.7.3) В классе 25 учеников. Известно, что у любых двух девочек класса количество друзей–мальчиков из этого класса не совпадает. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

Решение. Если в классе 13 девочек, то количество их друзей–мальчиков из этого класса может быть любым целым числом от 0 до 12 (13 различных вариантов), что соответствует условию.

Если же девочек будет больше 13 (хотя бы 14), то мальчиков в классе будет не больше 11, а значит, различных вариантов количества друзей–мальчиков будет не больше, чем 12 (от 0 до 11). Поэтому, хотя бы у двух девочек окажется одно и то же количество друзей–мальчиков, что противоречит условию. □

Задача 5.3.11. (Турнир им. Ломоносова — 2007.7.2) У Пети в кармане несколько монет. Если Петя наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдётся монета «1 рубль». Если Петя наугад вытащит 4 монеты из кармана, среди них обязательно найдётся монета «2 рубля». Петя вытащил из кармана 5 монет. Назовите эти монеты.

Решение. Раз среди любых трёх монет обязательно найдётся монета «1 рубль», значит монет другого достоинства не больше двух. То есть все Петины монеты, кроме возможно двух, — монеты «1 рубль».

Раз среди любых четырёх монет обязательно найдётся монета «2 рубля», значит монет, отличных от «2 рублей», не больше трёх. То есть все Петины монеты, кроме возможно трёх, — это монеты «2 рубля».

Следовательно, среди вытащенных 5 монет обязательно есть 3 монеты «1 рубль» (других монет может быть не больше двух) и 2 монеты «2 рубля» (других монет может быть не больше трёх). Но $2 + 3 = 5$, то есть, на самом деле, все монеты названы: три рублёвые и две двухрублёвые.

Заметим, что мы определили (в условии задачи этого не требовалось), сколько каких монет всего лежало в кармане у Пети: это как раз и есть 5 названных монет. Действительно, такой набор монет в кармане обязательно должен присутствовать (раз Петя этот набор вытащил). С другой стороны, добавление к этому набору любой другой монеты («1 рубль», «2 рубля» или ещё какой-нибудь) даёт возможность вытащить из кармана набор из 5 монет не такой, как было найдено (заменив «дополнительной» монетой одну из не совпадающих с ней монет «правильного» набора). Поэтому никаких других монет, кроме пяти названных, у Пети в кармане по условиям задачи быть не может. □

Задача 5.3.12. (Турнир им. Ломоносова — 1985.7.6) Дано 25 чисел. Сумма любых четырёх из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

Решение. **Первый способ.** Расположим числа в порядке возрастания:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{25}.$$

Так как сумма любых четырёх чисел положительна, то и сумма первых четырёх чисел положительна. Следовательно, четвёртое число положительно, но тогда и числа с большими номерами положительны. Добавляя их к сумме первой четвёрки, получим положительное число.

Второй способ. Обязательно есть хотя бы одно положительное число. Оставшиеся 24 числа можно разбить произвольным образом на четвёрки, сумма чисел которых по условию положительна. Значит, и сумма всех чисел положительна.

Замечание. Утверждение верно для любого количества чисел, большего 4. □

Задача 5.3.13. (Турнир им. Ломоносова — 1985.7.8) В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Решение. Рассмотрим двоих учеников класса, которые не дружат между собой. (Если таких нет, то все ученики класса дружат между собой, значит, у каждого ученика имеется 24 друга, и задача решена.)

Пусть этими двумя будут Вася и Петя. Тогда из оставшихся 23 учеников каждый дружит либо с Васей, либо с Петей. Действительно, если бы кто-то (скажем, Коля) не дружил бы ни с Васей, ни с Петей, то мы имели бы троих учеников, среди которых не было бы друзей.

Теперь если предположить, что и Вася, и Петя имеют не более 11 друзей, то всего в классе, кроме этих двоих было бы не больше 22 человек. Полученное противоречие показывает, что один из школьников имеет не менее 12 друзей. □

Задача 5.3.14. (Белорусская республиканская математическая олимпиада — 1966.8.5) Тридцать команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Подсказка. Не может быть одновременно команды, сыгравшей со всеми, и команды, не сыгравшей ни с кем.

Доказательство. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что к некоторому моменту времени все команды сыграли разное число матчей.

Количество матчей, сыгранных некоторой командой, может принимать одно из 30 значений: $0, 1, 2, \ldots, 29$. Все эти значения разные, поэтому, согласно предположению, все они должны встретиться. Но этого не может быть, потому что тогда есть команда, которая не сыграла ни одного матча, и есть команда, сыгравшая со всеми остальными командами. Предположение не верно. □

4 Математические игры

Задача 5.4.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.2) Аня и Катя играют в игру «Быки и коровы». Аня загадала четырёхзначное число с неповторяющимися цифрами, а Катя пытается это число угадать. Для этого она предлагает свои четырёхзначные числа (тоже с неповторяющимися цифрами), а Аня про каждое из них сообщает, сколько в нём «быков» (т. е. цифр, которые не только присутствуют и в Катином числе, и в Анином, но даже стоят на одних и тех же местах) и «коров» (цифр, которые присутствуют в обоих числах, но стоят на разных местах). Катя предложила числа $5860, 1674, 9432$ и 3017 и на каждое число получила ответ «2 коровы». Какое число загадала Аня?

Решение. В записи чисел 5860 и 9432 все цифры различны, поэтому среди цифр 5, 8, 6, 0 и 9, 4, 3, 2 есть все цифры искомого числа. Значит, цифр 1 и 7 в Анином числе нет.

Рассматривая числа 1674 и 3017, делаем вывод, что цифры Аниного числа равны 6, 4 и 3, 0.

Цифра 0 не может занимать вторую и четвёртую позицию, также 0 не может быть первой цифрой числа. Значит, 0 — третья цифра.

Цифра 4 не может занимать вторую и четвёртую позиции, третью позицию занимает цифра 0, поэтому цифра 4 стоит на первом месте.

Цифра 6 не может находиться на втором месте, первая и третья позиции заняты цифрами 0 и 4, значит, цифра 6 — последняя, а оставшаяся цифра 3 — вторая.

Таким образом, Аня загадала число 4306. □

Задача 5.4.4. (Турнир Архимеда — 2014.3) Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечётное количество лепестков, меньшее 16, причём запрещается повторять уже сделанные ходы. (*Например, если Катя при своём ходе сорвёт* 3 *лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать* 3 *лепестка не имеют права.*) Выигрывает тот, кто сорвёт последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?

Решение. По условию в игре есть ровно 8 разрешённых ходов: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Заметим, что $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$.

Поэтому, независимо от того, как сложится игра, она закончится тогда, когда будут сделаны по разу все 8 разрешенных ходов. Следовательно, выиграет Катя. □

Задача 5.4.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.4) Вася и Митя играют в «морской бой» на поле размером 8×8 по следующим правилам. Митя расставляет 16 одноклеточных кораблей так, чтобы они не соприкасались (даже углами). Каждым ходом Вася называет одну из клеток поля и, если на этой клетке стоит корабль, то корабль считается уничтоженным. Докажите, что независимо от расстановки кораблей Вася за 4 хода сможет уничтожить хотя бы один корабль.

Решение. Разрежем поле для игры на 16 квадратов размером 2×2. Заметим, что в каждом таком квадрате не может стоять более одного корабля (иначе корабли будут соприкасаться).

Так как всего кораблей 16, то в каждом квадрате должен стоять корабль. Таким образом, Васе достаточно полностью «расстрелять» один из этих квадратов. □

Задача 5.4.6. (*Симметричная стратегия*) Кто из игроков выигрывает при правильной игре в следующих ситуациях?

1. На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой — 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
2. На доске написано число 1. Двое по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает тот, кто первый запишет на доске число 30.
3. Двое по очереди ставят ладьи на шахматную доску на свободные от уже поставленных ладей клетки. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются битыми поставленными фигурами.

Подсказка. Сведите к возможности делать симметричные ходы.

Решение. В ситуации 1 выигрывает первый игрок. Первым ходом он делает стопки равными, по 20 монет, а затем как бы ни шёл второй игрок, у первого есть возможность из другой кучки взять столько же монет (есть возможность делать симметричные ходы).

В ситуации 2 выигрышная ситуация есть у первого игрока. Первым ходом он может дописать пять, т. е. записать сумму шесть. Какое бы число не дописал второй, у первого всегда есть возможность довести сумму до числа кратного шести, т. е. после ходов первого сумма будет равна 6, 12, 18, 24, а затем, сколько бы ни дописал второй, первый может взять всё оставшееся, так как останется не больше пяти и первым запишет 30.

В ситуации 3 второй игрок выиграет, если он будет ставить ладьи симметрично ладьям первого относительно центра доски. □

Задача 5.4.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.7) Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА.

Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву **А**. Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

Решение. Назовём кратностью буквы то количество раз, которое эта буква встречается в надписи. После хода Коли буквы **А** и **О** имеют кратность 3, буквы **Д**, **И**, **С** и **Я** — кратность 2, а буквы **Г**, **К**, **Л**, **М**, **Н**, **П**, **Р**, **Т** и **У** — кратность 1.

Для того, чтобы выиграть, Алисе надо сначала стереть любую букву кратности 1, чтобы количество букв каждой кратности стало чётным. Далее Алисе надо играть так, чтобы после каждого её хода количество букв каждой кратности было чётным. Для этого ей следует в ответ на каждый Колин ход стирать такое же количество букв той же кратности.

Например, если Коля сотрёт три буквы **А**, то Алиса должна стереть три буквы **О**, а если Коля сотрёт одну букву **Д**, то Алиса может стереть также одну букву **И**. Тогда на каждый ход Коли у Алисы будет ответный ход, поэтому именно она сделает последний ход и выиграет.

Замечания. Наглядно эту стратегию можно представить, например, так. Пусть Алиса мысленно упорядочит буквы по-другому:

АААДДИИКЛМНГПРТУССЯЯООО.

Тогда первым своим ходом она стирает букву **Г**, а далее делает ходы, симметричные ходам Коли относительно середины этого «слова». □

Задача 5.4.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.7) Два пирата, Билл и Джон, имея каждый по 74 золотые монеты, решили сыграть в такую игру: они по очереди будут выкладывать на стол монеты, за один ход — одну, две или три, а выиграет тот, кто положит на стол сотую по счёту монету. Начинает Билл. Кто может выиграть в такой игре, независимо от того, как будет действовать соперник?

Решение. Если бы пираты имели неограниченное количество монет, то выигрышная стратегия Джона была бы простой: на любой ход Билла ему достаточно дополнять количество монет, которое положил Билл, до четырёх. Действительно, в этом случае, количество монет после каждого хода Джона будет кратно четырём, а 100 делится на 4, поэтому сотую монету Джон смог бы положить своим двадцать пятым ходом.

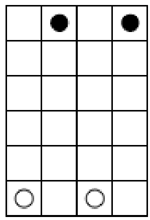
Но у пиратов по 74 монеты, поэтому, если Билл каждый раз будет класть по одной монете, то Джону придётся каждым ходом класть по три монеты, и на двадцать пятый ход Джону монет не хватит. Следовательно, чтобы сохранить такую выигрышную стратегию, Джон должен в какой-то момент положить одну или две монеты. Покажем, что это возможно.

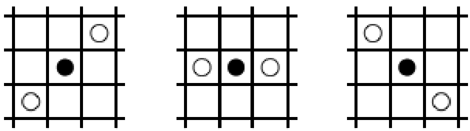
Если первым ходом Билл положит две или три монеты, то Джон сэкономит монеты уже на первом ходу и выиграет. Пусть Билл первым ходом положил одну монету. Тогда Джон в ответ также кладёт одну монету. Далее возможны три случая второго хода Билла.

1. Билл положит одну монету. Тогда Джон также положит одну монету. На столе будет четыре монеты, а дальше Джон сможет применять описанную выше стратегию — ему хватит монет для выигрыша.
2. Билл положит три монеты. Тогда Джон также положит три монеты. На столе будет 8 монет, а Джон уже один раз положил менее трёх монет, поэтому он сможет применить стратегию, описанную выше, и выиграть.
3. Билл положит две монеты. Тогда на столе окажутся четыре монеты. Джон положит одну монету. Билл не должен допустить, чтобы после хода Джона количество монет делилось на 4, поэтому должен положить три монеты. Каждым следующим ходом Джон будет класть одну монету, вынуждая Билла положить три. Но сотую монету Билл положить не сможет, так как для этого ему потребовалось бы 75 монет. Значит, сотую монету положит Джон.

□

Задача 5.4.9. («Математический праздник» — 1994.7.5) На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки (Вани) и две белые фишки (Серёжи, см. рисунок). Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на нижних рисунках), она считается «убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?





Подсказка. Проведите сначала среднюю фишку.

Решение. Будем двигать среднюю Ванину фишку вперёд, не обращая внимания на ходы Серёжи. Назовём номер горизонтали, на которой фишка стоит (считая снизу), её высотой. Если Ванина фишка окажется между Сережиными, то её высота h будет равна полусумме высот Серёжиных фишек.

Пусть это произошло после хода Серёжи. Значит, ребята сделали равное число ходов — по n, и сумма высот Серёжиных фишек равна $n+2$, а высота Ваниной равна $6 - n$. Получаем $n + 2 = 12 - 2n$, то есть $3n = 10$, что неверно, так как 10 не делится на 3.

Пусть Ванину фишку «зажали» после его хода. Значит, Ваня сделал на один ход больше: Серёжа сделал n ходов, а Ваня — $n + 1$. Тогда сумма высот Серёжиных фишек равна $n+2$, а высота Ваниной равна $6-n-1=5-n$. Получаем $n+2=10-2n$, или $3n=8$, что тоже неверно.

Следовательно, средняя фишка пройдёт на нижнюю горизонталь. Теперь двигаем крайнюю фишку, которую зажать вообще нельзя. Таким образом, Серёжа не сможет помешать Ване. $\square$

Задача 5.4.10. (Турнир Архимеда — 2013.6) Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4. Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Решение. Обозначим клетки доски буквами, как показано на рисунке. Стратегия Коли будет заключаться в следующем. После хода Васи (например, в клетку, обозначенную буквой A) Коля делает ход в клетку, обозначенную той же буквой.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

Коля выиграет, т. к. если он своим ходом закрасит какой-нибудь квадрат 2×2, то это будет означать, что Вася предыдущим ходом закрасил какой-нибудь квадрат 2×2. $\square$

Задача 5.4.11. («Математический праздник» — 2014.7.6) На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно либо:

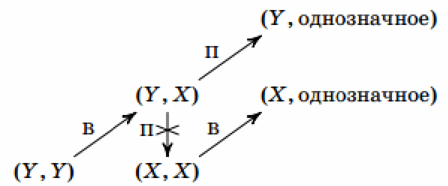
- уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;
- разделить одно из чисел пополам, если оно чётное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Решение. Пусть Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял).

$$\begin{tikzcd}
(2014, 2015) \arrow[d, "\text{п}"'] & (2014, A) \arrow[d, "\text{п}"'] & (A, B) \arrow[d, "\text{п}"'] & \dots \\
(2014, 2014) \arrow[ur, "\text{в}"] & (A, A) \arrow[ur, "\text{в}"] & (B, B) \arrow[ur, "\text{в}"] &
\end{tikzcd}$$

Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет. Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив в паре (X, X) одно из двух чисел X на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, число X на доске уже было. В этот момент Петя может заменить X на однозначное число и выиграть.



(Петя может так пойти, потому что у него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном ходе: делить число X пополам, если оно чётное, и вычитать из него его же цифру.)

Итак, сформулируем выигрышную стратегию Пети полностью: «если одно из чисел можно заменить на однозначное — сделать это; в противном случае уравнять два числа». $\square$

Задача 5.4.12. (Турнир Архимеда — 2015.6) Иван–Царевич и Кощей нашли кошелёк с 12 монетами номиналом $1, 2, 3, 4, \dots, 12$ тугриков. Они решили разделить найденные деньги по следующим правилам.

1. Кощей достаёт из кошелька две монеты (какие пожелает) и показывает их Ивану–Царевичу.
2. Иван решает, сколько и каких монет отдать Кощею (одну, две или ни одной). Все монеты, не доставшиеся Кощею, возвращают в кошелёк.

Если сумма в кошельке не кратна 3, то делёж заканчивается, и Иван забирает все монеты, которые остались в кошельке. Если сумма кратна 3, то процесс повторяется.

а) Может ли Иван действовать так, чтобы наверняка получить больше денег, чем Кощей?

б) На какую наибольшую сумму он может рассчитывать независимо от игры Кощея?

Решение. В кошельке 78 тугриков и это число кратно 3.

а) Если Кощей показывает Ивану монету, не кратную 3, то Иван отдает её Кощею, а другую монету возвращает в кошелёк. Сумма оставшихся монет будет не кратна 3, и все оставшиеся монеты забирает Иван (при этом он выигрывает).

Кощею требуется как можно дольше доставать только монеты, кратные 3, поэтому первые два хода Кощей показывает Ивану пары монет, кратных 3.

За эти два хода Ивану нужно три монеты отдать Кощею, а одну вернуть в кошелёк, чтобы на третьем ходу Кощей мог показать либо по одной монете, кратной трём, и одной, не кратной трём, либо две монеты, не кратные 3.

В худшем случае (для Ивана), Кощей получит монеты в 6, 9 и 12 тугриков и монету в 11 тугриков, итого: 38 тугриков. При этом Иван получит больше — не менее 40 тугриков.

б) Если среди первых двух монет хотя бы одна не кратна 3, то Иван отдает её Кощею и получает не менее $78 - 11 = 67$ тугриков Если среди первых двух монет обе кратны 3, то Иван Царевич отдаёт Кощею монету меньшего номинала. Например.

Если Кощей покажет $12 + 9$ тугриков, то получит 9 тугриков, а 12 тугриков Иван вернёт в кошелёк.

Если второй раз Кощей покажет $12 + 6$ тугриков, то получит 6 тугриков, а 12 тугриков Иван вернёт в кошелёк.

Если третий раз Кощей даст $12 + 3$ тугриков, то получит 3 тугрика, а 12 тугриков Иван вернёт в кошелёк. Таким образом у Ивана–Царевича сохраняется монета 12 тугриков.

В четвёртый раз Кощею выгодно дать $12+11$ (наибольшая монета, не кратная трём) тугриков, и получит 11 тугриков.

Итого 29 тугриков достанется Кощею. Ивану достанется 49 тугриков. □

Задача 5.4.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.6) Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Решение. Назовём расстановку чисел в клетках данной доски «антисимметричной», если клетки, симметричные относительно центральной клетки доски, либо обе пустые, либо в них стоят числа, сумма которых равна 8.

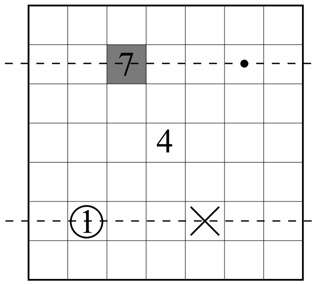
Петя должен играть так: первым ходом поставить число 4 в центральную клетку, а затем, после каждого хода Васи осуществлять «антисимметричную» расстановку чисел. То есть, если Вася поставил в какую-то клетку число n, то Петя должен поставить в симметричную клетку число $8 - n$. Играя так, Петя выиграет. Действительно, клетка, симметричная только что занятой, перед каждым ходом Пети будет пустой.

Докажем, что он сможет поставить в эту клетку указанное число. Предположим, что это не так, то есть Вася поставил в какую-то клетку A число n, а в одной из клеток B линии (строки или столбца), содержащей симметричную клетку A', уже стоит число $8 - n$.

Заметим, что B не совпадает с A. Действительно, если эти клетки совпадут, то $8 - n = n$, то есть $n = 4$. С другой стороны, симметричные клетки $A = B$ и A' лежат на одной линии $A'B = A'A$. На этой же линии лежит и центральная клетка доски O, следовательно, Вася не имел права поставить 4 в A.

Из «антисимметричности» следует, что в симметричной B клетке B' уже стоит n. Поскольку клетки A и B' лежат на линии, симметричной $A'B$, Вася не имел права поставить n в A. Противоречие.

Поясним эти рассуждения на конкретном примере, представленном на рисунке ниже. Кружком обведён очередной ход Васи (он поставил число 1). Петя хочет поставить 7 в клетку, отмеченную точкой. Предположим, он не может этого сделать из-за того, что в закрашенной клетке уже стоит 7. Тогда в клетке, отмеченной крестиком, уже стоит 1, то есть Вася не мог сделать предыдущий ход.



□

Задача 5.4.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.6) Людоедом называется фантастическая шахматная фигура, которая может ходить как шахматный король — на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, но не может ходить по диагонали. Два людоеда стоят на противоположных угловых полях шахматной доски и начинают ходить по очереди. Людоеду, вставшему на клетку, где уже стоит другой людоед, разрешается им пообедать. Кто кого съест при правильной игре и как ему надо для этого играть?

Решение. Разобьём клетки доски на диагонали, параллельные той, где изначально расположены людоеды. Всего таких диагоналей 15. Заметим, что каждым ходом людоед перемещается на соседнюю диагональ.

Укажем стратегию, позволяющую второму людоеду пообедать. Пусть для определённости он начинает игру из правого верхнего угла. Тогда он должен всегда ходить влево или вниз, и при этом вставать на ту же диагональ, на которую перед этим встал первый людоед.

При этом после любого парного хода людоеды окажутся в противоположных углах некоторого квадрата. Размеры этого квадрата будут либо уменьшаться (если первый людоед будет ходить вправо или вверх), либо не будут изменяться.

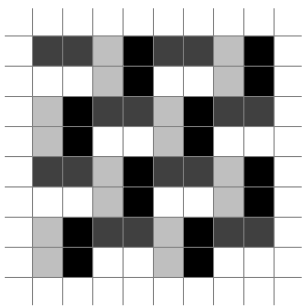
Но первый людоед не сможет постоянно ходить влево или вниз — сделав несколько таких ходов, он обязательно попадёт в положение, когда ему придется ходить вверх или вправо. Таким образом, размеры квадрата в ходе игры будут уменьшаться. Когда они уменьшатся до 2×2, первый людоед будет вынужден, чтобы его не съели, ходить влево или вниз, но эти ходы вскоре закончатся, и он проиграет.

Замечания. Посмотрим на расстояние между двумя людоедами — количество ходов, которые необходимо сделать, чтобы дойти от одного людоеда до другого. Изначально это расстояние равно 13. После каждого хода любого людоеда это расстояние либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, то есть меняет чётность.

Заметим, что людоед может пообедать данным ходом, если к этому моменту расстояние между людоедами стало равно 0. Так как перед любым ходом первого людоеда расстояние между людоедами нечётно, то первый людоед никогда не сможет пообедать вторым, даже если бы второй пытался поддаться. □

Задача 5.4.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.7.6) Двое играют в крестики–нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Побеждает тот, кто первым сумеет поставить пять одинаковых значков подряд (по горизонтали или вертикали). Докажите, что второй может играть так, чтобы не проиграть.

Решение. Замостим лист прямоугольниками размером 2×1 так, как показано на рисунке.



Заметим, что в любом горизонтальном или вертикальном прямоугольнике размером 5×1 обязательно содержится один из прямоугольников разбиения. Поэтому, второму достаточно ставить нолик в тот же прямоугольник 2×1, в который первый поставил крестик. Тогда пяти крестиков подряд не получится. □

Задача 5.4.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.7) Буратино выложил на стол 2016 спичек и предложил Арлекину и Пьеро сыграть в игру, беря по очереди спички со стола: Арлекин может своим ходом брать либо 5 спичек, либо 26, а Пьеро — либо 9, либо 23. Не дождавшись начала игры, Буратино ушёл, а когда он вернулся, партия уже закончилась. На столе осталось две спички, а проиграл тот, кто не смог сделать очередной ход. Хорошенько подумав, Буратино понял, кто ходил первым, и кто выиграл. Выясните это и вы!

Решение. Заметим, что при делении на 7 количество спичек, взятых Арлекином, даёт остаток 5, а количество спичек, взятых Пьеро, даёт остаток 2.

Число 2016 кратно 7, поэтому после каждого хода игрока, ходившего вторым, количество оставшихся спичек также будет кратно 7.

Так как на столе осталось две спички, то последним ходом было взято число спичек, дающее при делении на 7 остаток 5. Значит, последний ход сделал Арлекин и выиграл.

Все ходы, кроме последнего, разбиваются на пары, в которых общее количество взятых спичек кратно 7, поэтому первый ход также сделал Арлекин. □

Задача 5.4.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.7) Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы, произвольно чередуя **М** и **П**, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдаёт посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

Решение. Разделим 11 позиций, на которых будут стоять записанные Печкиным буквы на три части: первые пять, последние пять и центральная.

Матроскину нужно добиться, чтобы на центрально–симметричных позициях стояли одинаковые буквы (а какая буква стоит в центре — значения не имеет). Поэтому он действует так: пока Печкин ставит первые 6 букв, Матроскин ничего не меняет. Далее, после очередного хода Печкина, Матроскин смотрит, одинаковы ли только что поставленная буква и ей симметричная. Если эти буквы одинаковы, то Матроскин ничего не меняет, а если они различны, то он меняет местами одну из них и центральную так, чтобы симметричные буквы стали одинаковыми. Например, смотрите рисунок ниже.

П М П М М П М П ...

П М П М М М М П ...

Действуя таким образом, Матроскин добьётся того, чтобы на симметричных относительно центральной буквы позициях стояли одинаковые буквы, то есть итоговое слово будет читаться одинаково слева направо и справа налево. Следовательно, он получит посылку. □

5 Принцип крайнего

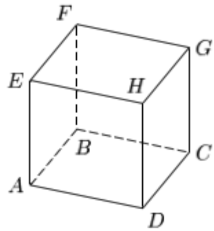
Задача 5.5.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.3) Давным–давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: **А**, **И**, **Н**, **Р**, **Т**, **Я**, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу.

Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось «Тарния». Какое слово следовало в словаре за именем Ятианр?

Решение. В первом слове буквы расположены в алфавитном порядке: **Т**, **А**, **Р**, **Н**, **И**, **Я**. Для удобства занумеруем буквы в алфавитном порядке: **Т** $= 1$, **А** $= 2$, **Р** $= 3$, **Н** $= 4$, **И** $= 5$, **Я** $= 6$.

Заменим каждое слово соответствующим шестизначным числом. Если слова расположены по алфавиту, то числа — в порядке возрастания. Слово Ятианр запишется числом 615243. За ним следует 615324, что соответствует слову «Ятиран». □

Задача 5.5.10. («Математический праздник» — 2000.7.5) В вершинах куба $ABCDEFGH$ расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу. (Пары диаметрально противоположных вершин куба: A и G, B и H, C и E, D и F.)



Подсказка. Возьмите вершину, в которой стоит наименьшее из этих чисел, и посмотрите на соседние вершины.

Решение. Обозначим числа, стоящие в вершинах A, B, C, D, E, F и H куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: a, b, c, d, e, f, g и h.

Возьмём одну из вершин, в которой стоит наименьшее число. Без ограничения общности это вершина A и в ней стоит число a (оно находится в вершине A). Тогда для значений чисел b, d и e, стоящих в соседних с A вершинах B, D и E, остаётся только две возможности a и $a+1$. Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны.

Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае искомыми будут диаметрально противоположные вершины E и C: $e = b$, а числа c и b отличаются не более чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более чем на 1. $\square$

Задача 5.5.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.7) Артём коллекционирует монеты. В его коллекции 27 монет, причём все они имеют различный диаметр, различную массу и были выпущены в разные годы. Каждая монета хранится в отдельном спичечном коробке. Может ли Артём сложить из этих коробков параллелепипед $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы любая монета была легче монеты, находящейся под ней, меньше монеты справа от неё и древнее той, которая находится перед ней?

Решение. Упорядочим монеты по массе. Девять самых лёгких монет расположим произвольным образом в верхнем слое, девять средних монет — в среднем слое, девять самых тяжёлых — в нижнем. Заметим, что любая монета легче монеты, находящейся под ней. Таким образом, нам осталось упорядочить монеты по двум параметрам в каждом слое.

Рассмотрим произвольный слой и девять находящихся там монет. Упорядочим их по размеру. После этого три самые маленькие монеты положим в левый ряд слоя (произвольным образом), три монеты среднего размера — в средний ряд, три самые большие монеты — в правый ряд. Поступим так с каждым слоем. Теперь любая монета меньше монеты, находящейся справа от неё и легче монеты, находящейся под ней.

Рассмотрим произвольный слой и произвольный ряд в этом слое. Упорядочим три находящиеся там монеты по возрасту и положим их так, чтобы самая новая находилась ближе всех к нам, а самая древняя — дальше всех. Поступим так с каждым рядом каждого слоя. Заметим, что теперь все монеты лежат так, как это требуется в условии. □

Задача 5.5.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.9) В классе 27 учеников. Каждый из них занимается не более чем в двух кружках, причём для любых двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.

Решение. Смотрите решение задачи 5.5.13. □

Задача 5.5.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.9) Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.

Решение. Если в некоторый кружок ходит весь класс, то всё в порядке. Далее мы считаем, что такого кружка нет. Пусть самый многочисленный кружок — математический; его участников мы будем называть математиками.

Есть ученик Вася, который в него не ходит. Рассмотрим его и одного из математиков. Они вместе ходят в другой кружок, допустим, в фото. Вася не может ходить в этот кружок вместе со всеми математиками, иначе математический кружок не будет самым многочисленным. Значит, с кем-то из математиков он ходит ещё в один кружок, например, в танцевальный.

Итак, каждый математик ещё является либо фотографом, либо танцором (и никем другим).

То, что было выше сказано про Васю, можно сказать и про любого ученика, который не является математиком: каждый из таких учеников — фотограф и танцор одновременно (и больше ни в какие кружки не ходит).

Таким образом, кружков всего три, и каждый ученик ходит ровно в два кружка. Пусть в классе n учеников, тогда на три кружка в общей сложности приходится $2n$ их участников. Поэтому в математический кружок (самый многочисленный) ходит не менее чем $2n/3$ учеников. □

Задача 5.5.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.7.9) Компьютеры №1, №2, №3, ..., №100 соединены в кольцо (первый со вторым, второй с третьим, ..., сотый с первым). Хакеры подготовили 100 вирусов, занумеровали их, и в различное время в произвольном порядке запускают каждый вирус на компьютер, имеющий тот же номер. Если вирус попадает на незаражённый компьютер, то он заражает его и переходит на следующий в цепи компьютер с бо́льшим номером до тех пор, пока не попадёт на уже заражённый компьютер (с компьютера №100 вирус переходит на компьютер №1). Тогда вирус погибает, а этот компьютер восстанавливается. Ни на один компьютер два вируса одновременно не попадают. Сколько компьютеров будет заражено после того как все 100 вирусов совершат атаку?

Решение. Докажем несколько утверждений.

1. На каждый компьютер вирусы попадают хотя бы дважды. Рассмотрим, например, компьютер №1. Если на него первым попал вирус с компьютера №100, то на него попадет ещё и вирус 1. Если же первым на компьютер №1 попал вирус 1, то вирус, попавший на компьютер №100 первым (возможно, это тот же вирус 1, обошедший весь круг), обязательно перейдёт на компьютер №1.
2. Все вирусы погибнут. Действительно, на каждый компьютер попадает хотя бы два вируса, при этом второй вирус по условию погибает. Значит, на каждом компьютере погибнет хотя бы один вирус. Но вирусов столько же, сколько компьютеров, значит, все вирусы погибнут.
3. Ни на один компьютер не могут попасть три вируса. Рассмотрим компьютер, на котором погиб последний из всех 100 вирусов (пусть это компьютер №1; если несколько последних погибли одновременно, рассмотрим любой из них). Тогда этот вирус попал на на него вторым (иначе на нём погибло бы больше одного вируса), и позже вирусы на него уже не попадали. Таким образом, на компьютер №1 попали ровно два вируса. Но тогда и на компьютер №2 попали ровно два вируса: один «свой» и один с компьютера №1. Тогда и на компьютер №3 попало ровно два вируса. И так далее.

Итак, на каждый компьютер вирусы попадают ровно два раза, а после этого компьютер восстанавливается. Таким образом, после гибели всех вирусов все компьютеры будут работать нормально! □

6 Полный перебор

Задача 5.6.8. («Математический праздник» — 2004.6.1) Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за

7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

Подсказка. По условию не обязательно двигаться вперёд!

Решение. После нескольких неудачных попыток удалиться на 1 м 70 см вперёд может показаться, что ответ — «нет». Заметим, что удалиться на 1 м 70 см не означает обязательно удалиться вперёд. Попробуем удалиться назад: $170 = 50 \cdot 5 - 80$.

Таким образом, кузнечик может удалиться от начальной точки на 1 м 70 см, сделав, например, 5 прыжков назад и 1 вперёд. □

Задача 5.6.9. («Математический праздник» — 2003.6.6) На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

Подсказка. Сумма чисел на всех гранях кубика равна 21.

Решение. Заметим, что сумма всех чисел, написанных на кубике, равна 21. Сумма чисел на верхней и нижней грани в первом и втором случаях равна 9 и 6 соответственно.

После первого броска понятно, что либо 3 напротив 6, либо 4 напротив 5.

Предположим, что 4 напротив 5. Но после второго броска ясно, что либо 1 напротив 5, либо 2 напротив 4. Противоречие, следовательно, 3 напротив 6. □

Задача 5.6.10. («Математический праздник» — 2002.6.6) Айрат выписал подряд все числа месяца:

$$123456789101112\ldots$$

и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

Подсказка. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из $9 + 2n$, т. е. из нечётного, числа цифр.

Решение. Всего выписано 47, 49, 51 или 53 числа. Допустим, число 1 не покрашено.

Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из нечётного числа цифр (9 и какое-то количество двузначных), а все остальные — из чётного числа цифр.

Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных участков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: покрашенных цифр в этом случае не более 5, непокрашенных — не более $8 \cdot 4 = 32$, итого — не более 37 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль невисокосного года) даёт 47 цифр.

В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено. □

Задача 5.6.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.7) По дороге на новогодний праздник несколько мальчиков помогали Деду Морозу нести подарки. Каждый из мальчиков нёс по три подарка, а остальные 142 подарка Дед Мороз вёз на санях. Все подарки Дед Мороз разделил поровну между всеми этими мальчиками и 14 девочками. Сколько могло быть мальчиков?

Решение. Пусть Дед Мороз сначала каждому ребёнку выдал по три подарка, а потом раздал остальные. Тогда после того, как дети получили по три подарка, у Деда Мороза осталось $142 - 3 \cdot 14 = 100$ подарков. Эти оставшиеся 100 подарков он разделил поровну между всеми детьми.

Так как детей больше 14, то выдать им по 10 или более дополнительных подарков он не мог. Значит, каждый из детей мог получить дополнительно по одному, по два, по четыре или по пять подарков (это все числа, меньшие 10, на которые нацело делится число 100).

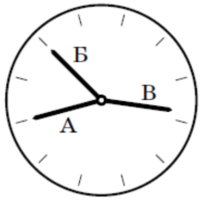
Если каждый получил по одному дополнительному подарку, то число мальчиков равно $100 - 14 = 86$. Если каждый получил по два дополнительных подарка, то число мальчиков равно $(100 - 2 \cdot 14) : 2 = 36$. В случае, если каждый получил по четыре дополнительных подарка, мальчиков $(100 - 4 \cdot 14) : 4 = 11$. Наконец, если по пять, то мальчиков $(100 - 5 \cdot 14) : 5 = 6$. □

Задача 5.6.12. (Турнир Архимеда — 2012.1) Петя обратил внимание, что дата проведения Турнира Архимеда, записанная восемью цифрами (22.01.2012) обладает интересной особенностью: переставив первые четыре цифры, можно получить номер года. А какие ещё даты в этом году имеют такое же свойство?

Решение. На месте цифр месяца могут стоять только 01, 02, 10, 12.

Если 01, тогда 22.01.2012. Если 02, тогда 12.02.2012 или 21.02.2012. Если 10, тогда 22.10.2012. Если 12, тогда 02.12.2012 или 20.12.2012. □

Задача 5.6.13. («Математический праздник» — 2013.7.4) Дима увидел в музее странные часы (на рисунке ниже).



Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы? (Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)

Решение. Если бы часовая стрелка смотрела ровно на часовую отметку, минутная и секундная стрелка смотрели бы ровно на отметку «12». Но на картинке нет совпадающих стрелок. Значит, часовая стрелка — стрелка В.

Оставшиеся две стрелки указывают ровно на часовые отметки, поэтому сейчас сколько-то часов и целое число минут — в частности, секундная стрелка указывает на 12.

Если секундная стрелка — стрелка А, то на часах немного меньше семи часов (судя по часовой стрелке), а с другой стороны — сейчас на 10 минут больше, чем сколько-то часов (судя по минутной). Так быть не может.

Если же секундная стрелка — стрелка Б, то на часах около пяти часов (судя по часовой стрелке), а судя по минутной стрелке — на 10 минут меньше, чем сколько-то часов. Значит, на часах без десяти пять, то есть 4 : 50. □

Задача 5.6.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.4) На площади репетировал военный оркестр. Для исполнения гимна музыканты выстроились квадратом, а для исполнения лирической песни — перестроились в прямоугольник. При этом количество шеренг увеличилось на пять. Сколько музыкантов в оркестре?

Решение. Пусть x музыкантов — в одном ряду квадрата, тогда $x \cdot x$ — всего музыкантов, которые выстроились в квадрат.

Пусть $(x-a)$ музыкантов — в одном ряду прямоугольника (ширина), $(x+5)$ — в другом ряду прямоугольника (длина). Тогда музыкантов, выстроившихся в прямоугольник: $(x-a) \cdot (x+5)$. Так как это одно и то же количество музыкантов, составим уравнение:

$$x \cdot x = (x-a)\cdot(x+5),$$
$$x\cdot(5-a) = 5a.$$

При $a = 1, 2, 3$ получим, что x не является целым, а количество музыкантов должно быть целым числом.

При $a = 4$ получим $x = 20$ музыкантов в одном ряду квадрата, тогда всего $20 \cdot 20 = 400$ музыкантов. □

Задача 5.6.15. («Математический праздник» — 2016.7.6) На конкурсе «А ну-ка, чудища!» стоят в ряд 15 драконов. У соседей число голов отличается на 1. Если у дракона больше голов, чем у обоих его соседей, его считают хитрым, если меньше, чем у обоих соседей, — сильным, остальных (в том числе стоящих с краю) считают обычными. В ряду есть ровно четыре хитрых дракона — с $4, 6, 7$ и 7 головами и ровно три сильных — с $3, 3$ и 6 головами. У первого и последнего драконов голов поровну.

а) Приведите пример того, как такое могло быть.
б) Докажите, что число голов у первого дракона во всех примерах одно и то же.

Решение. Удобно изображать ряд драконов в виде графика: вместо каждого дракона нарисуем точку на высоте, соответствующей числу голов дракона, и соединим эти точки.

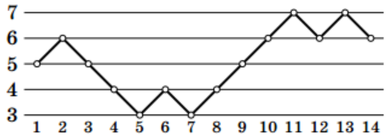
а) Пример, удовлетворяющий условию задачи, приведён на рисунке.

б) Заметим, во-первых, что где-то в промежутке между каждыми двумя хитрыми драконами стоит сильный. Действительно, если мы будем идти вдоль ряда драконов, то после того, как мы миновали хитрого дракона, количество голов начинает уменьшаться. В некоторый момент оно должно начать увеличиваться — это и есть позиция, где стоит сильный дракон. Аналогично, далее увеличение когда-то закончится на хитром драконе.

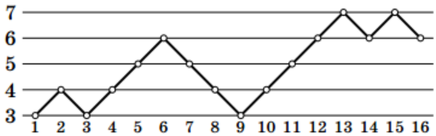
Первый способ. Посмотрим, в каком порядке могут стоять сильные и хитрые драконы. Сильный дракон с шестью головами может стоять только между двумя хитрыми драконами с семью головами. Возникают три случая: два оставшихся сильных дракона стоят либо по одну сторону от этой троицы в одном из двух порядков, либо по разные стороны.

В первом случае 14 драконов уже определены однозначно, и единственный способ добиться того, чтобы у первого и последнего дракона голов было поровну, — добавить справа с краю ещё одного дракона с пятью головами.

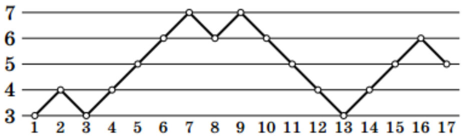
Второй и третий вариант невозможны, так как для них требуется более 15 драконов (даже без учёта условия одинакового количества голов у крайних драконов).



Случай ... 6 ... 3 4 3 ... 7 6 7 ...

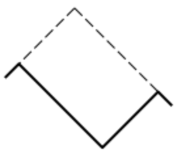


Случай ... 4 3 ... 6 ... 3 ... 7 6 7 ...



Случай ... 4 3 ... 7 6 7 ... 3 ... 6 ...

Второй способ (набросок). Можно обойтись и без перебора. Выберем участок графика между каким-нибудь сильным драконом и ближайшими к нему хитрыми драконами и «распрямим» его, заменив «впадину» на «горку» (на рисунке ниже).



Количество голов у драконов при этом изменится, и вместо двух хитрых драконов и одного сильного на этом участке теперь будет только один хитрый дракон. Заметим, что количество голов у нового хитрого дракона будет равно сумме количеств голов у исходных двух хитрых минус количество голов у бывшего сильного. Это означает, что при такой процедуре величина «сумма количеств голов всех хитрых минус сумма количеств голов всех сильных» не меняется.

Заметим также, что количество голов у крайних драконов в ряду от такой операции заведомо не поменялось. Повторим теперь эту операцию, пока все сильные драконы не исчезнут. У нас останется один хитрый дракон, который по соображениям симметрии будет ровно посередине ряда. Подсчитаем, сколько у него будет голов. Мы знаем, что изначально сумма количеств голов хитрых драконов минус сумма количеств голов сильных драконов равна

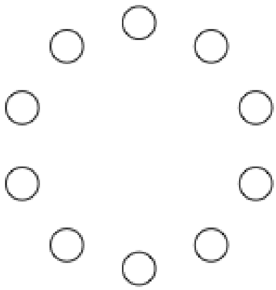
$$4 + 6 + 7 + 7 - 3 - 3 - 6 = 12.$$

Но теперь эта сумма равна просто количеству голов единственного хитрого дракона!

Зная, что у него 12 голов, мы далее без труда восстанавливаем, что у крайних драконов (отстоящих от него на семь позиций в ряду) по пять голов. □

7 Разбиения на пары и группы

Задача 5.7.7. («Математический праздник» — 1998.6.3) Расположите в кружочках (вершинах правильного десятиугольника) числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).



Решение. Числа можно расположить по кругу, например, в следующем порядке: 1, 4, 5, 8, 9, 2, 3, 6, 7, 10. □

Задача 5.7.8. (Турнир Архимеда — 2015.4) В один прекрасный день каждый из 2015 гномов обиделся на какого-то другого гнома (одного), и на каждого гнома обиделся какой-то другой гном (один). Белоснежке требуется распределить гномов на три группы так, чтобы в каждой из групп не было гномов, обиженных на кого-нибудь из данной группы. Всегда ли это возможно? Ответ обоснуйте.

Решение. **Первый способ.** Первых трёх гномов распределим по трём группам произвольно. Следующего (любого) поместим в группу, где нет гнома, связанного с ним отношением обиды. Такая группа есть (принцип Дирихле).

Со следующим можем поступить аналогично. И так далее, все гномы будут распределены по трём группам.

Второй способ. Возможны решения с представлением всех гномов в виде одной или нескольких замкнутых цепочек. Действительно, так как все гномы связаны обидой только с каким-то одним из остальных, то нет гнома, не связанного обидой с кем бы то ни было.

Можно представить каждого гнома в виде точки, в которую приходит один направленный отрезок от другой точки (от того, кто на него обиделся) и исходит направленный отрезок к другой точке (к тому гному, на кого обиделся данный гном).

При этом может существовать одна цепочка, либо несколько не связанных между собой цепочек, причём в каждой цепочке не менее двух гномов Если в цепочке больше двух гномов, то пронумеруем всех гномов, в первую группу включим одного гнома с наибольшим номером, из оставшихся во вторую группу включим гномов с нечётными номерами, в третью гномов с чётными номерами.

Поступим аналогично со всеми такими цепочками. Гномы из разных цепочек друг с другом не связаны. Для цепочек, состоящих из двух гномов, каждого гнома разместим в группы произвольно. Возможны и другие способы обоснования разбиения по группам. □

Задача 5.7.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.4) Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передаёт первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передаёт эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трёх карточек добавил зритель?

Решение. Разобьём натуральные числа от 1 до 24 на 12 пар. Фокусники могут заранее договориться, как именно это сделать. Например, $\{1, 24\}$, $\{2, 23\}$, $\{3, 22\}$, и так далее.

Среди тринадцати карточек, выбранных зрителем, найдутся две, на которых записаны числа из одной и той же пары. Именно их и должен вернуть зрителю первый фокусник. В этом случае зрителю придётся добавить к ним «непарную» карточку, которую сможет опознать второй фокусник. □

Задача 5.7.10. («Математический праздник» — 2009.7.4) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

Решение. Разделим сундуки на 11 групп по 7 сундуков в каждой. Общее количество монет в каждой группе сундуков должно делиться на 7, значит, на 7 делится и общее число монет во всех 77 сундуках.

Разделим сундуки на 7 групп по 11 сундуков. Теперь число монет в каждой группе делится на 11, значит, общее число монет делится на 11.

Итак, общее число монет делится на простые числа 7 и 11, а значит, делится и на их произведение 77. Следовательно, все монеты можно разложить поровну по 77 сундукам. □

Задача 5.7.11. («Математический праздник» — 2009.6.6) а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Ещё он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

б) А если сундуков было восемь, а Скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках?

Решение. а) **Первый способ.** Разделим сундуки на три пары. Общее количество монет в каждой паре сундуков чётно, поэтому чётно и число монет во всех шести сундуках.

Теперь разделим сундуки на две тройки. Число монет в каждой тройке кратно 3, поэтому кратно 3 и общее число монет во всех сундуках. Итак, это общее число монет делится на 2 и 3, а значит, и на 6. Следовательно, все монеты можно разложить поровну по шести сундукам.

Второй способ. Заметим, что число монет во всех сундуках имеет одинаковую чётность. Ведь поделить поровну содержимое двух сундуков с разной чётностью монет нельзя.

Общее количество монет в первых трёх сундуках кратно 3. Если заменить сундук 3 на сундук 4, то делимость на 3 не нарушится. Это означает, что число монет в четвёртом сундуке даёт тот же остаток при делении на 3, что и в третьем. Таким же образом про любые два сундука можно доказать, что число монет в одном даёт тот же остаток при делении на 3, что и в другом. Поэтому остатки от деления всех этих чисел на 3 одинаковы.

Если числа дают одинаковые остатки при делении как на 2, так и на 3, то их разность делится на 2 и на 3, то есть на 6. Это означает, что у любых двух (а значит, и у всех шести) чисел остатки при делении на 6 равны между собой. Сумма шести таких чисел будет кратна 6. Поэтому все монеты можно разложить поровну по всем сундукам.

б) Рассуждая так же, как в а), можно доказать, что все восемь чисел, соответствующие количествам монет в сундуках, дают одинаковые остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Значит, эти числа дают одинаковые остатки при делении на 420 (наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7). Но поскольку 420 не кратно 8, эти числа могут иметь различные остатки при делении на 8, что помешает поровну разложить монеты по восьми сундукам.

Например, в первом сундуке могла быть 421 монета, а в остальных семи — по одной. Тогда в двух сундуках в сумме либо 2, либо 422 монеты, оба числа чётные. В трёх сундуках в сумме либо 3, либо 423 монеты, каждое из этих чисел делится на 3 и т. д. В семи сундуках в сумме 7 или 427 монет. Оба числа делятся на 7. Однако общее число монет 428 на 8 не делится. То есть в этом случае на восемь сундуков разложить монеты поровну не получится.

С другой стороны, во всех сундуках изначально могло храниться, например, поровну монет. Поэтому точно ответить на вопрос, не зная, что лежит в сундуках, нельзя. □

8 Подсчёт двумя способами

Задача 5.8.6. (Кружок малого мехмата — 2015/2016.7ББ.3) Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка?

Решение. **Первый способ.** Пусть так расставить звёздочки удалось. Квадрат 10×10 можно разбить на 25 непересекающихся квадратов 2×2. Так как в каждом из них по две звёздочки, то всего звёздочек 50. С другой стороны, 99 клеток исходного квадрата можно разбить на 33 непересекающихся прямоугольника 3×1. В каждом из них по одной звёздочке, поэтому всего в квадрате не больше 34 звёздочек. Противоречие.

Второй способ. Докажем, что требуемым образом нельзя заполнить даже квадрат 3×3. Действительно, так как в каждом прямоугольнике 3×1 должна стоять только одна звёздочка, то в каждой строке и в каждом столбце квадрата 3×3 должно стоять только по одной звёздочке. Рассмотрим левый верхний квадрат 2×2. В нём должно быть две звёздочки. Но тогда в третьем столбце первой и второй строки не должно быть звёздочек, значит, в правом верхнем квадрате 2×2 будет стоять только одна звёздочка, а не две. □

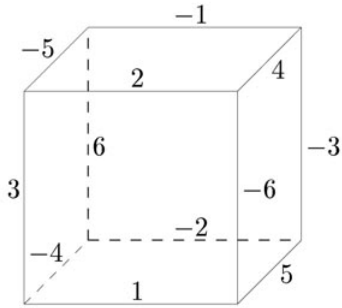
Задача 5.8.7. (Кружок малого мехмата — 2015/2016.7ББ.4) Аркаша вырезал много одинаковых квадратов и в вершинах каждого из них в произвольном порядке написал числа $1, 2, 3$ и 4. Затем Степан сложил квадраты в стопку и написал сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна а) 2015; б) 2016?

Решение. а) Может, если взять 403 пары квадратов с расположением чисел $(1, 2, 3, 4)$ и $(4, 3, 2, 1)$.

б) Не может, так как $2016 \cdot 4 = 8064$ не делится на $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. □

Задача 5.8.8. (Турнир им. Ломоносова — 1978.1) а) Можно ли занумеровать рёбра куба числами -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой? б) А можно ли так же занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12?

Решение. а) Пример искомой нумерации представлен на рисунке ниже.



б) Предположим, что это возможно, и сумма номеров рёбер, сходящихся в каждой из восьми вершин, равна x. Сложив эти суммы для всех вершин, получим $8x$.

С другой стороны, эта сумма равна удвоенной сумме номеров всех рёбер, так как номер каждого ребра входит в неё дважды. Вычислим эту сумму:

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 12) = 156.$$

Отсюда следует, что $8x = 156$, то есть x — не целое. Противоречие. □

Задача 5.8.9. (Кружок малого мехмата — 2015/2016.7ББ.6) Можно ли расставить по кругу семь целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх подряд расположенных — 2, …, каких-то трёх подряд расположенных — 7?

Подсказка. Если бы это было возможно, то в сумме $1 + 2 + \ldots + 7$ каждое из семи чисел, расставленных по кругу, встречалось бы три раза.

Решение. Предположим, что это возможно. Имеется всего семь различных сумм из трёх стоящих подряд чисел. Тогда среди этих семи сумм каждое из чисел 1, 2, …, 7 должно встретиться по разу.

Сложим все эти семь сумм. С одной стороны, результат равен $1+2+\ldots+7 = 28$, а с другой стороны, результат должен делиться на 3, так как каждое из чисел на окружности входит ровно в три тройки идущих подряд чисел. Но 28 не делится на 3. Противоречие. $\square$

Задача 5.8.10. (Кружок ВМШ 57 школы — 2005/2006.7.2) Ковровая дорожка покрывает лестницу из 9 ступенек. Длина и высота лестницы равны 2 метрам. Хватит ли этой ковровой дорожки, чтобы покрыть лестницу из 10 ступенек длиной и высотой 2 метра?

Подсказка. Длина горизонтальных участков дорожки равна 2 метрам, и длина вертикальных участков дорожки также равна 2 метрам.

Решение. Пусть дорожка покрывает лестницу с некоторым количеством ступенек, длина и высота которой равна 2 метрам. Мысленно спроектируем дорожку на горизонталь и вертикаль.

Суммарная длина горизонтальных участков дорожки равна длине лестницы, т. е. 2 метрам, а длина вертикальных участков дорожки равна высоте лестницы, т. е. также равна 2 метрам. Таким образом, для того, чтобы покрыть данную лестницу вне зависимости от числа её ступенек, дорожка должна иметь длину не меньше $2 + 2 = 4$ метров.

Следовательно, указанной в условии задачи дрожки хватит, чтобы покрыть лестницу из 10 ступенек длиной и высотой 2 метра. $\square$

Задача 5.8.11. (Кружок МЦНМО — 2005/2006.7.1) Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

Решение. Пусть в каждом квадратике 2×2 закрашено m клеток, а в каждой полоске 1×3 — n клеток.

Поскольку квадрат 6×6 разбивается на 9 квадратиков, то всего закрашено $9m$ клеток. Аналогично получаем, что всего закрашено $12n$ клеток.

Значит, $9m = 12n$, то есть $3m = 4n$. Но $0 < m \leqslant 4$, $0 < n \leqslant 3$, поэтому $m = 4$, $n = 3$, что и требовалось. □

Задача 5.8.12. («Математический праздник» — 1996.7.1) По кругу расставлены цифры $1, 2, 3, \ldots, 9$ в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

Подсказка. В наших числах каждая цифра появляется ровно по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц.

Решение. Трёхзначное число, у которого в разряде сотен — цифра a, в разряде десятков — цифра b, а в разряде единиц — цифра c, равно $100a + 10b + c$. Например, $394 = 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4$.

Просматривая по кругу наши девять трёхзначных чисел, замечаем, что каждая цифра встречается ровно по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц. То есть каждая цифра один раз войдёт в нашу сумму с коэффициентом 100, один раз — с коэффициентом 10 и один раз — с коэффициентом 1. Значит, искомая сумма не зависит от порядка, в котором записаны цифры, и равна:

$$(100 + 10 + 1) \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 111 \cdot 45 = 4995.$$

□

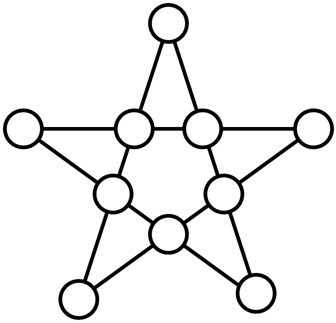
Задача 5.8.13. (Московская математическая олимпиада — 1992.8.3) Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме — во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

Решение. Пусть во второй день все участники в сумме решили N задач. Рассмотрим какого-нибудь участника, пусть он во второй день решил m задач.

Тогда во второй день все остальные в сумме решили $N - m$ задач. Следовательно, в первый день этот участник решил $N - m$ задач, а значит, всего он решил $m + (N - m) = N$ задач.

Итак, каждый участник решил всего задач столько же, сколько и все участники во второй день, то есть все участники решили поровну задач. □

Задача 5.8.14. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2008.7.1) Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (на рисунке ниже) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырёх чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?



Решение. Предположим, что числа удалось расставить требуемым образом. Пусть S — сумма чисел, стоящих на каждой прямой, тогда сумма чисел на всех пяти прямых равна $5S$.

Так как каждый кружок лежит на пересечении двух прямых, то при таком подсчёте число, записанное в каждом из кружочков, учтено дважды. Следовательно, найденная сумма равна удвоенной сумме всех расставленных чисел, то есть,

$$5S = 2 \cdot (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3).$$

Получим, что $5S = 38$, что невозможно, так как на каждой прямой стоят 4 целых числа, и их сумма должна быть целой. □

9 Оценка + пример

Задача 5.9.7. («Математический праздник» — 2008.6.2) Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

Решение. Все зайчата барабанить не могут, так как заведомо не будет барабанить зайчонок, которому достанется самый маленький барабан. С другой стороны, если дать этому же зайчонку и самые короткие палочки, то остальные шесть зайчат будут барабанить. □

Задача 5.9.8. («Математический праздник» — 1997.7.2) В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек; б) 8 человек?

Подсказка. б) Если каждый день «отдыхает» не более одного автомобиля, то всего автомобилей не более 7.

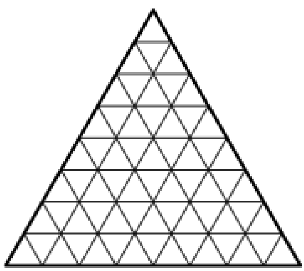
Решение. а) Пяти автомобилей не хватит, так как в день, когда один из автомобилей «отдыхает», кому-то не на чем будет ехать. Шести, очевидно, хватает.

б) Если каждый день «отдыхает» не более одного автомобиля, то всего автомобилей не больше, чем дней недели, то есть семи. Но этого, очевидно, недостаточно.

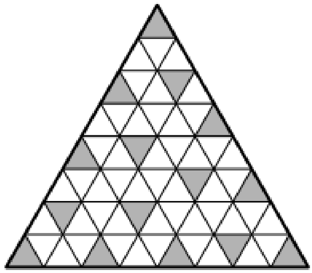
Значит, в какой-то день отдыхает два автомобиля, и в этот день нужно ещё как минимум 8 автомобилей. Итого 10.

Мы доказали, что меньше, чем десятью автомобилями обойтись нельзя. Десяти автомобилей достаточно: например, каждый рабочий день отдыхают по два автомобиля. □

Задача 5.9.9. («Математический праздник» — 2016.6.3) Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (на рисунке ниже). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?



Решение. Всего точек пересечения линий $1+2+3+\ldots+9=45$, а у треугольничка три вершины, так что по крайней мере $45:3=15$ треугольничков придётся закрасить.



Пример с 15 треугольничками показан на рисунке выше. □

Задача 5.9.10. («Математический праздник» — 1990.5.3) Сорок восемь кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

Подсказка. Сначала решите задачу для четырёх кузнецов и пяти лошадей.

Решение. Задача состоит из двух частей: доказать, что за 25 минут управиться можно, и доказать, что быстрее выполнить работу нельзя. Начнём со второй части.

Всего у 60 лошадей 240 копыт. Если бы всю работу делал один кузнец, то ему бы потребовалось $240 \cdot 5 = 1200$ минут. Значит, 48 кузнецов никак не смогут выполнить всю работу быстрее, чем за $1200 : 48 = 25$ минут.

Покажем теперь, как можно подковать всех лошадей за 25 минут. Разобьём кузнецов на 12 бригад по 4 кузнеца в каждой и выделим каждой бригаде по 5 лошадей. Каждая бригада сможет подковать «своих» лошадей за 25 минут следующим образом. Организуем конвейер, назначив каждого кузнеца «ответственным» за определённую ногу лошади.

Первые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу первой лошади, второй — переднюю левую второй лошади, третий — заднюю правую третьей, четвёртый — заднюю левую четвёртой, а пятая лошадь отдыхает.

Затем сдвигаем лошадей «по кругу». Вторые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу пятой лошади, второй — переднюю левую первой лошади, третий — заднюю правую второй, четвёртый — заднюю левую третьей, а четвёртая лошадь отдыхает.

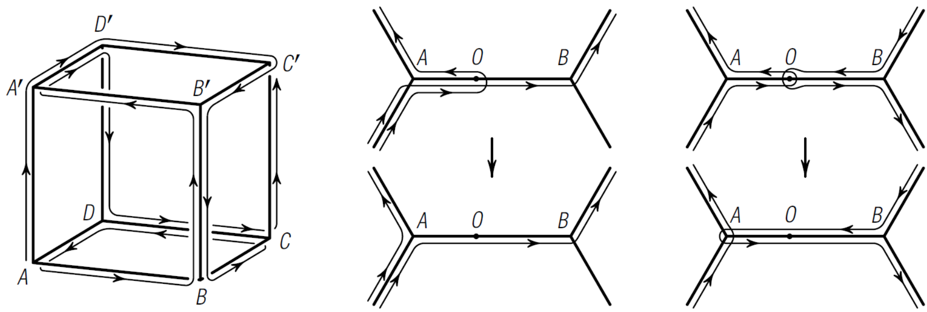
Третьи пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу четвёртой лошади, второй — переднюю левую пятой лошади, третий — заднюю правую первой, четвёртый — заднюю левую второй, а третья лошадь отдыхает.

Продолжив работу по этой схеме, каждая бригада подкуёт «своих» лошадей за 25 минут, а, значит, 48 кузнецов подкуют 60 лошадей за 25 минут. □

Задача 5.9.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.4) Каркас куба с рёбрами длины 1 намазан мёдом. В вершине куба находится жук. Какой минимальный путь он должен проползти, чтобы съесть весь мёд?

Решение. Рассмотрим некоторый путь жука. Покажем, что длина этого пути не меньше 15.

Рассмотрим ситуацию, когда жук разворачивается на ребре. Пусть жук начинает ползти от вершины A, ползёт по ребру AB до точки O, разворачивается и возвращается в вершину A. Очевидно, что жуку не выгодно разворачиваться на ребре AB несколько раз.



Выкинем кусок AOA из пути жука. Если оставшийся путь включает в себя отрезок AO, значит, выкинув этот кусок, мы только сократим путь, не уменьшая количество съеденного мёда. Если же оставшийся путь не включает в себя отрезок AO, значит, чтобы съесть мёд на отрезке OB, жук должен был проползти от вершины B к точке O (или даже дальше, но не до точки A), а потом вернуться обратно в B. Если мы заставим жука вместо BOB проползти BAB, а кусок AOA выкинем, длина пути жука не увеличится.

С помощью таких операций можно получить новый путь, который не длиннее исходного, но при этом все рёбра жук проползает целиком. Докажем, что этот новый путь (а, значит, и исходный) не короче 15.

Если жук приполз по ребру в какую-то вершину куба, и она не является конечной точкой его пути, он должен из этой вершины уползти. При этом, так как из вершины выходит три ребра, в каждую вершину, кроме начальной и конечной точек пути, он должен прийти как минимум дважды. Значит, минимум в шесть вершин жук по крайней мере дважды приполз и по крайней мере дважды из них уполз. Т. е. из каждой из этих вершин выходит по крайней мере одно ребро, пройденное дважды. Так как каждое ребро соединяет две вершины, всего таких рёбер не меньше трёх, а значит, общая длина пути не меньше, чем $12 + 3 = 15$.

Таким образом, длина минимального пути равна 15. Один из вариантов пути жука: $AA'D'C'B'BCDABB'A'D'DCC'$. □

Задача 5.9.12. («Математический праздник» — 2015.6.5) Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

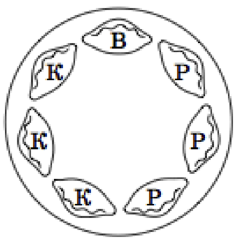
Решение. Отложим пока мандарины в сторону. Осталось

$$20 + 30 + 40 = 90$$

фруктов. Поскольку обезьяне мы скармливаем не более одного мандарина, каждая обезьяна съест из этих 90 фруктов по крайней мере два. Значит, обезьян не более чем $90 : 2 = 45$.

Покажем, как можно осчастливить 45 обезьян: 5 обезьян съедают грушу, банан, мандарин; 15 обезьян — грушу, персик, мандарин; 25 обезьян — персик, банан, мандарин. □

Задача 5.9.13. («Математический праздник» — 2014.6.5) Мама испекла пирожки — три с рисом, три с капустой и один с вишней — и выложила их на блюдо по кругу (на рисунке ниже). Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. На вид все пирожки одинаковые. Маша знает, как они лежали, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Маше наверняка добиться этого, надкусив как можно меньше невкусных пирожков?



Решение. Понятно, что за одно надкусывание Маша справиться с задачей не сможет. Если Маша, например, попробовала пирожок с капустой, то она не в состоянии определить, какой именно из трёх ей достался, а поэтому не сможет с уверенностью найти пирожок с вишней. Покажем, как Маша справится с задачей за два надкусывания.

Пусть Маша надкусила пирожок, а он оказался не с вишней, а с капустой. Тогда она может попробовать пирожок, лежащий через один от него по часовой стрелке. Если это пирожок с вишней, то Маша добилась своего, если с рисом, то искомый пирожок между надкусанными, а если снова с капустой, то надо брать следующий по часовой стрелке, и это точно будет пирожок с вишней.

Если первый пирожок будет с рисом, Маша может действовать аналогично, но двигаться против часовой стрелки.

Замечания. Подобным образом Маша может действовать и при большом числе «невкусных» пирожков. Пусть на блюде лежит N холодных пирожков с капустой, потом пирожок с вишней и снова N пирожков с рисом.

Маша может заметить средний пирожок с капустой (а если N чётно, то любой из двух средних) и запомнить, сколько пирожков от него надо отсчитать по часовой стрелке, чтобы взять пирожок с вишней.

Когда пирожки согреются, Маша пробует один пирожок. Пусть ей не повезло, и он оказался с капустой. Маша тогда может представить себе, что она попробовала тот самый средний пирожок, и отсчитать от него, сколько нужно.

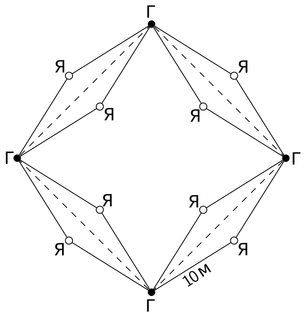
Если она и впрямь угадала, ей достанется вишня, если же нет, то она поймёт, оказалась ли она ближе к желанному пирожку, чем выбранный средний, или дальше от него. В любом случае неопределённость уменьшилась вдвое: после одной пробы у Маши «под подозрением» осталось не больше половины пирожков с капустой. □

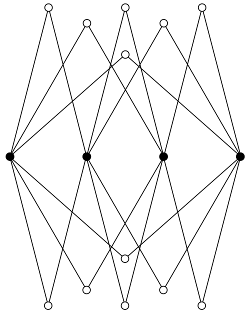
Задача 5.9.14. («Математический праздник» — 2006.6.5) Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растёт четыре груши, а ещё есть яблони, причём они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если Вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так.

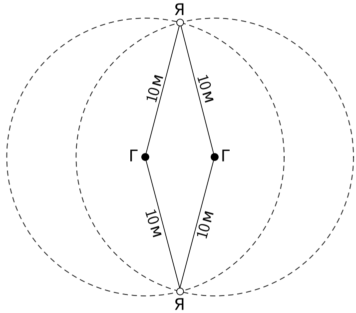
Решение. Возможны различные расстановки яблонь и груш, например, такая, как показана на рисунке слева.

Наибольшее число яблонь можно поместить, если груши растут достаточно густо. Например, если посадить груши в ряд через 5 м, то найдётся место для

12 яблонь (рисунок в центре).

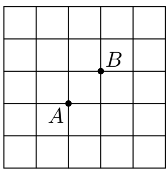




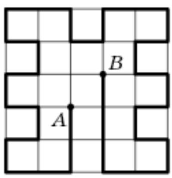


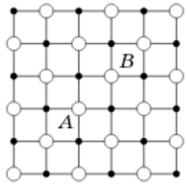
Докажем, что больше двенадцати яблонь быть не может. Рассмотрим две какие-то груши. На расстоянии 10 м от них может быть только две яблони — одна по одну сторону от линии груш, другая — по противоположную (рис. справа). Поэтому каждая пара груш «обслуживает» не более чем две яблони. Так как пар груш шесть, то максимальное число яблонь равно 12. □

Задача 5.9.15. («Математический праздник» — 2009.6.5) Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



Решение. **Пример.** Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке слева. Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрёстками).





Оценка. Всего в Старом городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда турист проходит очередную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше 35 улиц турист пройти не сможет (начальный перекрёсток A не считается).

Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) турист тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (рисунок справа). Всякий раз, проходя улицу, турист попадает на перекрёсток другого цвета. И отель, и вокзал расположены на белых перекрёстках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно. $\square$

Задача 5.9.16. («Математический праздник» — 2012.6.5) Замените в равенстве

$$\textbf{ПИРОГ} = \textbf{КУСОК} + \textbf{КУСОК} + \textbf{КУСОК} + \ldots + \textbf{КУСОК}$$

одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было бы наибольшим из возможных.

Решение. Пусть «кусков» 8 или 9. Тогда **ПИРОГ** $\leqslant 98765$, следовательно,

$$\textbf{КУСОК} \leqslant 98765 : 8 < 12346.$$

С другой стороны, **КУСОК** $\geqslant 12341$. Остаётся единственный случай **КУСОК** $= 12341$, а «кусков» 8. Но $12341 \cdot 8 = 98728$ — не подходит. Отсюда видно, что «кусков» не больше семи.

Один из возможных примеров для семи «кусков» нетрудно найти подбором. Покажем, как найти все возможные ответы.

Ясно, что $\mathbf{К} = 1$, тогда $\mathbf{Г} = 7$. Значит, $\mathbf{П} = 8$ или 9, а $\mathbf{О} = 0$ или 5.

Пусть $\mathbf{П} = 8$. Тогда

$$80234 \leqslant \textbf{ПИРОГ} \leqslant 86547,$$

значит, $11462 < 80234 : 7 \leqslant$ **КУСОК** $\leqslant 86547 : 7 < 12363$. Учитывая возможные значения букв,

$$12051 \leqslant \textbf{КУСОК} \leqslant 12351.$$

Итак, есть три варианта: 12051, 12301 и 12351. Из них подходят только первый и последний.

Пусть $\mathbf{П} = 9$. Аналогичные оценки показывают, что

$$13051 \leqslant \textbf{КУСОК} \leqslant 14051.$$

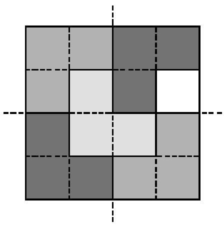
Имеются 11 вариантов: 13051, 13201, 13251, 13401, 13451, 13501, 13601, 13651, 13801, 13851, 14051. Из них подходят два: 13601 и 14051.

Таким образом, получаем 4 варианта: $84357 = 7 \cdot 12051$, $86457 = 7 \cdot 12351$, $95207 = 7 \cdot 13601$, $98357 = 7 \cdot 14051$. □

Задача 5.9.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.5) На клетчатой доске размером 4×4 Петя закрашивает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Петя, чтобы Вася не выиграл?

Решение. Так как 16 не делится на 3, то всю доску (16 клеток) нельзя покрыть не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток.

Покажем, что любые 15 покрашенных клеток можно покрыть такими уголками. Разобьём квадрат 4×4 на четыре квадрата размером 2×2, тогда единственная не покрашенная клетка попала в какой-то один из них. Любые три полностью покрашенных квадрата можно покрыть уголками из трёх клеток (рисунок ниже), а в четвёртом квадрате любые три покрашенные клетки всегда можно покрыть одним уголком.



Значит, Петя должен закрасить как минимум 16 клеток. □

Задача 5.9.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.6) Для игры в шляпу Надя хочет разрезать лист бумаги на 48 одинаковых прямоугольников. Какое наименьшее количество разрезов ей придётся сделать, если любые куски бумаги можно перекладывать, но нельзя сгибать, а Надя способна резать одновременно сколько угодно слоёв бумаги? (Каждый разрез — прямая линия от края до края куска.)

Решение. При каждом разрезе количество кусков бумаги может увеличиться не более чем в два раза. Значит, за пять разрезов можно получить не больше, чем 32 куска, а этого недостаточно.

Шести разрезов хватит. Например, можно разрезать лист пополам, совместить два прямоугольных куска и опять разрезать пополам (получится четыре равных прямоугольника). Продолжая совмещать полученные части и резать их пополам, получим 16 равных прямоугольников четырьмя разрезами. Затем всю стопку делим двумя разрезами на три равные части и получаем 48 равных прямоугольников. □

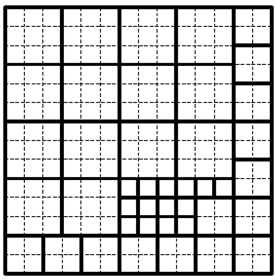
Задача 5.9.19. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.6) Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

Решение. **Оценка.** Пусть искомый квадрат составлен из n квадратов каждого вида. Тогда его площадь равна

$$n \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = 14n = 2 \cdot 7 \cdot n.$$

Так как длина стороны искомого квадрата должна быть целой, то полученное число должно являться точным квадратом. Значит, число n должно содержать множители 2 и 7, то есть $n \geqslant 14$.

Пример. Ниже представлен рисунок, на котором использовано по 14 квадратов каждого вида.



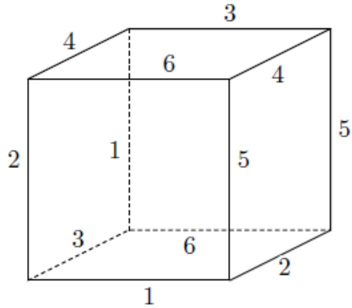
□

Задача 5.9.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.6) Найдите наибольшее число цветов, в которые можно покрасить рёбра куба (каждое ребро одним цветом) так, чтобы для каждой пары цветов нашлись два соседних ребра, покрашенные в эти цвета. (Соседними считаются рёбра, имеющие общую вершину.)

Решение. Есть несколько способов раскрасить рёбра куба в шесть цветов с соблюдением условия задачи. На рисунке приведён один из них.

Покажем, что больше шести цветов быть не может.

Предположим, что мы покрасили рёбра куба в семь или более цветов. Поскольку всего у куба 12 рёбер, то должен быть цвет, например, белый, в который покрашено только одно ребро. Для каждого ребра куба есть ровно четыре ребра, соседних с ним. Значит, с белым цветом в паре может быть не больше четырёх цветов, а значит, всего различных цветов не может быть больше пяти. Противоречие.



□

Задача 5.9.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.6) Выступая на арене с 10 львами и 15 тиграми, дрессировщик Паша потерял над ними контроль, и звери начали пожирать друг друга. Лев насытится, если съест трёх тигров, а тигр — если съест двух львов. Определите, какое наибольшее количество хищников могло насытится и как это могло произойти.

Решение. Поскольку на арене было 10 львов, насытиться могли не более чем $10 : 2 = 5$ тигров. Аналогично, могли наесться не более чем $15 : 3 = 5$ львов. Итого, не более 10 хищников. Но тогда все животные оказались бы съедены. Такого быть не могло: на арене должен был остаться тот, кто ел последним. Следовательно, количество насытившихся хищников не превосходит 9.

Покажем, как такое могло произойти. Сначала три тигра съедают шесть львов. Затем оставшиеся четыре льва съедают 12 тигров (включая трёх насытившихся). Итак, на арене остались четверо сытых львов и три голодных тигра. Два тигра съедают четырёх львов. Таким образом, насытились четыре льва и пять тигров, то есть девять хищников. □

Задача 5.9.22. («Математический праздник» — 2013.6.6) Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если жалованье между отрядами Черномор распределяет: а) как ему угодно; б) поровну?

Решение. С отряда в N богатырей Черномор получит в лучшем случае $N-1$ монету, так как остаток меньше делителя. Значит, всего он получит не более чем $33-K$ монет, где K — число отрядов. Но если отряд всего один, то, поскольку $240 = 33 \cdot 7 + 9$, Черномору достанется лишь 9 монет. Значит, 32 монеты Черномору получить не удастся.

а) Покажем, как получить 31 монету. Например, Черномор делит богатырей на два отряда: в первом — 32 богатыря, а во втором — всего один. Он может дать первому отряду 63 монеты (из которых получит 31), а остальные 177 монет отдать единственному богатырю из второго отряда.

б) Чтобы получить 31 монету, Черномор должен разделить богатырей на два отряда и выдать каждому отряду по 120 монет. При этом с отряда в N человек он должен получить $N-1$ монету. Это значит, что 121 должно делиться на N. Однако 121 делится только на 1, 11 и 121, а из двух таких чисел невозможно сложить 33. Поэтому 31 монету Черномору получить не удастся.

А вот получить 30 монет можно. Образуем, например, один отряд из 27 богатырей и два отряда по 3 богатыря. Каждый отряд получает по 80 монет, и, поскольку 81 делится на численность каждого отряда, «откат» составит $26+2+2=30$ монет. □

Задача 5.9.23. (Турнир Архимеда — 2012.5) В мешке лежат золотые монеты — дублоны, дукаты и пиастры, одинаковые на ощупь. Если из мешка вынуть 10 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дублон; если вынуть 9 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дукат; если же вынуть 8 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один пиастр. Какое наибольшее количество монет могло быть в мешке?

Решение. **Оценка.** В мешке не более 9 дукатов и пиастров (вместе взятых), иначе среди выбранных 10 монет могло не оказаться ни одного дублона.

В мешке не более 8 дублонов и пиастров (вместе взятых), иначе среди выбранных 9 монет могло не оказаться ни одного дуката.

В мешке не более 7 дублонов и дукатов (вместе взятых), иначе среди выбранных 8 монет могло не оказаться ни одного пиастра.

Итого не более 24 монет при условии, что мы каждую монету считали дважды. Следовательно, в мешке не более 12 золотых монет.

Пример. В мешке могло быть 3 дублона, 4 дуката, 5 пиастров.

Замечания. Можно решить задачу с помощью системы неравенств.

Отметим, что предположение, что попарная сумма монет строго равна 9, 8 и 7 соответственно, не является доказательством, что нет других вариантов решения задачи.

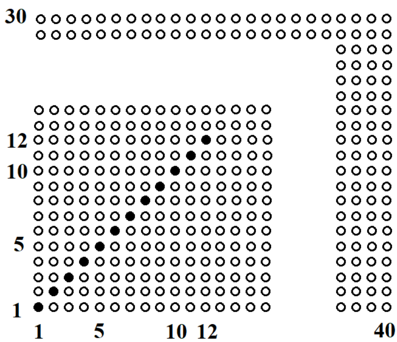
Отсутствие примера не доказывает, что максимальное число монет возможно в реальности. □

Задача 5.9.24. («Математический праздник» — 2003.7.5) В честь праздника 1% солдат в полку получил новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30% колонн и не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку?

Решение. **Оценка.** Пусть m — число колонн, а n — число шеренг. Тогда в полку mn солдат и $1/100mn$ солдат получили новое обмундирование. Согласно условию, не менее чем в $40/100n$ шеренг есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании, значит, $mn/100 \geqslant 40n/100$. Отсюда $m \geqslant 40$.

Аналогично $mn/100 \geqslant 30m/100$, откуда $n \geqslant 30$. Значит, в полку не менее чем $40 \cdot 30 = 1200$ солдат.

Пример. Построим 1200 солдат в виде прямоугольника 30×40 Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (рисунок ниже). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг.



□

Задача 5.9.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.7) В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни–Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни–Пух?

Решение. **Оценка.** Пусть Винни–Пух не сможет взять хотя бы килограмм мёда. Значит, в любой паре горшочков, стоящих рядом, меньше килограмма мёда. Это справедливо как для двух крайних горшочков справа, так и для двух крайних горшочков слева. Но тогда в среднем горшочке больше килограмма мёда (иначе всего мёда было бы меньше, чем 3 кг). Противоречие. Таким образом, Винни–Пух всегда сможет взять не меньше килограмма мёда.

Пример. Если в первом, третьем и пятом горшочке — по 1 кг мёда, а второй и четвёртый горшочки пустые, то больше килограмма мёда Винни–Пух съесть не сможет. □

Задача 5.9.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.7) Пятизначное число называется *неразложимым*, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Решение. Самое маленькое число, представимое в виде произведения двух трёхзначных чисел, это $100 \cdot 100 = 10000$. Следующее такое число:

$$100 \cdot 101 = 10100,$$

поэтому числа $10001, 10002, \ldots, 10099$ — неразложимые. Таким образом, указано 99 идущих подряд неразложимых пятизначных чисел.

Больше 99 неразложимых чисел идти подряд не может: каждое сотое пятизначное число оканчивается на два нуля, значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на 100. □

Задача 5.9.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.7) Каждое из 50 изделий нужно сначала покрасить, а потом упаковать. Время окраски — 10 минут, упаковки — 20 минут. После окраски деталь должна 5 минут сохнуть. Сколько необходимо нанять маляров и сколько упаковщиков, чтобы выполнить работу в кратчайшее время, если нельзя нанимать более 10 человек?

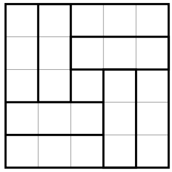
Решение. Необходимо нанять трёх маляров и шестерых упаковщиков. При этом работу можно выполнить за 195 минут (это легко показать).

Если маляров меньше трёх, то времени на окраску тратится не менее 250 минут; а если упаковщиков меньше шести, то времени на упаковку тратится не менее 200 минут. Нетрудно проверить, что если упаковщиков или маляров будет на одного больше, то выигрыша во времени мы не получим. □

Задача 5.9.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.8;7.8) В каждой клетке доски размером 5×5 стоит крестик или нолик, причём никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

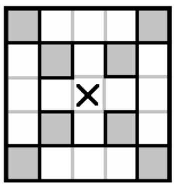
Решение. **Пример.** Расстановка 16 крестиков в соответствии с условием приведена на рисунке слева.

x	x	o	x	x
x	x	o	x	x
o	o	o	o	o
x	x	o	x	x
x	x	o	x	x



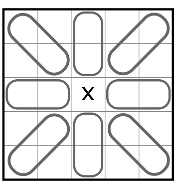
Оценка. Разобьём доску на центральную клетку и 8 прямоугольников размером 3×1 (рисунок справа). В каждом прямоугольнике должен стоять хотя бы один нолик. Следовательно, ноликов на доске не менее восьми. Если и в центральной клетке стоит нолик, то крестиков не больше, чем 16, и задача решена. Осталось рассмотреть случай, когда в центральной клетке стоит крестик.

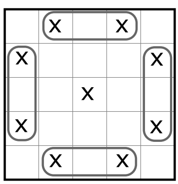
Первый способ. Рассмотрим все клетки больших диагоналей (рисунок ниже).

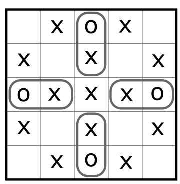


Каждая пара соседних закрашенных клеток вместе с центральной клеткой образует тройку, в которой должен стоять хотя бы один нолик. Значит, в восьми закрашенных клетках стоят хотя бы четыре нолика. Следовательно, в каждом из прямоугольников размером 3×1, расположенных на краю доски, должно стоять хотя бы по одному нолику. Итого, уже не меньше, чем 8 ноликов. Но если в остальных клетках стоят крестики, то три крестика «в ряд» образуют крестики, соседние с центральным по горизонтали и по вертикали, что противоречит условию. Значит, ноликов не меньше девяти.

Второй способ. Рассмотрим 8 пар клеток, выделенных на рисунке слева. В одной из клеток каждой пары должен стоять хотя бы один нолик, поэтому ноликов не меньше восьми.







Предположим, что в каждой выделенной паре клеток ровно один нолик и вне этих пар ноликов нет. Тогда в остальных клетках стоят крестики (рисунок в центре). Рассмотрим четыре тройки клеток, выделенные на этом рисунке. В каждой из них уже стоит по два крестика, значит, между ними стоят нолики. Снова рассмотрим четыре из восьми ранее выделенных пар клеток (рисунок справа). Мы уже выяснили, что в каждой паре ровно одна клетка с ноликом, значит, в другой клетке — крестик. Если поставить эти крестики, то в центре доски окажутся тройки крестиков, идущих подряд. Следовательно, и эта расстановка не удовлетворяет условию. □

Задача 5.9.29. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.9) В магазине продают коробки конфет. Среди них есть не менее пяти коробок разной цены (никакие две из них не стоят одинаково). Какие бы две коробки ни купил Вася, Петя всегда сможет также купить две коробки, потратив столько же денег. Какое наименьшее количество коробок конфет должно быть в продаже?

Решение. Пусть коробки конфет разложены в соответствии с их стоимостью: самые дешёвые лежат на нижней полке, следующие по цене — на второй полке и так далее до самых дорогих, лежащих на верхней полке.

Если Вася купил по одной коробке с двух нижних полок, то Петя вынужден купить такие же коробки, значит, на каждой из этих полок должно быть как минимум по две коробки. Если же Вася купил две коробки с нижней полки, то Петя должен будет купить такие же, то есть на нижней полке должно быть по крайней мере четыре коробки.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что на верхней полке должно быть не менее четырёх коробок, а на второй полке сверху — не менее двух. Так как полок не менее пяти, то в продаже должно быть не менее чем

$$4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$$

коробок.

Покажем, что такого количества коробок хватит. Пусть в магазине четыре коробки по 10 рублей за каждую, две коробки — по 20 рублей, одна — за 30, две — за 40 и четыре — за 50. Некоторые возможные покупки Васи и ответные покупки Пети соответствуют столбикам таблицы.

Вася	$10+30$	$20+20$	$20+30$	$30+40$	$40+40$	$30+50$
Петя	$20+20$	$10+30$	$10+40$	$20+50$	$30+50$	$40+40$

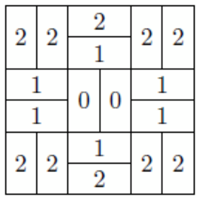
Если же Вася купил набор, не указанный в таблице, то Петя может купить точно такой же. □

Задача 5.9.30. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.9) План дворца шаха — это квадрат размером 6×6, разбитый на комнаты размером 1×1. В середине каждой стены между комнатами есть дверь. Шах сказал своему архитектору: «Сломай часть стен так, чтобы все комнаты стали размером 2×1, новых дверей не появилось, а путь между любыми двумя комнатами проходил не более, чем через N дверей». Какое наименьшее значение N должен назвать шах, чтобы приказ можно было выполнить?

Решение. Рассмотрим произвольный маршрут из левого нижнего угла дворца в правый верхний. Так как надо «подняться» на 5 горизонталей и «сместиться вправо» на 5 вертикалей, то придётся пройти, как минимум, через 10 дверей, посетив при этом не меньше, чем 11 комнат (включая начальную и конечную).

Одиннадцать комнат размером 1×1 не могли превратиться в 5 комнат размером 2×1. Следовательно, тот же маршрут в перестроенном дворце должен проходить, как минимум через 6 комнат, а значит, не менее чем через 5 дверей.

Такая перестройка дворца действительно возможна (рисунок ниже).



В этом случае действительно можно попасть из каждой комнаты в любую другую, пройдя не более чем через 5 дверей. Обозначим центральные комнаты цифрой 0, связанные с ними дверью — цифрой 1, а связанные дверью с комнатами «типа» 1 — цифрой 2. Поскольку оказались обозначены все комнаты, то из каждой комнаты можно попасть в одну из центральных, пройдя не более двух дверей. Значит, из каждой комнаты можно попасть в любую другую, построив маршрут через центральные комнаты и пройдя тем самым не более чем через 5 дверей (пятая дверь потребуется в случае, если придётся перейти из одной центральной комнаты в другую).

Замечания. Существуют и другие примеры. □

Задача 5.9.31. (Турнир Архимеда — 2014.6) Незнайка переставил цифры в некотором числе A и получил число B. Затем он вычислил разность $A - B$ и получил при этом число, записанное с помощью одних единиц (другие цифры не использовались). Какое наименьшее число могло у него получиться?

Решение. У чисел с одинаковой суммой цифр одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, разность двух чисел, получаемых друг из друга перестановкой цифр кратна 9. Значит, число $A - B$ содержит не менее девяти единиц. Пример: $987654320 - 876543209 = 111111111$. □

Задача 5.9.32. («Математический праздник» — 2005.7.6) На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.)

Решение. Пусть x — число людей, вышедших на митинг. Рассмотрим общее число «недовольств». С одной стороны, каждой реформой недовольны ровно 48 жителей, а значит, общее число недовольств равно $48 \cdot 5 = 240$. С другой стороны, каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами. Следовательно, общее число недовольств не меньше $3x$. Таким образом, $240 \geqslant 3x$, откуда $x \leqslant 80$.

Приведём пример, когда на площадь выйдет ровно 80 человек. Выберем среди жителей острова 80 человек и разобьём их на пять групп по 16 человек (оставшиеся 16 человек составляют правительство). Пусть против первой реформы возражают люди из первых трёх групп, против второй — люди из второй, третьей и четвёртой групп, против третьей — люди из третьей, четвёртой и пятой групп, против четвёртой — люди из четвёртой, пятой и первой групп, а против пятой — люди из пятой, первой и второй групп. Тогда против каждой реформы возражают ровно $3 \cdot 16 = 48$ человек, и на митинг выйдут выбранные 80 человек. □

Задача 5.9.33. («Математический праздник» — 2008.7.6) Вася постоял некоторое время на остановке. За это время проехал один автобус и два трамвая. Через некоторое время на эту же остановку пришёл Шпион. Пока он там сидел, проехало 10 автобусов. Какое минимальное число трамваев могло проехать за это время? И автобусы, и трамваи ходят с равными интервалами, причём автобусы ходят с интервалом 1 час.

Решение. Приведём сначала пример, когда за время наблюдений Шпиона проехало четыре трамвая: пусть автобусы ходят в 9:00, 10:00, …, а трамваи ходят с интервалом 1 час 58 минут — в 10:01, 11:59, 13:57, 15:55, 17:53, 19:51, 21:49, … Тогда Вася мог стоять с 10:01 до 11:59, а Шпион наблюдать с 12:00 до 21:00.

Оценка. Вася стоял на остановке менее двух часов (так как прошёл только один автобус). Значит, интервал движения трамвая меньше двух часов.

Шпион наблюдал не менее 9 часов. Значит, после появления первого трамвая прошло больше 7 часов, за которые проехали ещё не менее трёх трамваев. Следовательно, Шпион увидел по крайней мере четыре трамвая. □

Задача 5.9.34. («Математический праздник» — 2012.7.6) Победив Кощея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привёл его Кощей в пещеру и сказал:

«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».

Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кощей, если в сундуке исходно лежит а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать?

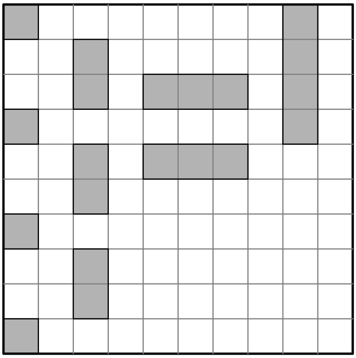
Решение. Иван будет действовать так, что каждый раз ход Кащея будет единственным: все остальные числа либо встречались на предыдущих ходах, либо слишком велики — у Ивана в этот момент нет такого количества слитков. Будем записывать ходы игры следующим образом: количество переложенных слитков (число слитков у Ивана после хода).

а) 2(2), 1(1), 3(4), 4(0), 6(6), 5(1), 7(8), 8(0), 10(10), 9(1), 11(12), 12(0), 13(13). Все возможные ходы сделаны, у Ивана все 13 слитков, значит, их он может забрать.

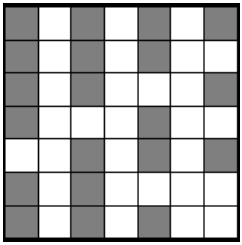
б) Будем действовать так же, как в предыдущем пункте. После хода «13(13)» не сделан только ход 14, но он невозможен, поэтому Иван может унести 13 слитков.

Докажем, что 14 слитков Иван унести не может. Допустим, в какой-то момент в сумке оказалось 14 слитков. Значит, в сундуке слитков нет, то есть последним ходил Иван. Но тогда всего сделано нечётное число ходов, и поэтому какое-то из чисел от 1 до 14 не встретилось. Кощей может сделать ход с этим числом, значит, уносить слитки пока нельзя. □

Задача 5.9.35. («Математический праздник» — 2010.7.6) Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10 (на рисунке). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.)



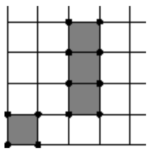
Решение. Пример расстановки кораблей на доске 7×7 изображен на рисунке ниже. Остаётся доказать, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.



Первый способ. Будем считать не клетки, а узлы доски, занимаемые кораблями. Корабль 1×4 занимает $2\cdot 5=10$ узлов, корабль 1×3 занимает 8 узлов, корабль 1×2 — 6 узлов, корабль 1×1 — 4 узла; причём по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают

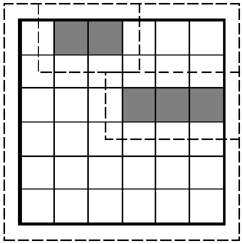
$$10+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 4=60$$

узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске 6×6 имеется лишь $(6+1)^2=49<60$ узлов.

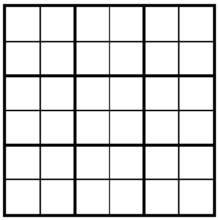


Ту же идею можно оформить иначе. А именно, заключим каждый корабль в прямоугольник, увеличив его на полклетки в каждую сторону. Такие прямоугольники не могут пересекаться и занимают всего $10+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 4=60$

клеток. А если бы все корабли можно было разместить на доске 6×6, то все соответствующие прямоугольники располагались бы на доске 7×7, на которой имеется лишь $49 < 60$ клеток. (Отметим, что каждая клетка этой новой доски содержит ровно один узел старой — поэтому вычисление и получается точно таким же, как в доказательстве выше.)



Второй способ. Разрежем доску 6×6 на 9 квадратов 2×2. Каждый такой квадрат при расстановке по правилам может содержать клетки только одного корабля. Но всего кораблей 10, поэтому их на такой доске разместить нельзя. (Отметим, что это рассуждение доказывает, что на доску 6×6 все 10 кораблей нельзя было бы поставить, даже если все они имели бы размеры 1×1.)



□

Задача 5.9.36. («Математический праздник» — 2013.7.6) Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре: «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио. Когда все клетки заполнены, Базилио берёт себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берёт лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса?

Решение. Две купюры Базилио всегда может получить: он знает место, куда должна быть вписана самая последняя цифра, и называет её так, чтобы она отличалась от цифры на таком же месте у какой-нибудь другой купюры. Тогда у этих двух купюр номера будут разные, и кот сможет их взять.

Покажем, как Алиса может добиться, чтобы разных номеров было не больше двух. Она располагает купюры одну над другой, чтобы клетки для цифр образовали таблицу.

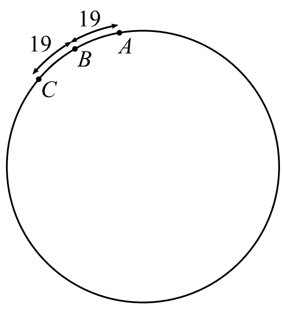
$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & \Box & 2 & 2 & 2 \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
1 & 1 & 1 & \Box & 2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2
\end{array}
$$

Когда кот называет единицу, Алиса вписывает её в самый левый столбец, где есть свободная клетка (в любую из клеток), а когда кот называет двойку — в самый правый.

Если в какой-то столбец начали попадать и единицы, и двойки, то все остальные столбцы уже заполнены: слева — единицами, справа — двойками. Значит, будет максимум один столбец, куда попадут и единицы, и двойки. Поэтому если номера и отличаются, то только цифрой в этом столбце. Но так как цифр только две, то и разных номеров не больше двух. □

Задача 5.9.37. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.9) На окружности отмечены 2014 точек. В одной из них сидит кузнечик, который делает прыжки по часовой стрелке либо на 57 делений, либо на 10. Известно, что он посетил все отмеченные точки, сделав наименьшее количество прыжков длины 10. Какое?

Решение. Поймём, в какие точки кузнечик сможет попасть, если будет двигаться только прыжками длины 57. Пусть изначально он находится в некоторой точке A и прыгает по часовой стрелке.



Поскольку $2014 = 35 \cdot 57 + 19$, то последней точкой, в которую он попадёт перед тем, как перепрыгнуть через A, будет точка B, отстоящая от A на 19 делений (рисунок).

Теперь мы можем считать, что кузнечик прыгает по часовой стрелке (прыжками длины 57), начиная с точки B, то есть последняя точка, в которую он попадёт перед тем, как перепрыгнуть через B, будет точка C, отстоящая от B на 19 делений. Рассуждая аналогично, получим, что кузнечик будет попадать во все точки, отстоящие от A на количество делений, кратное 19 (число 57 также делится на 19, поэтому в часть точек он попадёт раньше). Поскольку 2014 делится на 19, то в какой-то момент он попадёт в точку A, после чего процесс зациклится.

Итак, двигаясь только прыжками длины 57, кузнечик сможет попасть в те и только в те точки, которые отстоят от стартовой на число делений, кратное 19.

Пронумеруем все точки числами от 1 до 2014 по часовой стрелке. Тогда, если номер стартовой точки даёт остаток d от деления на 19, то прыжками длины 57 кузнечик сможет побывать во всех точках с номерами, дающими тот же остаток d (и только в них).

Чтобы попасть в точки с номерами, дающими иной остаток, надо сделать прыжок длины 10. Так как существует ровно 19 остатков от деления на 19, то необходимо сделать не менее восемнадцати прыжков длины 10.

Покажем, что восемнадцати прыжков длины 10 хватит. Обозначим через (N) группу чисел от 1 до 2014, дающих при делении на 19 остаток N. Кузнечик может обходить группы, перескакивая с одной на другую прыжками длины 10 следующим образом:

$$(0) \to (10) \to (1) \to (11) \to (2) \to (12) \to (3) \to (13) \to (4) \to (14) \to (5) \to$$
$$\to (15) \to (6) \to (16) \to (7) \to (17) \to (8) \to (18) \to (9).$$

Замечания. Пусть на окружности отмечены x точек, а кузнечик прыгает прыжками длины y. Тогда он сможет побывать в тех и только в тех точках, которые отстоят от стартовой на число, кратное $d = \text{НОД}(x, y)$. Доказать это можно следующим образом.

Обозначим стартовую точку через A. Кроме того, окрасим все точки, которые отстоят от A на число, кратное d. Таких точек будет $x : d = u$.

Пусть кузнечик попал в клетку A вторично, сделав по пути из A в A ровно k прыжков. Тогда он преодолел путь yk, который кратен x. Значит, k делится на u. Ясно, что за это «время» кузнечик не мог дважды «посетить» одну точку. Следовательно, $k = u$, а кузнечик по пути из A в A побывал во всех окрашенных точках, отличных от A, по одному разу. $\square$

Глава 6

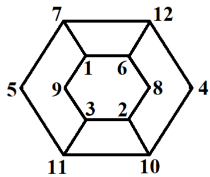
Шахматные доски и фигуры

2 Обойдите ходом шахматного коня...

Задача 6.2.3. (Ленинградские математические кружки — 6.003) Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

Решение. Занумеруем поля доски (рисунок слева) и нарисуем граф (рисунок в центре), где вершины соответствуют полям, а ребро проводится, если соответствующие поля отстоят на ход коня. На графе легко построить требуемый обход (жирная линия). На рисунке справа поля занумерованы уже в порядке обхода.

	1	**2**	
3	**4**	**5**	**6**
7	**8**	**9**	**10**
	11	**12**	



	1	**4**	
3	**8**	**11**	**6**
12	**5**	**2**	**9**
	10	**7**	

Замечания. Приведённый маршрут обхода, конечно, не единственный. □

Задача 6.2.4. (Ленинградские математические кружки — 2.003) Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Подсказка. Обратите внимание, что шахматный конь ходит с белой клетки на чёрную, а с чёрной — на белую.

Решение. Чтобы обойти все клетки шахматной доски, надо сделать 63 хода. Клетка $a1$ — чёрная. Поэтому после каждого нечётного хода (в том числе после 63-го) конь находится на белой клетке. А клетка $h8$ — чёрная. Значит, указанным образом конь пройти не может. □

Задача 6.2.5. (Московская математическая олимпиада — 1959.8.5) Доказать, что шахматную доску размером 4×4 нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

Решение. Заметим, что в диаметрально противоположные угловые клетки ходом коня можно попасть только из двух клеток. Поэтому, если обход и существует, то начальной и конечной клеткой такого обхода должны быть соседние по стороне угловые клетки, причём третьими с начала и с конца пути должны быть оставшиеся угловые клетки, диаметрально противоположные началу и концу соответственно.

Теперь заметим, что, начав из любой клетки внутреннего квадратика 2×2, нельзя оказаться в соседней с ней клетке того же квадратика, побывав во всех клетках доски, кроме угловых и клеток внутреннего квадратика. А значит, искомого обхода не существует. □

3 Оценка + пример на шахматной доске

Задача 6.3.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.5) Какое наибольшее количество ладей может стоять на шахматной доске, если половина из них белые, половина — чёрные, и при этом никакая белая ладья не бьёт никакую чёрную?

Решение. Можно расставить 16 белых ладей в первые четыре вертикали и нижние четыре горизонтали, а 16 чёрных — в последние четыре вертикали и верхние четыре горизонтали.

Оценка доказывается, например, так: посчитаем число горизонталей и вертикалей, которые занимают белые ладьи. Если их (в сумме) не больше 8, то ладей не больше 16 (1×7, 2×6, 3×5, 4×4). А если больше, то чёрные ладьи занимают меньше горизонталей и вертикалей. □

Задача 6.3.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.9) Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — мини–слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини–слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини–слон?

Решение. Приведём вначале пример маршрута мини–слона, который обеспечит посещение им двенадцати клеток (на рисунке числа от 1 до 12 показывают порядок обхода клеток).

Докажем, что все чёрные клетки мини–слон обойти не сможет. Рассмотрим четыре угловые клетки. Выйти из такой клетки мини–слон может либо в соседнюю клетку, либо в центральную. В соседнюю клетку из угловой он может пойти только первым ходом.

1		4		6
	2		5	
3		7		9
	11		8	
12		10		

Действительно, попасть в угловую клетку можно либо из соседней, либо из центральной, перепрыгнув через уже пройденную соседнюю. В обоих случаях, снова пойти в соседнюю клетку мини–слон не сможет. В центральную клетку из угловой мини–слон может пойти также не более одного раза. Таким образом, мини–слон покинет угловые клетки не более двух раз, значит, он посетит не более трёх угловых клеток. □

Задача 6.3.6. (Кружок ВМШ 57 школы — 2002.7.2) а) Какое максимальное количество слонов можно расставить на доске 1000×1000 так, чтобы они не били друг друга? б) Какое максимальное количество коней можно расставить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

Решение. а) Поскольку на одной диагонали не может стоять больше одного слона, а всего диагоналей, идущих снизу слева направо вверх, ровно 1999, причём на двух крайних (состоящих из одной клетки) может стоять не больше одного слона (они расположены на одной перпендикулярной диагонали), то на доску нельзя поставить больше 1998 не бьющих друг друга слонов.

Это число достигается: например, можно поставить 1000 слонов на верхний ряд доски и 998 слонов — на нижний ряд, кроме угловых клеток.

б) На все белые клетки можно поставить 32 коня. Разобьём доску на 8 прямоугольников 4×2, а каждый из них — на четыре пары клеток, соединённых ходом коня. Всего получилось 32 пары, и в каждой из них может стоять не более одного коня. □

Задача 6.3.7. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 2007.9.3) Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматную доску 8×8, чтобы все белые клетки были под боем этих ладей? (Под боем ладьи считаются все клетки строки и столбца, в которых находится ладья.)

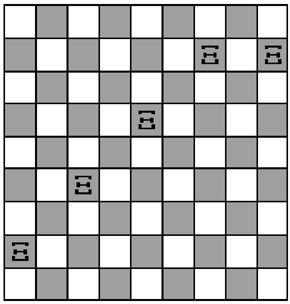
Решение. Достаточно поставить четыре ладьи на поля $a1$, $c3$, $e5$ и $g7$.

Находясь на белой клетке, ладья бьёт 7 белых клеток, а находясь на чёрной клетке, — 8. Поэтому трёх ладей недостаточно.

Замечания. Занумеруем вертикали (как и горизонтали) слева направо цифрами от 1 до 8. У белых клеток ровно одна из «координат» нечётна. Ладьи на клетках $(1,1)$, $(3,3)$, $(5,5)$, $(7,7)$ бьют все такие клетки. □

Задача 6.3.8. (Турнир. Весенний тур. Тренировочный вариант — 2007.9.1) Клетки доски 9×9 раскрасили в шахматном порядке в чёрный и белый цвета (угловые клетки белые). Какое наименьшее число ладей нужно поставить на эту доску, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей? (Под боем ладьи считаются все клетки строки и столбца, в которых находится ладья.)

Решение. Достаточно поставить пять ладей на поля, указанные на рисунке.

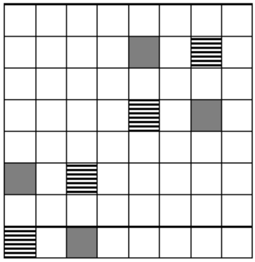


Находясь на белой клетке, ладья бьёт 7 или 9 белых клеток, а находясь на чёрной клетке — 9. Всего белых клеток 41, поэтому четырёх ладей недостаточно.

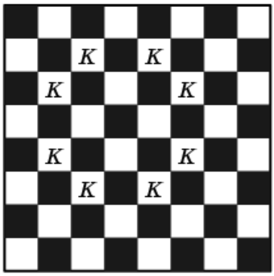
Замечания. Занумеруем вертикали и горизонтали цифрами от 1 до 9. У белых клеток обе «координаты» одной чётности, то есть она находится либо в нечётном столбце, либо в чётной строке. Ладьи ставим так, чтобы они закрыли все нечётные столбцы и все чётные строки. □

Задача 6.3.9. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2011.9.6) Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с каждой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?

Решение. Пусть конь находится на клетке какого-то цвета, тогда через два хода он окажется на клетке того же цвета. Значит, отмечены должны быть клетки одного цвета (пусть чёрного). Разобьём все чёрные клетки доски на восемь четырёхклеточных фигур двух видов (полосатая и серая), изображённых на рисунке.



Расстояние между двумя клетками каждой такой фигуры — не менее четырёх ходов коня. Поэтому каждая из этих фигур может содержать не более одной отмеченной клетки. Следовательно, отмечено не более восьми клеток. Пример для восьми отмеченных клеток показан на рисунке ниже.



□

Задача 6.3.10. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 2001.8-9.5) Саша выставляет на пустую шахматную доску ладьи: первую — куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила нечётное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить?

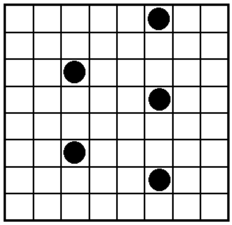
Решение. Покажем, как можно поставить 63 ладьи. Сначала поставим ладьи на клетки $a1$, $a8$ и $h8$. Затем заполним первую горизонталь (от $b1$ до $g1$) и последнюю вертикаль (от $h8$ до $h2$), кроме клетки $h1$. Затем заполняем вертикали: сначала самую левую от $a2$ до $a7$, потом следующую от $b2$ до $b8$ и т. д.

Поставить 64 ладьи невозможно. Действительно, после того как заполнены три угловые клетки доски, мы не имеем права поставить ладью в четвёртый угол (так как оттуда она, независимо от расположения других ладей, будет бить ровно две из них). □

4 Разнобой на шахматной доске

Задача 6.4.1. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.2) Поставьте 5 фишек на доску размером 8×8, чтобы любой состоящий из девяти клеток квадрат содержал в точности одну фишку.

Решение. Удовлетворяющая условию задачи расстановка показана на рисунке ниже.

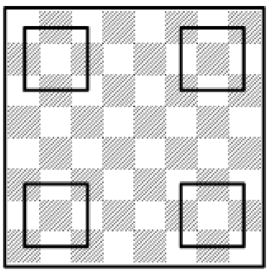


$\square$

Задача 6.4.2. («Математический праздник» — 1998.6.6) Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

Подсказка. В квадрате 3×3 можно обойти ходом коня все клетки, кроме центральной, и вернуться в исходную клетку.

Решение. Если в квадрате 3×3 поставить коней на все клетки, кроме центральной, то каждый конь будет бить ровно двух других. Теперь расположим четыре таких «каре» на доске подальше друг от друга — так чтобы кони из разных каре не били друг друга, как показано на рисунке ниже.



$\square$

Задача 6.4.3. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1998.8;9.2) Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.

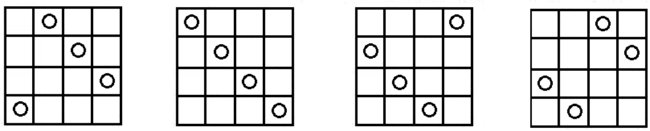
Решение. При каждом недиагональном ходе меняется цвет поля, на котором стоит король, а при диагональном — не меняется. Поскольку король обошёл всю доску и вернулся обратно, то цвет поля менялся с белого на чёрный столько же раз, сколько с чёрного на белый. Значит, недиагональных ходов король сделал чётное число. Число диагональных ходов равно 64 минус число недиагональных ходов — тоже чётное число. □

Задача 6.4.4. (Турнир им. Ломоносова — 1990.13) Дан куб $4 \times 4 \times 4$. Расставьте в нём 16 ладей так, чтобы они не били друг друга.

Решение. Введём систему координат с осями, направленными вдоль рёбер куба так, чтобы каждая клетка имела координатами тройку (x, y, z) чисел от 0 до 3, и поставим ладьи в клетки, сумма координат которых делится на 4.

Предположим, что какие-то две ладьи бьют друг друга. Значит, две их координаты (скажем, x и y) совпадают, а третьи — различны (обозначим их z_1 и z_2). Суммы $x + y + z_1$ и $x + y + z_2$, а значит, и их разность $z_1 - z_2$, кратны 4. Но это невозможно, так как z_1 и z_2 — различные неотрицательные числа, меньшие 4.

Заметим теперь, что в каждом вертикальном столбике находится по ладье, то есть что мы поставили 16 ладей. Действительно, каждый такой столбик определяется своей парой координат x и y. Координата z для ладьи в этом столбике однозначно задаётся условием $x + y + z \equiv 0 \pmod 4$. Требуемое расположение ладей приведено явно на рисунке ниже.



□

Задача 6.4.5. (Турнир им. Ломоносова — 1991.14) На шахматной доске 4×4 расположена фигура — «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход стать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле?

Решение. **Первый способ.** Заметим, что если бы ладья была «хромой», то есть могла бы ходить только на соседнее поле, то требовалось бы нарисовать на доске 4×4 замкнутый маршрут, что несложно. Теперь переставим горизонтали доски в порядке $2 - 4 - 1 - 3$, затем так же переставим вертикали, и маршрут «хромой» ладьи превратится в маршрут «летучей».

Второй способ. На рисунке поля доски пронумерованы в порядке, в котором «летучая ладья» может обойти их, соблюдая условия задачи.

12	16	9	13
6	2	7	3
11	15	10	14
5	1	8	4

□

Задача 6.4.6. (Московская математическая олимпиада — 1992.8.2) Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

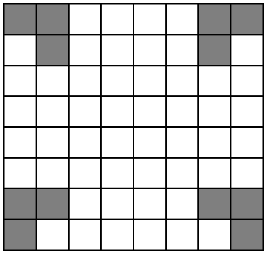
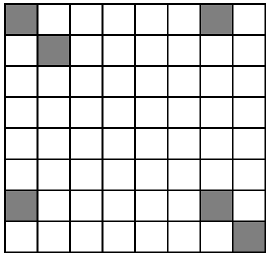
Решение. Допустим, в какой-то момент возникла описанная ситуация. Рассмотрим количество фигур, стоящих на чёрных клетках. С одной стороны, это число равно сумме количеств фигур на диагоналях, параллельных диагонали $a1-h8$, то есть нечётному числу. С другой стороны, оно равно сумме количеств фигур в диагоналях, параллельных диагонали $a8-h1$, то есть чётному числу. Следовательно, описанная в условии ситуация невозможна. □

Задача 6.4.7. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 2008.8;9.1) На шахматной доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 находится хотя бы один ферзь.

Решение. Пусть в левом верхнем квадрате 50×50 ферзей нет. Тогда все 50 ферзей на 50 верхних горизонталях находятся в правом верхнем квадрате 50×50, а все 50 ферзей на 50 левых вертикалях — в левом нижнем квадрате. Но оба этих квадрата покрываются 99 диагоналями, поэтому ферзей там не больше 99. Противоречие. □

Задача 6.4.8. (Московская математическая регата — 2013.11.3.3)На шахматную доску поставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Докажите, что на ту же доску можно поставить ещё одного коня с сохранением этого свойства.

Решение. **Первый способ.** Чтобы побить выделенные на рисунке серым 12 клеток, необходимо, по крайней мере, 12 коней, так как никакие две клетки не могут быть побиты одним конём. Значит, среди них есть хотя бы одна клетка, которая не бьётся ни одним из 11 поставленных коней. На неё можно поставить ещё одного коня.

Второй способ. Без ограничения общности можно считать, что хотя бы шесть из 11 коней стоят на белых клетках, значит, «чёрных» коней — не более пяти. На рисунке справа отмечено шесть белых клеток, которые не могут быть побиты менее, чем шестью «чёрными конями» (а «белые» кони их бить не могут), значит, на одну из них можно поставить ещё одного коня. □

Задача 6.4.9. (Турнгор. Осенний тур. Тренировочный вариант — 2001.8-9.5) На доске размером 15×15 клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи будут бить друг друга.

Решение. Введём на доске «систему координат»: занумеруем горизонтали и вертикали числами от 1 до 15. Если ладьи не бьют друг друга, то в каждой горизонтали и в каждой вертикали находится ровно одна ладья, поэтому сумма координат всех ладей равна $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 15)$, то есть чётна.

Когда ладья передвинута ходом коня, сумма её координат изменяется на 1 или на 3, то есть меняет чётность. Так как количество ладей нечётно, после перестановки сумма координат всех ладей нечётна. Следовательно, некоторые ладьи бьют друг друга. □

Задача 6.4.10. (Московская математическая регата — 2013.7.4.3) На белых и чёрных клетках доски 10×10 стоит по одинаковому количеству ладей так, что никакие две ладьи друг друга не бьют. Докажите, что на эту доску можно поставить ещё одну ладью так, чтобы она не била никакую из уже стоящих.

Решение. Так как ладьи друг друга не бьют, то на каждой горизонтали и на каждой вертикали расположено не более, чем по одной ладье. Если бы ладей было 10, то на чёрных клетках стояло бы чётное число ладей, что не так.

Значит, общее число ладей не больше восьми. Следовательно, найдутся, по крайней мере, две свободные вертикали и две свободные горизонтали, на пересечении которых мы сможем поставить даже две ладьи. □

Глава 7

Этого вам не расскажут на школьных уроках математики

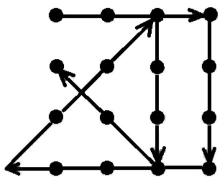
1 Графы. Что такое граф?

Задача 7.1.3. (Кружок малого мехмата — 2013/2014.6.1) В деревне Игуменка 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Диме и Никите, а также по соседству живут Евгений с Никитой, Иван с Сергеем, Евгений с Димой, Сергей с Антоном, и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Решение. Нарисуем схему: точками обозначим дома и соединим непересекающимися между собой линиями только те из них, которые являются соседними. После того, как вы это нарисуете, вы убедитесь, что пробраться огородами из дома Петра к дому Никиты нельзя. □

Задача 7.1.4. («Математический праздник» — 1992.6.3) Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы оказались зачёркнутыми 16 точек, расположенных в вершинах квадратной сетки 3×3?

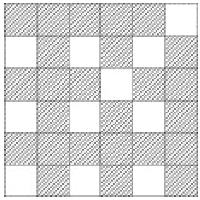
Решение. Удовлетворяющее условию построение представлено на рисунке ниже.



□

Задача 7.1.5. («Математический праздник» — 1995.6.6) В квадрате 6×6 отмечают несколько клеток так, что из любой отмеченной можно пройти в любую другую отмеченную, переходя только через общие стороны отмеченных клеток. Отмеченную клетку называют *концевой*, если она граничит по стороне ровно с одной отмеченной. Отметьте несколько клеток так, чтобы получилось: а) 10; б) 11; в) 12 концевых клеток.

Решение. в) Требуемое количество концевых клеток отмечено на рисунке ниже. а), б) На том же рисунке достаточно снять отметку с двух или одной концевых клеток.



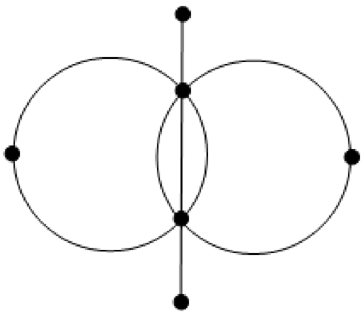
□

Задача 7.1.6. («Математический праздник» — 1991.6.6) Метро города Урюпинска состоит из трёх линий и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причём ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую из остальных можно перейти по крайней мере в двух местах.

Нарисуйте пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

Подсказка. Не забудьте, что бывают кольцевые линии.

Решение. На рисунке ниже показана схема метро города Урюпинска.



□

Задача 7.1.7. (Материалы олимпиадных школ МФТИ) В школе учится 20 детей, причём у любых двух есть общая бабушка. Назовём бабушку «многовнучной», если у неё есть хотя бы 13 внуков. В школе объявили бабушкоапокалипсис, который обязателен для посещения всеми бабушками. Докажите, что хотя бы одна многовнучная бабушка устроит апокалипсис.

Решение. Рассмотрим любого школьника A и двух его бабушек X, Y. Если не все школьники — внуки одной из них (в этом случае доказывать нечего), то существует школьник B, который не приходится внуком X (тогда он непременно внук Y), и школьник C, который не внук Y (следовательно, внук X). У школьников B и C есть общая бабушка Z.

Никаких других бабушек, кроме X, Y и Z у школьников нет: внук такой бабушки не имел бы общей бабушки с одним из трёх школьников A, B, C. На трёх бабушек приходится 20 внуков, поэтому (считая по две бабушки на внука) хотя бы у одной было не менее

$$\frac{2}{3} \cdot 20 = 13\frac{1}{3},$$

то есть не менее 13 внуков. □

Задача 7.1.8. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.

Подсказка. Выразите количество троек попарно знакомых людей через количество пар знакомых.

Решение. Обозначим через P количество пар знакомых людей (то есть число рёбер в соответствующем графе), а через T — количество треугольников в этом графе.

По условию каждое из рёбер входит ровно в 5 треугольников.

С другой стороны, каждый из T треугольников содержит ровно 3 ребра. Следовательно, $5P = 3T$. Поскольку 3 и 5 — взаимно простые числа, P делится на 3. □

Задача 7.1.9. (Иванов, «Математический кружок») а) В группе из четырёх человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык.

б) То же для группы из 100 человек.

в) То же для группы из 102 человек.

Решение. а) Рассмотрим граф с четырьмя вершинами A, B, C, D, соответствующими людям, и соединим рёбрами людей, знающих общий язык. Условие означает, что каждая тройка вершин соединена хотя бы двумя рёбрами. А доказать нужно, что есть два ребра без общих вершин. Пусть это неверно.

Первый способ. Если в тройке (A, B, C) проведены рёбра AB и AC, то рёбер BD и CD нет. Но тогда в тройке (B, C, D) не больше одного ребра. Противоречие.

Второй способ. Всего есть 4 тройки. Каждое ребро входит в две тройки. Следовательно, рёбер не менее $4 \cdot 2 : 2 = 4$. С другой стороны, каждому ребру соответствует отсутствующее «противоположное» ребро. Следовательно, рёбер не более трёх. Противоречие.

б) Разобьём группу из 100 человек на 25 групп по 4 человека. Для каждой из этих групп справедливо утверждение пункта а).

в) Отделим двух человек, говорящих на одном языке, а остальных разобьём на четвёрки. Согласно а) каждую четвёрку можно разбить на две пары с общим языком. □

Задача 7.1.10. (Иванов, «Математический кружок») Каждое из рёбер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трёх цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета.

Решение. Из произвольной вершины выходит по крайней мере 6 рёбер одного цвета (пусть красного). Рассмотрим полный граф на 6 вершинах, в которые ведут эти рёбра. Если хотя бы одно из рёбер этого графа — красное, то существует красный «треугольник».

В противном случае этот граф — двухцветный, и легко доказать, что в нём есть одноцветный «треугольник».

Пусть остальные два цвета — синий и жёлтый. Рассмотрим произвольную вершину. Из неё выходит либо не менее трёх синих, либо не менее трёх жёлтых рёбер. Рассмотрим, например, первый случай. Среди трёх вершин, в которые проведены синие рёбра есть либо две, соединённые синим ребром (тогда получаем синий «треугольник»), либо все три соединены жёлтыми рёбрами (и получаем жёлтый «треугольник»). □

Задача 7.1.11. (Ленинградские математические кружки) Каждое из рёбер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все рёбра между которыми — синие, либо есть три вершины, все рёбра между которыми — красные.

Решение. Пусть есть вершина, из которой выходит шесть синих рёбер. Тогда всё следует из задачи 7.1.10.

В противном случае есть вершина, из которой выходит не более четырёх синих рёбер (из всех девяти вершин не может выходить по пять синих рёбер). Тогда из неё выходит по крайней мере четыре красных ребра.

Если хотя бы одно из рёбер, соединяющих их концы, — красное, то есть красный «треугольник». Если же все они синие, то образовался полный синий граф на четырёх вершинах. □

2 Графы. Степень вершины графа

Задача 7.2.5. («Математический праздник» — 1992.7.3) Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Решение. При сложении степеней вершин каждое ребро учитывается дважды: по разу для каждой из вершин, которые оно соединяет. Следовательно, в любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер (и следовательно, чётна).

Так как сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна, то в любом графе число вершин нечётной степени чётно. А резидент сообщет о 15 «вершинах» нечётной степени, значит, он не заслуживает доверия. □

Задача 7.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.4) Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

Решение. Пусть в компании n человек, и каждый послал по k писем. Тогда от одного человека к остальным пришло $k \cdot (n-1)$ писем, а от всех написавших пришло $k \cdot (n-1) \cdot n$ писем. Значит, число 440 есть произведение трёх множителей, два из которых отличаются на 1.

Так как $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$, то далее можно осуществить перебор со следующими ограничениями:

- $n < 22$ (так как $22 \cdot 21 > 440$);
- числа n и $n-1$ не содержат никаких простых множителей, кроме 2, 5 и 11.

В результате получаем три варианта: $440 = 2^2 \cdot 10 \cdot 11 = 22 \cdot 4 \cdot 5 = 220 \cdot 1 \cdot 2$. Таким образом, в компании могло быть 2, 5 или 11 человек. □

Задача 7.2.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.8) Можно ли нарисовать 1006 различных 2012-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

Решение. Рассмотрим одну из вершин — A. Из неё можно выпустить не более 2011 отрезков, соединяющих её с другими вершинами.

Но в каждом из 2012-угольников из A выходит две стороны. Значит, таких многоугольников не больше 1005. □

Задача 7.2.8. («Математический праздник» — 2017.7.6) Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

Решение. Представим, что сначала все 49 школьников стоят в коридоре, и будем постепенно запускать их в класс. При этом будем делать это так, чтобы в классе в любой момент времени дети были разбиты на требуемые группы.

Пусть в коридоре стоит школьник Фёдор. Если он знаком с каким-то другим школьником, стоящим в коридоре, то просто запустим их двоих в класс. Иначе все знакомые Фёдора уже в классе.

Так как в классе менее 50 школьников, они разбиты менее, чем на 25 групп. Значит, среди знакомых Фёдора какие-то двое находятся в одной группе. Если это группа из двух школьников, то впустим Фёдора в класс, добавив его к этой группе. Если же это группа из трёх школьников, то попросим одного из знакомых Фёдора образовать с ним группу, а оставшихся школьников оставим вдвоём.

Так, постепенно впуская школьников в класс, мы добьёмся того, что все школьники будут разделены на требуемые группы. □

Задача 7.2.9. (Ленинградские математические кружки) У короля 19 баронов–вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства одно, пять или девять соседних баронств?

Подсказка. В графе соседства баронств было бы 19 нечётных вершин.

Решение. По лемме о рукопожатиях так оказаться не может. □

Задача 7.2.10. (Иванов, «Математический кружок») В графе каждая вершина — синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелёными, а каждая зелёная — с девятью синими и шестью зелёными. Каких вершин больше — синих или зелёных?

Решение. Мысленно натянем нити между каждыми связанными синей и зелёной вершинами. Тогда от каждой синей вершины выходит 10 нитей, а от каждой зелёной — 9 нитей.

Значит, число нитей одновременно будет в 9 раз больше числа зелёных вершин и в 10 раз больше числа синих вершин. Следовательно, зелёных вершин в 10/9 раза больше, чем синих. □

Задача 7.2.11. (Иванов, «Математический кружок») В графе из каждой вершины выходит по три ребра. Может ли в нём быть 1990 рёбер?

Решение. Если в данном графе k вершин, то рёбер в нём — $3k/2$. Но такое число не может быть равно 1990, так как 1990 не делится нацело на 3. □

Задача 7.2.12. (Ленинградские математические кружки) На конференции присутствуют 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

Подсказка. Рассмотрите двух незнакомых учёных и их знакомых.

Решение. Рассмотрим двух незнакомых учёных (если таких нет, то всё в порядке). Каждый из них имеет по 25 знакомых среди оставшихся 48, значит, у них есть по крайней мере два общих знакомых. Этих четверых и усадим за стол. □

Задача 7.2.13. (Иванов, «Математический кружок») В кружке у каждого члена имеется один друг и один враг. Доказать, что

а) число членов чётно;
б) кружок можно разделить на два нейтральных кружка.

Решение. а) Весь кружок разбивается на пары друзей.

б) Поскольку степень каждой вершины соответствующего графа равна 2, то он разбивается на циклы. В каждом цикле рёбра «дружбы» и «вражды» чередуются, значит, тех и других поровну.

Поместив в один кружок членов каждого цикла, взятых через одного, мы получим кружок, где нет ни друзей, ни врагов. Оставшиеся члены образуют второй нейтральный кружок. □

Задача 7.2.14. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2006.6.5) В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

Решение. Каждая мышка за одну ночь может побывать на складе с тремя другими мышками. Чтобы побывать на складе с каждой из 23 других мышек по одному разу, ей необходимо $23 : 3$ ночей. Но число 23 не делится на 3. Поэтому такая ситуация невозможна. $\square$

3 Эйлеровы пути и кёнигсбергские мосты. Перевод рисунка в граф

Задача 7.3.3. (Ленинградские математические кружки — 6.020) Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист:

а) не с него начал и не на нём закончил;
б) с него начал, но не на нём закончил;
в) с него начал и на нём закончил?

Решение. а) На Троекратный остров турист 3 раза зашёл и 3 раза с него вышел, то есть использовал 6 мостов.

б) В этом случае турист зашёл на остров дважды, а вышел трижды, то есть использовал 5 мостов.

в) В этом случае турист зашёл на остров дважды, а вышел дважды, то есть использовал 4 моста. $\square$

Задача 7.3.4. (Ленинградские математические кружки) а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

Решение. а) Если бы это удалось, то проволока шла бы по рёбрам куба без наложения, то есть мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги. Но это невозможно, так как у куба восемь нечётных вершин.

б) Поскольку нечётных вершин восемь, то таких кусков нужно не менее четырёх.

Четырёх кусков достаточно: например, в кубе $ABCDA'B'C'D'$ пустим проволоку по ломаной $ABCDAA'B'C'D'A'$. Оставшиеся три ребра BB', CC', DD' покроем тремя отдельными кусками проволоки. Таким образом, проволоку придётся ломать как минимум 3 раза. □

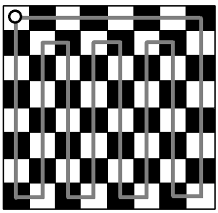
Задача 7.3.5. (Турнир городов. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1992/1993. 8-9.4) Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

Решение. Пометим вершины куба числами 1 и -1 в «шахматном» порядке. Предположим, что муравей так прополз по каркасу куба, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в остальных — по 20 раз.

Вычислим сумму чисел, пройденных муравьём (каждое число входит в эту сумму несколько раз). С одной стороны, она по модулю не превосходит 1, с другой стороны, она должна быть равна ± 5. Противоречие. □

Задача 7.3.6. (Московская математическая олимпиада — 1961.8.1.4) Дана ладья, которой разрешается делать ходы только длиной в одну клетку. Доказать, что она может обойти все клетки прямоугольной шахматной доски, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку тогда и только тогда, когда число клеток на доске чётно.

Решение. Если одна из сторон шахматной доски равна 2, обход по периметру удовлетворяет условию. Когда длина одной из сторон чётна, то возможен обход, показанный на рисунке.



Пусть длины обеих сторон нечётны. Каждым ходом ладья меняет цвет клетки, на которой стоит. Поэтому, если ладья возвращается в исходную клетку, то количество её ходов (то есть пройденных клеток) чётно. Но количество клеток на такой доске нечётно. Значит, обойти все клетки она не может. □

4 Графы. Связные графы

Задача 7.4.4. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.6;7-8.5;9.4) В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал N дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем N это возможно?

Решение. Предположим, что злой волшебник заколдовал все 2017 дорог. Тогда получается 1000 королевств (каждое из одного города). Представим теперь, что добрый волшебник расколдовывает дороги так, чтобы получилось 7 королевств.

Он должен расколдовать как минимум 993 дороги, т. к. каждая дорога уменьшает число королевств не более, чем на 1. Значит злой волшебник не мог заколдовать более $2017 - 993 = 1024$ дорог. □

5 Ориентированные графы

Задача 7.5.3. (Ленинградские математические кружки) Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озер, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

Решение. Общее количество «втекающих» рек должно быть равно общему количеству «вытекающих» рек. □

Задача 7.5.4. (Кружок МЦНМО — 35501) На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

Подсказка. Число выходящих стрелок равно числу вершин многоугольника.

Решение. Пусть n — число сторон данного многоугольника, а k — число вершин, в которые входит по две стрелки.

Всего стрелок — n, из них $2k$ стрелок входят в данные k вершин, остальные $n - 2k$ стрелок входят ещё в $n - 2k$ вершин (в каждую — по одной).

Остаётся $n - k - (n - 2k) = k$ вершин, в которые не входит ни одной стрелки, то есть из которых выходит по две стрелки. □

Задача 7.5.5. (Ленинградские математические кружки) Докажите, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

Доказательство. Зафиксируем вершину A. Рассмотрим сначала вершины, соединённые с A, затем — новые вершины, соединённые с ними, и т. д. При этом рёбра, соединяющие добавляемые вершины с уже рассмотренными, ориентируем в направлении к новым вершинам. □

Задача 7.5.6. (Ленинградские математические кружки) В некоторой стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Решение. Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число «входящих» дорог равно $21 \cdot 100 + a$, а общее количество «выходящих» дорог не больше $20 \cdot 100 + (100 - a)$. Поэтому

$$21 \cdot 100 + a \leqslant 20 \cdot 100 + (100 - a),$$

то есть $2a \leqslant 0$. Таким образом, $a = 0$. □

Задача 7.5.7. (Иванов, «Математический кружок») В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более, чем по двум дорогам.

Подсказка. Это город, из которого выходит наибольшее число дорог.

Решение. Рассмотрим город A, из которого выходит наибольшее число дорог, и произвольный город B. Если дорога ведёт из A в B, то всё в порядке.

Если же дорога ведёт из B в A, то, поскольку из B выходит не больше дорог, чем из A, найдётся город C, в который ведёт дорога из A, но не ведёт дорога из B. Тогда можно из A попасть в B по маршруту $A - C - B$. □

6 Комбинаторика. Перебор вариантов

Задача 7.6.6 (Задача Леонарда Эйлера). Четверо господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

Решение. Занумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и так же занумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером (то есть, например, шляпа 2 принадлежит гостю 2). Тогда каждый вариант получения шляп обозначается четырёхзначным числом, составленным из цифр 1, 2, 3 и 4, в котором номер позиции цифры есть номер гостя, а сама цифра есть номер полученной им шляпы (номера позиций будем считать слева направо).

Например, комбинация 4132 означает, что первый гость получил четвёртую шляпу, второй — первую, третий — третью, а четвёртый — вторую. Такой вариант не годится по условию, поскольку третий получил свою шляпу. Теперь понятно, что нужно сделать — выписать по возрастанию все четырёхзначные числа, содержащие по одной цифре 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером.

Эти числа выписаны ниже под чертой. Полужирные цифры над чертой — номер позиции (номер гостя), с которым не должна совпадать цифра в соответствующем столбце (номер шляпы). Как видим, всего имеется 9 вариантов нужной раздачи шляп.

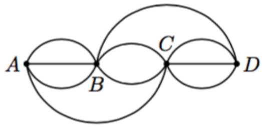
1	**2**	**3**	**4**
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

□

Задача 7.6.7. (Олимпиада «Физтех» — 2014.7;8) Сколько существует способов составить комиссию из семи человек, выбирая её членов из восьми супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

Решение. В комиссию войдут представители 7 супружеских пар. Поэтому сначала можно восемью способами выбрать ту пару, от которой никто не войдёт в комиссию, а потом для каждой из семи оставшихся пар двумя способами указать того, кто из неё войдёт в комиссию. По правилу произведения получится $8 \cdot 2^7 = 1024$ способа. □

Задача 7.6.8. (Турнир им. Ломоносова — 2012.7) Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке.



Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?

Решение. При указанном на рисунке соединении городов дорогами возможны лишь две последовательности городов на пути из A в D с условием, что в каждом городе необходимо побывать ровно по одному разу:

$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} D \quad \text{и} \quad A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} D,$$

где над стрелками указано количество дорог, соединяющих соответствующие города напрямую. Следовательно, общее число способов проделать требуемый путь равно $3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 20$. $\square$

Задача 7.6.9. («Математический праздник» — 1997.7.1) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

Подсказка. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998.

Решение. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Значит, длина меньшей стороны может принимать значения от 1 до 499.

Если периметр прямоугольника равен 1998, то сумма длин его соседних сторон равна 999, а длина меньшей стороны может принимать те же значения: от 1 до 499.

То есть в обоих случаях прямоугольников поровну, а именно, 499. $\square$

Задача 7.6.10. Сколько существует чисел, больших, чем 3528, каждое из которых можно получить перестановкой цифр данного числа?

Решение. Существует 15 удовлетворяющих условию чисел: 3582, 3825, 3852, 5238, 5283, 5328, 5382, 5823, 5832, 8235, 8253, 8325, 8352, 8523, 8532. $\square$

Задача 7.6.11. Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 4?

Решение. Существует 20 таких чисел: 101, 102, 103, 110, 111, 112, 113, 120, 121, 130, 200, 201, 202, 210, 211, 220, 300, 301, 310, 400. $\square$

Задача 7.6.12. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых больше 33?

Решение. Существует 15 удовлетворяющих условию четырёхзначных чисел: 9999, 9998, 9989, 9899, 8999, 8899, 8989, 8998, 9889, 9898, 9988, 7999, 9799, 9979, 9997. □

Задача 7.6.13. На окружности отметили четыре различные точки. Сколько при этом получилось дуг?

Решение. Отметим точки цифрами 1, 2, 3 и 4. Перечислим получившиеся дуги: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43. Всего их 12. □

Задача 7.6.14. Сколько существует двузначных чисел, у которых первая цифра меньше второй?

Решение. Существует 36 таких чисел: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 56, 57, 58, 59, 67, 68, 69, 78, 79, 89. □

Задача 7.6.15. Шесть знакомых обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Решение. Обозначим знакомых цифрами. Тогда имеем 15 рукопожатий: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Также можно найти число рукопожатий как число сочетаний из 6 по 2. □

Задача 7.6.16. Семеро шахматистов провели двухкруговой турнир, в котором каждый сыграл с каждым по две партии (одну партию белыми фигурами, одну — чёрными). Сколько партий было сыграно на турнире?

Решение. Число партий равно числу размещений из 7 по 2, то есть 42. □

Задача 7.6.17. Девять шестиклассников получили по математике, русскому языку и географии четвёрки и пятёрки в четверти. Докажите, что хотя бы у двух из них оценки по этим предметам полностью совпадают.

Решение. Число всех вариантов оценок равно восьми (444, 555, 455, 545, 554, 544, 454, 445), а шестиклассников девять. Согласно принципу Дирихле хотя бы у двух школьников оценки полностью совпадают. □

Задача 7.6.18. Пятнадцать шестиклассников получили по математике, русскому, географии и физкультуре четвёрки и пятёрки в четверти. Можно ли теперь утверждать, что хотя бы у двух из них оценки по этим предметам полностью совпадают?

Решение. Число всех вариантов оценок равно шестнадцати (4444, 5444, 4544, 4454, 4445, 5544, 5454, 5445, 4554, 4545, 4455, 4555, 5455, 5545, 5554, 5555), а учеников всего пятнадцать, следовательно, нельзя утверждать, что хотя бы у двух школьников оценки по этим предметам полностью совпадают. □

Задача 7.6.19. Двум врачам нужно посетить четырёх больных, причём каждый врач должен побывать у каких-либо двух больных. Сколькими способами врачи могут распределить между собой эти посещения?

Решение. Число способов равно числу размещений из 4 по 2, т. е. шести. □

Задача 7.6.20. Есть две белые, две красные и две розовые гвоздики. Сколькими способами их можно расставить в три вазы так, чтобы в каждой вазе стояли по две гвоздики разного цвета?

Решение. Три пары гвоздик: белая — красная, белая — розовая, красная — розовая можно переставить $3! = 6$ способами. □

Задача 7.6.21. Петя и Вася играют в пинг-понг, матч продолжается до трёх побед. Сколько существует вариантов протекания матча?

Решение. Обозначим 1 — победу, 0 — поражение. Тогда все возможные варианты, например, со стороны Пети: 111, 000, 1000, 0100, 0010, 0111, 1011, 1101, 00111, 01011, 01101, 10011, 10101, 11001, 11000, 10100, 10010, 01100, 01010, 00110.

Следовательно, существует 20 вариантов протекания матча. □

Задача 7.6.22. Из Жёлтой страны в Голубую ведут две дороги, из Голубой страны в Розовую — четыре. Из Жёлтой страны в Фиолетовую ведут три дороги, из Фиолетовой страны в Розовую — тоже три. Прямых дорог из Жёлтой страны в Розовую и из Голубой страны в Фиолетовую нет. Сколькими путями можно добраться из Жёлтой страны в Розовую? А из Голубой страны в Фиолетовую?

Решение. Из Жёлтой страны в Розовую ведут $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ дорог. Из Голубой страны в Фиолетовую ведут $2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 18$ дорог. □

Задача 7.6.23. Алфавит племени Ни–Бум–Бум содержит только три буквы — А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из трёх букв. Сколько слов в языке этого племени?

Решение. В языке этого племени 39 слов: А, Б, В, АА, ББ, ВВ, АБ, БА, АВ, ВА, БВ, ВБ, ААА, БББ, ВВВ, АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА, БАА, АБА, ААБ, ВАА, АВА, ААВ, АББ, БАБ, ББА, ВББ, БВБ, ББВ, АВВ, ВАВ, ВВА, БВВ, ВБВ, ВВБ. □

7 Комбинаторика. Правила сложения и умножения

Задача 7.7.6. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.2;7-8.1) Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

Решение. Только квадраты простых чисел имеют ровно три делителя. Заметим, что $47^2 > 2017$, поэтому достаточно рассмотреть квадраты простых чисел от 2 до 43. Их 14 штук. □

Задача 7.7.7. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.2) Сколько трёхзначных натуральных чисел имеют чётное число различных натуральных делителей?

Решение. Заметим, что только точные квадраты имеют нечётное число делителей. Всего 900 трёхзначных чисел, из них точными квадратами являются 22 числа: $10^2, 11^2, \ldots, 31^2$.

Следовательно, трёхзначных натуральных чисел, имеющих чётное число различных натуральных делителей, будет $900 - 22 = 878$. □

Задача 7.7.8. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-8.6;9.5) Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

Решение. В каждый из множителей должны входить только степени 2 и 5 (одновременно не могут, т. к. получится число, кратное 10).

Может быть два множителя, равные степени двойки, тогда третий равен 625.

Или наоборот, два множителя — степени пятерки, а третий равен 16. В каждом случае по 3 варианта.

Таким образом, указанное число можно разложить на множители шестью способами. □

Задача 7.7.9. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.6) Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй — третьему?

Решение. Заметим, что множители имеют вид

$$2^a \cdot 2^b \cdot 2^c,$$

где $a+b+c=10$ и $a \geqslant b \geqslant c$. Очевидно, что $c<4$, так как иначе сумма была бы больше 10. Рассмотрим случаи:

- $c=0$, $b=0,\ldots,5$, $a=10-b$, 6 способов;
- $c=1$, $b=1,\ldots,4$, $a=9-b$, 4 способа;
- $c=2$, $b=2,3$, $a=8-b$, 3 способа;
- $c=3$, $b=3$, $a=4-b$, 1 способ;

Итого, 14 способов. □

Задача 7.7.10. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.5;7-8.4;9.3) Вася придумывает четырёхзначный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует её. Кроме того он не любит, когда две одинаковые цифры стоят рядом. А ещё он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль?

Решение. Пароль должен иметь вид $ABCA$, где A, B, C — разные цифры, не равные 2. Их можно выбрать $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ способами. □

Задача 7.7.11. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.4;7-8.3;9.2) Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из четырёх десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

Решение. Всего паролей, не содержащих цифру 7, будет $9^4=6561$.

При этом $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ из них состоят из разных цифр. Значит, содержат одинаковые цифры $6561-3024=3537$ паролей. □

Задача 7.7.12. («Математический праздник» — 1998.6-7.1) На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

Подсказка. Решите задачу для двух меридианов и одной параллели.

Решение. Меридианы делят глобус на 24 части (дольки), а параллели делят каждую дольку на $17 + 1 = 18$ частей. Всего $18 \cdot 24 = 432$ части. □

Задача 7.7.13. («Математический праздник» — 1996.6.3) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Решение. **Первый способ.** Подсчитаем количество чисел, не кратных 5. На первом месте может стоять любая из 9 ненулевых цифр, на втором, третьем и четвёртом — любая из 10 цифр, на последнем — любая из восьми (не 5 и не 0). Всего получаем $9 \cdot 8 \cdot 10^3$ чисел.

Теперь подсчитаем количество чисел, у которых и первая, и вторая цифра — не пятёрка. На первом месте может стоять любая из 8 цифр (не 5 и не 0), на втором — любая из девяти (не 5), на третьем, четвёртом и пятом — любая из 10 цифр. Получаем тот же результат: $9 \cdot 8 \cdot 10^3$ чисел.

Второй способ. Установим взаимно однозначное соответствие между двумя указанными множествами чисел. Пусть в числе $ABCDE$ обе первые цифры отличны от 5.

Если $B \neq 0$, поставим ему в соответствие число $BCDEA$; если $B = 0$, поставим ему в соответствие число $5CDEA$.

Ясно, что таким способом получаются все пятизначные числа, не кратные 5.

Таким образом, указанных в условии пятизначных чисел поровну. □

Задача 7.7.14. (Турнир им. Ломоносова — 2016.5-8.4) Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0?

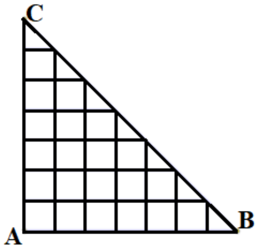
Решение. Однозначные и двузначные числа, удовлетворяющие данному условию: 4, 12, 24, 32, 44, 52. Согласно признаку делимости на 4 последние две цифры трёхзначного числа должны образовывать число, делящееся на 4. Тогда это будут следующие числа.

112	124	132	144	152
212	224	232	244	252
312	324	332	344	352
412	424	432	444	452
512	524	532	544	552

То есть, всего 31 число. □

Задача 7.7.15. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.5;7-8.6;9.4) На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (катеты идут по линиям сетки). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

Решение. Одна из сторон треугольника должна идти под наклоном, т. е. лежать на отрезке BC. Если зафиксировать какой-то диагональный отрезок, то оставшаяся вершина определяется однозначно. Т. е. надо выбрать две точки из 8, это можно сделать $7 \cdot 8 : 2 = 28$ способами. Значит, на удовлетворяющем условию задачи рисунке можно найти 28 треугольников.



□

Задача 7.7.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.5) Мария Ивановна покупает 16 шариков для Последнего звонка. В магазине есть шарики трёх цветов: синего, красного и зелёного. Сколько существует вариантов различных покупок 16 шариков, если Мария Ивановна хочет, чтобы шарики каждого цвета составляли не менее четверти от количества всех шариков?

Решение. Заведомо надо купить 4 синих шарика, 4 красных и 4 зелёных. Остаётся купить ещё 4 шарика, каждый из которых уже может быть любого из трёх цветов. Подсчитаем количество возможных вариантов.

1. Все 4 шарика одного цвета. Таких вариантов 3 — по числу цветов.
2. Три шарика одного цвета, а четвёртый — другого. Первый цвет выбирается 3 способами, второй — двумя. Всего 6 вариантов.
3. Два шарика одного цвета, а два — другого. Таких вариантов 3.
4. Два шарика одного цвета, один — другого и один — третьего. И таких вариантов 3.

Итого, $3 + 6 + 3 + 3 + 3 = 15$ вариантов. □

Задача 7.7.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.8) Отец говорит сыну:

— Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.

— Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

Решение. Пусть, когда сын родился, отцу было N лет. Когда сыну k лет, отцу — $N + k$. Это число делится на k тогда и только тогда, когда N делится на k.

Таким образом, задача сводится к подбору числа N, у которого ровно 8 делителей. При этом $2N$ не больше 75, то есть $N \leqslant 37$.

Числа, имеющие 8 делителей, могут быть представлены в одном из трёх видов: p^7, p^3q, pqr (где p, q и r — простые числа). Перебором устанавливается, что только числа $24 = 2^3 \cdot 3$ и $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ имеют 8 делителей и не превосходят 37.

Значит, сыну либо 24 года, либо 30 лет. □

8 Метод математической индукции

Задача 7.8.7. (Московская математическая олимпиада — 1962.10.2.5) В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

Подсказка. Примените индукцию по числу участников турнира.

Решение. Применим индукцию по числу n участников турнира. База (два участника) очевидна.

Шаг индукции. Рассмотрим некоторый турнир с $n + 1$ участником. Выделим одного из участников — C, все встречи между остальными участниками образуют турнир для n участников.

Согласно предположению индукции, этих n участников можно обозначить

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

так, что участник A_i не проиграл A_{i+1} для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Пусть m — наибольший номер, для которого участник C проиграл участникам $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (если C выиграл у участника A_1, то полагаем $m = 0$). Тогда C не проиграл участнику A_{m+1} (кроме случая $m = n$). Поэтому ряд

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, C, A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_n$$

удовлетворяет условию (если $m = 0$, то ряд начинается с C, если $m = n$, то ряд заканчивается на C). $\square$

Задача 7.8.8. (Шень, «Математическая индукция») Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым (целым положительным) знаменателем:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$$

Доказать с помощью математической индукции, что для любого $n > 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. Например, при $n = 3$ можно написать так:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

(Ясно, что двумя дробями не обойтись, поскольку все дроби, кроме первой, меньше половины. Можно также проверить, что для трёх дробей есть только один вариант.)

Решение. Шаг индукции. Предположим, что для $n-1$ дробей задача решена: есть представление единицы, в котором $n - 1$ слагаемых и все знаменатели разные. Будем считать, что дроби убывают.

Мы получим искомое представление в виде суммы n дробей, если разобьём одну дробь на две. Это можно сделать следующим образом:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k \cdot (k+1)}.$$

Последнее (но важное) замечание: все дроби остались различными, так как k было наибольшим знаменателем, а $k + 1$ больше k (не говоря уж о $k(k + 1)$, которое ещё больше).

Например, при переходе от трёх дробей к четырём мы разбиваем $1/6$ на $1/7$ и $1/42$. Мы хотим гарантировать, что все дроби будут разными, и потому разбиваем самую маленькую дробь. $\square$

Задача 7.8.9. (Шень, «Математическая индукция») Доказать, что любой из квадратов

$$2 \times 2,\ 4 \times 4,\ 8 \times 8, \ldots, 2^n \times 2^n, \ldots,$$

из которого вырезан угловой квадратик 1×1, можно разрезать на уголки из трёх клеток.

Решение. Базис индукции. Для квадрата 2×2 (то есть при $n = 1$) это тривиально: после вырезания углового квадратика как раз и остаётся уголок.

Шаг индукции. Для квадрата 4×4 (то есть при $n = 2$) задача также решается легко: уголок из трёх квадратов размера 2×2 можно разрезать на четыре маленьких уголка, и остаётся добавить к ним ещё один уголок. Тот же приём годится и в общем случае.

Пусть мы разрезали квадрат $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ без углового квадратика 1×1 на уголки из трёх клеток. Увеличим эту картинку вдвое. Мы увидим, что квадрат вдвое большего размера $2^n \times 2^n$ без углового квадрата 2×2 разрезан на уголки из трёх квадратов 2×2.

Остаётся каждый из этих уголков разрезать на четыре маленьких и добавить ещё один уголок в вырез 2×2. $\square$

Задача 7.8.10. (Шень, «Математическая индукция») В последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Доказать, что два делящихся на 7 числа в ней не могут стоять рядом.

Решение. Пусть это не так и есть два стоящих рядом числа, делящихся на 7. Двигаясь слева направо, найдём первую такую пару:

$$\ldots, a, 7k, 7l, \ldots$$

(соседние числа, делящиеся на 7, записаны как $7k$ и $7l$). Поскольку в начале последовательности стоят две единицы, эти числа не могут быть первыми, значит, перед ними есть какое-то число a. По условию $7l = a + 7k$, то есть $a = 7l - 7k = 7(l - k)$ и потому a тоже делится на 7. Значит, пара $7k$, $7l$ не была первой — вопреки предположению.

Противоречие показывает, что пары рядом стоящих и делящихся на 7 чисел нет. На самом деле число 7 в условии задачи можно заменить на любое другое целое положительное число.

Перескажем это же рассуждение по индукции. Оно будет выглядеть так: индукцией по n мы доказываем, что хотя бы одно из чисел F_n и F_{n+1} не делится на 7 (здесь через F_n обозначено n-е число Фибоначчи).

Базис индукции очевиден (два первых числа не делятся на 7). Шаг индукции: если это не так, и оба числа F_n и F_{n+1} делятся на 7, то и предыдущее число $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ делится на 7, что противоречит предположению индукции. $\square$

Задача 7.8.11. (Кружок малого мехмата — 2016/2017.7) На плоскости проведены n прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на $2n$ областей.

Доказательство. Докажем по индукции следующее утверждение: «n прямых проходящих через одну точку разбивают плоскость на $2n$ углов».

База. Если прямая одна, то областей очевидно 2. Доказано.

Переход. Предположим, что для k прямых мы уже все доказали. Докажем, для $k+1$ прямой. Пусть у нас есть $k+1$ прямая проходящая через одну точку.

Выкинем временно одну из прямых. Останется k, и по предположению мы знаем, что они делят плоскость на $2k$ углов. Проведём теперь выкинутую прямую. Она лежит между какими-то двумя старыми прямыми. Между этими двумя старыми прямыми лежало два вертикальных угла, и каждый из них новая прямая разделила на две части. То есть число частей увеличилось на 2, и стало равным $2k + 2 = 2 \cdot (k + 1)$. Индукционный переход доказан. □

9 Инвариант

Задача 7.9.4. (Турнир городов — 1987,7-8) В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3, но в другом углу:

а) левом верхнем;
б) правом верхнем?

Решение. Раскрасим доску полосами: нечётные горизонтали — белым, чётные — чёрным. Делая ход, фишка не меняет цвет поля, на котором стоит.

Осталось заметить, что в начальной расстановке фишки занимают шесть белых полей и три чёрных, а в конечной — три чёрных и шесть белых. Следовательно, ответ в обоих пунктах отрицательный.

Замечания. В а) можно воспользоваться и обычной шахматной раскраской. □

Задача 7.9.5. (Турнир городов — 1987,7-10) Имеются два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

Решение. Пока вся жидкость не окажется в одном сосуде (тогда получится однопроцентный раствор, и уже ничего не изменится), концентрация соли в первом сосуде (где была вода) ниже, чем во втором.

Пусть в конце в первом сосуде полуторапроцентный раствор. Тогда во втором концентрация соли не ниже. Слив всё в один сосуд, получим 2 л с концентрацией соли выше 1%, что невозможно. $\square$

Задача 7.9.6. (Турнир городов — 1985,7-10) На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Решение. Пусть c — число серых хамелеонов, а b — число бурых. Заметим, что остаток от деления $c - b$ на 3 — инвариант.

Действительно, при встрече серого хамелеона с бурым, разность не меняется, при встрече серого с малиновым — уменьшается на 3, а при встрече бурого с малиновым — увеличивается на 3.

В начале указанный остаток равен 1. Если же все хамелеоны станут одного цвета, то он равен 0 (разность $c - b$ равна 0 или ± 45). Следовательно, это невозможно. $\square$

Задача 7.9.7. (Кружок МЦНМО — 2004/2005.6) На вешалке висят 20 платков: 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?

Решение. После ухода последней девочки на вешалке будет нечётное количество платков. $\square$

Задача 7.9.8. (Козлова Е. Г., «Сказки и подсказки») В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения буквосочетаний «МО» и «ООММ» или добавления в любое место буквосочетания «ОМ». Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова «ОММ» и «МОО»?

Подсказка. Заметьте, что разность между количествами букв «М» и «О» не меняется при добавлении или удалении разрешенных буквосочетаний.

Решение. При добавлении или удалении разрешённых буквосочетаний разность между количествами букв «М» и «О» не меняется. Поэтому она равна

1 для синонимов слова «ОММ» и -1 — для синонимов слова «МОО». Значит, эти слова не синонимы. $\square$

Задача 7.9.9. (Кружок МЦНМО — 2004/2005.7) Хулиганы Вася и Петя порвали стенгазету, причём Петя рвал каждый кусок на 5 частей, а Вася на 9. При попытке собрать стенгазету нашли 1988 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.

Решение. Как Петя, так и Вася на каждом «шаге» добавляли чётное число кусков. Значит, общее число кусочков было нечётным. Но 1988 — число чётное. Следовательно, нашли не все кусочки. $\square$

Задача 7.9.10. (Ленинградские математические кружки) На столе стоят семь стаканов — все вверх дном. За один ход можно перевернуть любые четыре стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Подсказка. Как изменяется чётность числа стаканов, стоящих вверх дном?

Решение. **Первый способ.** Пусть в некоторый момент мы перевернули 4 стакана, из которых k стаканов стояли вверх дном, а $4-k$ — правильно (k может принимать значения от 0 до 4).

После переворачивания из этих четырёх стаканов k будут стоять правильно, а $4-k$ — вверх дном. Таким образом, количество стаканов, стоящих вверх дном, изменится на чётное число $4 - k - k = 2 \cdot (2 - k)$. Таким образом, чётность числа стаканов, стоящих вверх дном, не меняется. Поэтому в любой момент имеется нечётное число стаканов, стоящих вверх дном (так как вначале так стояли 7 стаканов).

Второй способ. Заметим, что каждый стакан должен быть перевернут нечётное число раз, а всего стаканов нечётное число, то есть мы должны сделать нечётное число переворотов. Однако при каждом ходе переворачивается чётное число стаканов. Следовательно, перевернуть все стаканы вниз дном невозможно. $\square$

Список литературы

[1] *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994. — С. 272. — ISBN 5-87400-072-0.

[2] *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 классов с углублённым изучением математики. — 7 изд. — М.: Просвещение, 2001. — С. 271.

[3] *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи / Под ред. Бугаенко В. О. — 4 изд. — М.: МЦНМО, 2008. — С. 96. — ISBN 978-5-94057-331-9.

[4] *Алфутова Н. Б., Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2002. — С. 264. — ISBN 5-94057-038-0.

[5] *Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.* Математические олимпиады Московской области. — М.: Изд-во МФТИ, 2003. — С. 224. — ISBN 5-89155-100-0.

[6] *Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.* Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы. — Просвещение (Пять колец), 2010. — С. 192. — ISBN 978-5-09-018951-4.

[7] Весенний турнир Архимеда / Под ред. Чулкова П. В. — МЦНМО, 2009. — С. 416. — ISBN 978-5-94057-446-0.

[8] *Розенталь А. Л.* Правило крайнего // *Квант.* — 1988. — № 9.

[9] Математическое просвещение / Под ред. Тихомирова В. М. — М.: МЦНМО, 2002. — Т. 6. — С. 139–140.

[10] *Спивак А. В.* Математический праздник. — Бюро Квантум, 2004. — С. 288. — ISBN 5-85843-035-X.

[11] *Шень А.* Математическая индукция. — 3 изд. — М.: МЦНМО, 2006. — С. 32.

[12] *Ященко И. В.* Приглашение на математический праздник, 3-издание, исправленное и дополненное. — МЦНМО, 2009. — С. 140. — ISBN 978-5-94057-364-7.