Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Москвский Физико-Технический Институт (Государственный университет)»
Центр развития ИТ-образования

летняя Олимпиадная школа

• МФТИ, 2017 •

# Материалы математического отделения Летней Олимпиадной Школы

ЧАСТЬ 1

*Бабичева Татьяна Сергеевна, Бабичев Дмитрий Сергеевич,*
*Бабичев Сергей Леонидович*

Издательство Э́дитус
Москва

УДК 51
ББК 22.1
М34

М34 **Материалы математического отделения
Летней Олимпиадной Школы.** – М.: Эдитус, 2017. – 90 с.

ISBN 978-5-00058-638-9

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-00058-638-9

# Содержание

# Введение

В данном методическом пособии приведены базовые материалы математической секции Летней Олимпиадной Школы 2017 года. Они рассчитаны на школьников, перешедших в 8-11 классы, и их учителей. Материал разбит на достаточно независимые друг от друга «кванты», каждый из которых примерно соответствует одному короткому занятию. Мы выбирали темы, которые жизненно необходимы для успешного решения задач математических олимпиад разных уровней, но которые мало представлены или совсем не изучаются в курсе школьной математики.

В каждом из квантов излагаются некоторые теоретические факты, разбирается несколько задач, уровень которых варьируется от школьных до областных математических олимпиад, а в заключение предлагается несколько задач для самостоятельного решения. Мы старались выделить типичные ошибки, которые совершают учащиеся, и дать рекомендации о том, как распознать тему задачи и как выбрать правильные методы её решения.

Для прохождения курса никаких специальных знаний не требуется, достаточно хорошего понимания того, что проходят в школе. Хотя мы старались, чтобы каждый квант можно было прорабатывать отдельно, некоторые темы зависят от предыдущих, а некоторые требуют нескольких квантов.

Кванты 1-9 рекомендуются для школьников 7го класса, 1-16 — для 8 класса, 1-19 — для 9 класса, 1-23 — для 10 класса. Рекомендуем Вам читать все кванты по-порядку.

Авторы сердечно благодарят директора ЦРИТО, основателя олимпиадных школ МФТИ Малеева Алексея Викторовича за вдохновление и ряд ценных замечаний.

# 1 Взвешивания-1

Если вы участвовали в олимпиадах ранее, вы наверняка сталкивались с таким типом задач, как задачи на взвешивания.

Простейшей задачей на эту тему является следующая:

**Задача 1.** Есть 3 внешне одинаковых конфеты, из которых одна невкусная (более лёгкая, потому что без начинки). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить невкусную конфету за 1 взвешивание?

Вначале разберёмся, что такое чашечные весы без гирь и что они умеют?

Одной из самых распространённых ошибок учащихся на олимпиадах является убеждённость, что если уж мы не видим, на сколько конкретно тяжелее одна чаша весов, то уж понять, в каком взвешивании чаша «перевешивала сильнее», мы можем. Увы, это — неверный подход, за такое «решение» жюри поставит ноль баллов.

Также, к сожалению, большинство участников олимпиад при решении задачи на взвешивание категорически не понимают, как его правильно оформить.

**Решение.**

Пронумеруем конфеты и положим на различные чаши весов конфету номер 1 и конфету номер 2.

Возможны три случая:

1. Если перевесила чаша с конфетой номер 1, то значит невкусной является конфета номер 2.

2. Если перевесила чаша с конфетой номер 2, то значит невкусной является конфета номер 1.

3. Если на весах установилось равенство, то невкусной является

оставшаяся конфета — конфета номер 3.

Иногда неизвестно, легче или тяжелее остальных объект, который надо найти. Рассмотрим следующую задачу:

**Задача 2.** Среди четырёх монет ровно одна фальшивая (причём неизвестно, является ли эта монета легче или тяжелее настоящей). Как выделить её с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

**Решение.** Одним из методов оформления решения подобных задач является схема возможных действий (рис. 1).

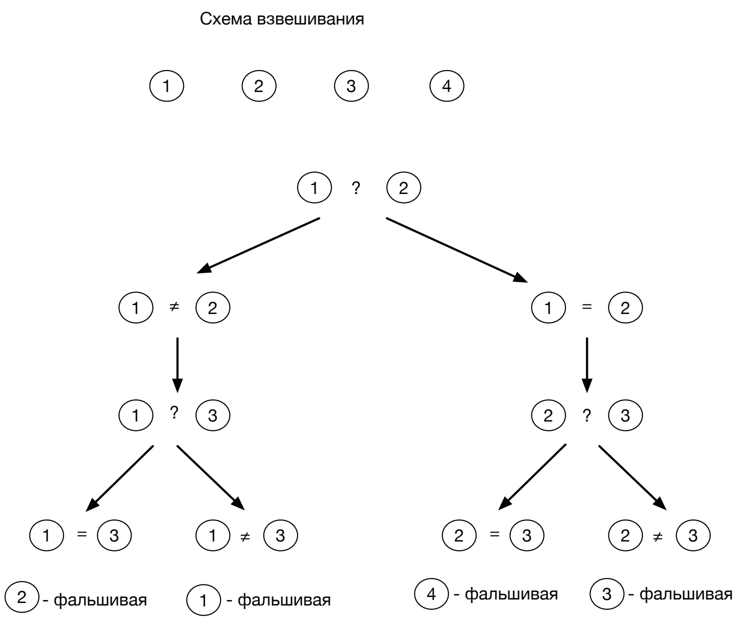



Рис. 1: Дерево возможных решений

Мы рисуем «дерево» возможных решений. Как можно прочитать подобный рисунок? Первым взвешиванием мы сравниваем монеты

1 и 2. Здесь возможны варианты — их веса равны (мы идём влево) или не равны (идём вправо). Если мы пошли влево — сравниваем монеты 1 и 3, и так далее. Правильно построенное дерево принятия решений без лишних слов покажет, что достаточно двух взвешиваний и убедит жюри в том, что задача решена верно.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Есть 9 внешне одинаковых конфет, из которых одна невкусная (более лёгкая, потому что без начинки). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить невкусную конфету за 2 взвешивания?

**Задача 2.** Среди семи монет имеются 2 фальшивые (более лёгкие). За 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определите обе фальшивые монеты.

# 2 Примеры и конструкции

Название данной темы, в принципе, говорит само за себя — в условии задачи на данную тему нас обычно просят привести пример или составить конструкцию, обладающую заданными свойствами. Оформление решённой задачи на данную тему обычно не вызывает проблем — достаточно привести требуемый пример и, возможно, объяснить, почему он подходит. Доказательств того, что данный пример «самый красивый» или «единственный» в данных задачах не требуется.

Подобные задачи достаточно часто встречаются под начальными номерами в различных олимпиадах, в том числе на районном этапе всероссийской олимпиады школьников. Тематикой данных задач может быть практически всё, что угодно — начиная от арифметических конструкций, заканчивая геометрическими, логическими и так далее.

Рассмотрим несколько задач с районных олимпиад:

**Задача 1.** Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны двадцати.

**Решение.** В данной задаче нам заранее известно произведение данных 10 чисел, поэтому первым делом мы раскладываем число 20 на простые множители (напомним, что простым называется число, которое делится только на 1 и само себя, само число 1 простым не является). 20= 2*2*5. Таким образом, становится очевидно, что не менее 7 множителей равны 1. Далее простым перебором случаев мы можем получить, что

$$20 = 1*1*1*1*1*1*1*1*2*10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2+10.$$

Этот пример и следует записать в решении. Можно не описывать свои размышления и то, как мы его получили.

Рассмотрим более «геометрическую» задачу:

**Задача 2.** Нарисуйте 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 15 точек были вершинами нарисованных квадратов.

**Решение.** У каждого квадрата — 4 вершины. Значит, если квадраты расположены в разных местах, вершин будет $4 \times 8 = 32$, что более, чем в 2 раза больше, чем нам требуется. В таком случае попробуем «скучковать» наши квадраты. Сгруппируем 4 квадрата в виде одного большого (рис. 2).

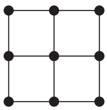


Рис. 2: Первое приближение

Это даст нам 9 вершин. Осталось добавить ещё 4 квадрата, добавив только 6 вершин. Добавим ещё 2 квадрата рядом, дополнив фигуру до прямоугольника $2 \times 3$ (рис. 3).

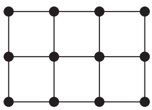


Рис. 3: Второе приближение

Добавилось 2 квадрата и 3 вершины. Добавив ещё 2 квадрата таким же образом, получим требуемое. Ответ на данную задачу указан на рисунке 4, который мы и приводим в качестве и решения, и ответа.

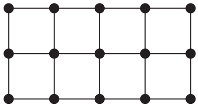


Рис. 4: Решение

Рассмотрим ещё одну задачу:

**Задача 3.** Найдите какое-нибудь натуральное число, которое в 2002 раза больше суммы своих цифр.

**Решение.** Очевидно, что наше число не меньше 2002, то есть как минимум четырёхзначное. Также очевидно, что наше число делится на 2002. Чтобы не составлять ужасных уравнений с множеством неизвестных, начнём выписывать числа, делящиеся на 2002 и проверять их на удовлетворение условию:

$2002 \neq (2+0+0+2) \times 2002 = 4 \times 2002$

$2002 \times 2 = 4004 \neq (4+0+0+4) \times 2002 = 8 \times 2002$

$2002 \times 3 = 6006 \neq (6+0+0+6) \times 2002 = 12 \times 2002$

$2002 \times 4 = 8008 \neq (8+0+0+8) \times 2002 = 16 \times 2002$

$2002 \times 5 = 10010 \neq (1+0+0+1+0) \times 2002 = 2 \times 2002$

$2002 \times 6 = 12012 = (1+2+0+1+2) \times 2002 = 6 \times 2002$, то есть мы получили ответ:

$12012 = (1+2+0+1+2) \times 2002 = 6 \times 2002$

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Запишите число 1997 с помощью десяти двоек и арифметических операций.

**Задача 2.** Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй — три, в третьей — четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?

**Задача 3.** Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продаёт купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25 000 рублей, если сначала у него было 1000 рублей?

# 3 Принцип Дирихле-1

Принцип Дирихле — хороший пример использования метода «доказательства от противного». Название этого метода, в принципе, говорит само за себя. Если в задаче требуется доказать некоторое утверждение `A`, будем предполагать, что оно не верное, то есть верно отрицание `A`. Если предложенная нами цепочка рассуждений приведёт нас к противоречию, то это будет означать, что наше предположение было неверно, и задача решена.

Обычно впервые с принципом Дирихле школьники, занимающиеся олимпиадной математикой, сталкиваются в `5` классе. Звучит он следующим образом: «Если в $N$ клетках сидит не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов». Воспользуемся методом «от противного» — предположим, что «это не так», то есть в каждой клетке сидит **менее** двух кроликов, то есть 1 или 0. Тогда в $N$ клетках максимально будет сидеть $N \cdot 1 = N$ кроликов, что меньше, чем $N+1$.

Естественным обобщением можно считать следующее утверждение: «Если в $N$ клетках сидит не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит хотя бы $k+1$ кроликов».

В действительности вы вряд ли встретите задачу, в которой и вправду придётся рассаживать кроликов по клеткам. В каждой конкретной задаче нужно понять, что играет роль кроликов, а что — роль клеток.

**Задача 1.** Дано 6 целых чисел. Доказать, что среди них можно выбрать два, разность которых делится на 5.

**Решение.** Числа, данные в условии задачи, намекают на то, что она решается с помощью принципа Дирихле. «Кроликов» должно быть на один больше, чем «клеток», а 6 на один больше, чем 5. Следовательно «кроликами» являются сами числа. Осталось понять, каким образом выбираются «клетки». «Клеток» должно быть 5 штук, а в условии задачи идёт речь о делимости на 5. А возможных остатков при делении на 5 как раз ровно 5 штук: 0, 1, 2, 3, 4. То есть мы сажаем «кролика»-число в «клетку»-остаток при делении на 5. По принципу Дирихле какие-то два «кролика» сидят в одной «клетке» — значит, какие-то два числа имеют одинаковый остаток при делении на 5, а это значит, что их разность делится на 5.

**Задача 2.** Числа от 1 до 9 разбили на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп произведение чисел будет не меньше, чем 72.

**Решение.** Воспользуемся принципом «от противного». Пусть то, что требуется доказать, не верно, это значит, что в каждой группе произведение будет меньше 72, то есть меньше или равно 71. Но 71 — число простое, то есть оно не может быть произведением указанных чисел. Отсюда следует, что произведение всех чисел меньше либо равно $70^3$. С другой стороны, произведение всех чисел равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = (3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (8 \cdot 9) = 72 \cdot 70 \cdot 72$, что больше, чем $70^3$. Полученное противоречие завершает решение задачи.

**Задача 3.** Докажите, в любой компании найдётся двое с одинаковым числом знакомых из этой компании.

**Решение.** Снова найдём «кроликов» и «клетки». Нетрудно догадаться, что в качестве «кроликов» будут выступать люди, а в качестве «клеток» — количество их знакомств. У любого человека может быть от 0 до $n-1$ знакомых, где $n$ — количество людей в компании. Значит клетки будут иметь номера от 0 до $n-1$. Казалось бы и «клеток», и «кроликов» — поровну, так что же, принцип Дирихле тут не работает? Работает, но с небольшой модификацией. Как обычно — предположим противное — тогда в каждой клетке сидит не более 1 кролика, но в клетках 0 и $n-1$ не могут одновременно сидеть кролики. Действительно, тогда будет человек, который не знаком ни с кем, и человек, который знаком со всеми, чего не может быть.

Полученное противоречие завершает решение задачи.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** В таблице $8 \times 8$ расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних по сторонам клетках отличаются не более, чем на 4. Докажите, что среди этих чисел есть 2 равных.

**Задача 2.** На шахматной доске более четверти полей занято шахматными фигурами. Докажите, что занятыми оказались хотя бы две соседние (по стороне или углу) клетки.

**Задача 3.** Докажите, что правильный треугольник нельзя полностью накрыть двумя правильными треугольниками с меньшими площадями.

# 4 Инвариант-1

Пусть в задаче присутствует некоторый «процесс», например, на доске заданы числа, которые можно менять по какому-то правилу, или позиция, из которой можно делать некоторые ходы. Можно сказать, что это игра, в которой участвует один игрок. Именно по таким признакам можно определить, что задача именно на инвариант, а не на другую тему.

Инвариант — это величина, которая остаётся неизменной. Зачастую это чётность (остаток при делении на 2) или остаток от деления на какое-либо число комбинации некоторых чисел, связанных с данной задачей. Рассмотрим одну из типичных задач на инвариант:

**Задача 1.** На доске написано 6 чисел — 3, 14, 15, 9, 2, 6. За одну операцию к любым двум числам можно прибавить 1. Можно ли сделать все числа одинаковыми?

**Решение.** При взгляде на условие задачи первой идеей будет пытаться увеличивать маленькие числа, чтобы они достигли больших. Но, немного помучившись, мы легко уравняем пять чисел, а вот шестое будет от них отличаться. Использовать перебор для решения задачи не получится, так как случаев бесконечно много (вдруг они, например, уравняются в миллионе). Доказать, что это сделать невозможно, поможет принцип инварианта.

Как найти инвариант? Нужно проследить некоторую закономерность. Что не поменялось, если к двум числам была прибавлена единица? Нетрудно понять, что сумма всех чисел увеличится на 2, поэтому сумма — **не** инвариант. Но мы знаем, что если к числу прибавить 2, то его чётность не изменится. Таким образом, чётность суммы всех чисел всегда остаётся неизменной и равной тому, чему она была вначале. А какая она была? Так как среди чисел 3, 14, 15, 9, 2 и 6 нечётное число нечётных чисел, то и сумма всех чисел будет нечётной. Но ведь нам нужно, чтобы все числа стали равными друг другу, следовательно, их сумма должна делиться на 6 (их количество), то есть должна быть чётной. Отсюда и следует то, что эти числа невозможно сделать равными.

**Задача 2.** В 8 «А» классе процветает бизнес: Вася меняет 1 шоколадную конфету на 6 леденцов, а Петя меняет 1 леденец на 6 шоколадных конфет. В класс приходит новый ученик Коля, у которого есть 1 шоколадная конфета. Он может неограниченное число раз обращаться к своим новым одноклассникам для обмена. Может ли у него оказаться поровну леденцов и шоколадных конфет, при условии, что он их не ест.

**Решение.** Попробуем найти инвариант. В каждый момент времени материальное положение Коли характеризуется двумя числами: числом шоколадных конфет $X$ и числом леденцов $Y$. Для удобства обозначим его парой $(X, Y)$. Эта пара могла поменяться за один ход следующим образом: либо она превратилась в $(X-1, Y+6)$, либо в $(X+6, Y-1)$. Заметим, что разница между числами изменилась на 7. Это значит, что не поменялся остаток от деления на 7 у разницы количества шоколадных конфет и леденцов. В конце эта разность, а значит и остаток при делении на 7, должна стать равной нулю. А изначально она была равна 1. Это невозможно, а значит, что Коля не сможет добиться своей цели.

Инвариант в большинстве случаев используется для того, чтобы доказать недостижимость цели, как это было в разобранных задачах. Но также инвариант может быть применён для того, чтобы понять, какие вообще случаи можно получить из начального с помощью описанных операций.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** По кругу записаны числа $1, 2, 3, 2, 2, 0$. За один ход можно к любым двум соседним числам прибавить по единице. Можно ли все числа сделать равными?

**Задача 2.** На доске написаны числа от 1 до 2014. Каждый день какие-то 2 числа стирают и вместо них пишут их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Мог ли на 2014 день получиться набор чисел с произведением 2015! ?

# 5 Метод математической индукции-1

Метод математической индукции (ММИ) используется для доказательства ряда утверждений, при которых каждое следующее утверждение доказывается из предыдущего:

$$Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to \dots Y_n \to Y_{n+1} \to \dots$$

Первое утверждение называется *базой индукции.*

Каждая стрелка — переход индукции: если истинно $n$-е утверждение и корректен переход, то истинно и $n+1$-ое утверждение. Таким образом, индукция работает следующим образом: из первого утверждения следует второе, из второго — третье, и так далее, вплоть до любого $n$. При этом обычно корректность всех переходов доказывается единым образом.

Индукция подобна принципу домино: если мы толкнём первое домино (база индукции), то каждое домино будет толкать следующее (индукционный переход), и цепочка упавших домино добежит до любого домино.

**Задача 1.** Доказать, что для любого натурального $n$ выполняется равенство: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Решение.** База индукции выполняется при $n = 1$, действительно:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$

Переход: $n$-ое утверждение формулируется так:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$n+1$-ое утверждение:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Пользуясь $n$-ым утверждением, докажем $n+1$-ое:
Сумма квадратов первых $n$ чисел равна $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, отсюда: $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$. А требуется доказать, что такая сумма равна $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. После несложных преобразований получаем, что

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

После несложных преобразований получаем:

$$n(2n+1)+6(n+1)=(n+2)(2n+3).$$

Разберём другую типичную задачу на метод математической индукции:

**Задача 2.** Доказать, что для любого $n \geqslant 4$ существует выпуклый n-угольник, у которого ровно 3 острых угла.

**Решение.** База индукции: $n=4$, достаточно построить выпуклый четырёхугольник с 3 острыми углами, это делается несложно (см. рис. 5)

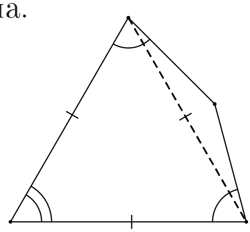


Рис. 5: Искомый четырёхугольник.

Переход: используя утверждение о существовании $n$-угольника, докажем существование $n+1$ угольника. Поступим следующим образом: возьмём $n$-угольник с 3 острыми углами (а он существует, это утверждение номер $n$), и «отрежем» один из тупых углов, как это показано на рисунке (см. рис. 6).

Результате операции добавится один тупой угол, то есть, в полученном $n+1$-угольнике останется три острых угла.

Заметим, что, вообще говоря, индукция в этом случае начиналась не с первого, а с четвёртого утверждения, но это на решение никак не влияет — по нашей аналогии с домино, они начинаются с номера 4.

Отметим, что база индукции, как правило, хоть и очевидна, всё же нужно аккуратно её проверять. Если нет базы, нет и индукции — некому толкнуть первое домино, чтобы запустить цепную реакцию.

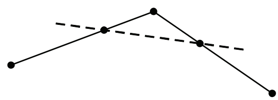


Рис. 6: «отрезание» угла

Напоследок приведём пример ошибочного рассуждения: докажем, что любые $n$ лошадей одного цвета.

База: $n = 1$. Действительно, база очевидна — любая лошадь одного цвета сама с собой.

Переход: Утверждение $n$: любые $n$ лошадей одного цвета. Отсюда докажем, что любые $n+1$ лошадь одного цвета, действительно: рассмотрим любые $n+1$ лошадей: $Л_1, Л_2, \ldots, Л_n, Л_{n+1}$. По предположению индукции, лошади из множества $\{Л_1, \ldots, Л_n\}$ — одного цвета, так же как и лошади из множества $\{Л_2, \ldots Л_{n+1}\}$ также одного цвета. Но лошадь $Л_2$ находится в обоих множествах, значит и все $n+1$ лошади одного цвета.

Предлагаем читателю остановиться на минутку и задуматься — где ошибка в приведённом рассуждении?

А ошибка кроется в следующем: на самом деле неверен переход $Y_1 \to Y_2$, в этом случае $Л_2$ не находится в обоих множествах, и рассматриваемые множества вообще не пересекаются. Хоть остальные переходы верны: из второго утверждения следует третье, и третьего — четвёртое, и так далее, индукция работать не будет: первое домино упало, но не задело второе, и цепочка прервалась.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Определите, на сколько частей делят плоскость $n$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

**Задача 2.** Докажите, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

# 6 Графы-1

Графы, наверное, одна из наименее любимых тем олимпиадной математики для школьников (но отнюдь не для составителей задач!). В школьной программе эта тема совсем не затрагивается, поэтому (в отличие от других олимпиадных тем), новичок, пришедший на олимпиаду, скорее всего прочитает задачу и не станет её решать. Тем не менее, если разобраться, о чём идёт речь, задача, возможно, окажется не такой сложной.

Так что же такое граф? Формально, граф — это набор вершин, некоторые из которых соединены рёбрами. Наглядно изобразить это можно так: пусть вершины — это некоторые города, а рёбра графа — это дороги, их соединяющие (рисунок 7). При этом в графе не важно взаимное расположение вершин или факт пересечения рёбер — один и тот же граф может быть изображён различными способами.

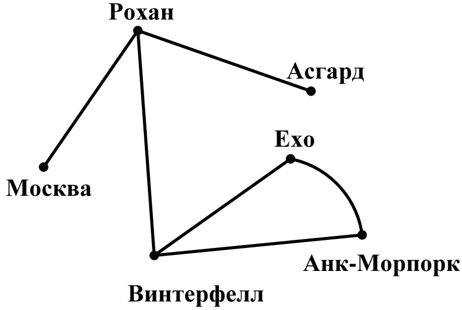



Рис. 7: Граф в виде городов и дорог между ними.

Одним из важных понятий графа является:

**Определение.** Степень вершины графа — это количество рёбер, которые выходят из этой вершины.

Например, на рисунке 7 степень вершины «Рохан» — 3, так как из неё ведёт три дороги — в Москву, в Винтерфелл и в Асгард.

Сформулируем и докажем следующее важное утверждение:

**Лемма.** Сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер.

**Доказательство.** Вспомним, что степень вершины — это количество рёбер, которые из неё выходят. Значит, сумма степеней — это количество всех рёбер, умноженное на два, так как каждое ребро было подсчитано два раза — с каждого из двух концов.

**Задача 1.** Кандидат в мэры города Бобров в своей предвыборной компании обещал провести новые телефонные линии между домами следующим образом: всего в городе 25 домов, и каждый дом должен быть соединён ровно с 5 другими. Докажите, что он не сможет сдержать своё обещание.

**Решение.** Пусть дома — это вершины, а телефонные линии — это рёбра графа. Тогда степень каждой вершины равна 5. А сумма всех степеней равна $5 \cdot 25 = 125$ — что должно быть равно удвоенному количеству рёбер. Но это невозможно, так как 125 — нечётное число.

Распространённой ошибкой при решении задач на графы является рассмотрение только частных случаев, или так называемого «лучшего» случая. Если мы показали, что для какого-то случая задача решена верно, то это не означает, что задача будет решена для всех других случаев.

Дадим ещё одно определение:

**Определение.** Граф называется связным, если из любой его вершины можно добраться до любой другой по рёбрам.

**Задача 2.** В некоторой стране каждый город соединён ровно с 10 другими, при этом из любого города можно добраться в любой. Одну дорогу закрыли на ремонт. Доказать, что из любого города всё ещё можно добраться до любого другого.

**Решение.** Снова представим себе, что города это вершины, а рёбра — это дороги. Тогда в задаче рассматривается связный граф, степень каждой вершины которого равна 10. Предположим, что после убирания дороги (ребра) граф перестал быть связным. Это значит, что граф разбился на две несвязанные между собой части (см. рис. 8). Посчитаем сумму степеней в левой части, которая является графом, пусть и меньших размеров. Пусть в ней осталось $k$ городов. Из каждого города, кроме одного по прежнему выходит 10 дорог, значит, сумма степеней вершин в этом графе равна $10k - 1$. Но это нечётное число, а значит, мы получили противоречие. Таким образом, после убирания ребра граф остался связным, что и требовалось доказать.

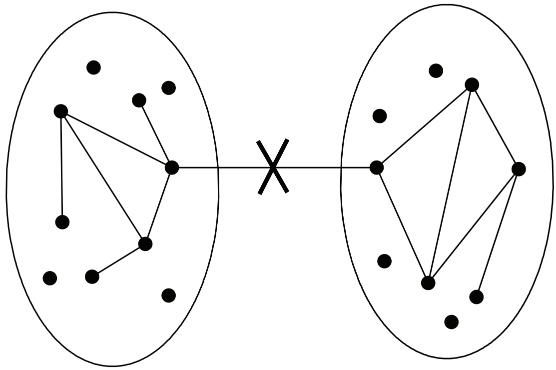


Рис. 8: При убирании ребра граф распадается на 2 компоненты

Заметим, что невозможно точное изображение графа — если мы действительно будем проводить по 10 рёбер из каждой вершины, рисунок будет очень громоздким и некрасивым. Поэтому при изображении графов часто всех рёбер и вершин не рисуют, оставляя только важную структуру графа.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** В общежитии живёт 214 студентов. Каждый час ровно 4 из них отправляются на кухню перекусить. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым на кухне ровно по одному разу?

**Задача 2.** В стране Ёжландия кандидат в президенты после выборов обещает сделать самолётное сообщение. При этом из столицы будет выходить 7 рейсов, из всех остальных городов — по 6, а из города Бобров — всего один рейс. Жители города Бобров считают, что теперь они даже с пересадками не смогут долететь до столицы. Докажите, что они ошибаются.

# 7 Комбинаторика-1

В задачах на комбинаторику, как правило, нужно найти количество тех или иных способов сделать что-нибудь — это может быть число способов составить число с заданными свойствами, рассадить за столом людей, если некоторые пары из них не хотят сидеть рядом, и так далее. Изучение этой темы следует начать с двух простых правил, из которых выводится множество других формул. Итак:

1. Правило сложения: если объект `A` можно выбрать $n$ способами, а объект `B` можно выбрать $m$ способами, то выбрать объект `A` **`или`** `B` можно $m+n$ способами.

2. Правило умножения: если объект `A` можно выбрать $n$ способами, а объект `B` можно выбрать $m$ способами, то выбрать объект `A` **`и`** `B` можно $m \cdot n$ способами.

Если вы новичок в этой теме, то при решении задачи следует каждый раз проговаривать про себя — какой союз нужно поставить «и» или «или», и умножать или складывать соответственно.

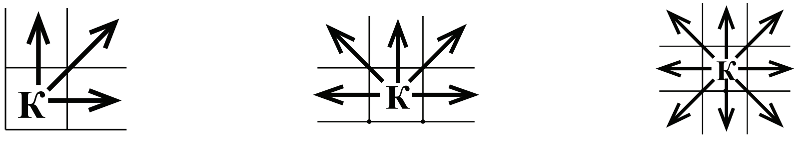
**Задача 1.** У хулигана Васи есть 5 разных камней, один из которых он выбирает и бросает в одно из 4 окон квартиры своего друга Пети. Сколькими способами он может это сделать?

**Решение.** Пользуемся правилом умножения: нужно выбрать камень, который он бросает **и** окно, в которое он его бросает. Итого получается $5 \cdot 4 = 20$ способов.

**Задача 2.** Сколькими способами на шахматной доске можно расставить двух королей — чёрного и белого, чтобы они не били друг друга.

**Решение.** Попробуем воспользоваться правилом умножения: первого короля можно расставить 64 способами — на любое поле. Но вот количество способов расстановки второго короля будет уже зависеть от того, куда мы поставили первого короля: в угол, на границу или на остальные поля.

Поэтому сначала придётся воспользоваться правилом сложения: первый король стоит в углу **или** на границе **или** на остальных полях.




а) б) в)

Рис. 9: Различные способы расстановки короля.

В первом случае король бьёт три поля, и ещё на одном стоит, поэтому второго короля можно поставить $64 - 4 = 60$ способами. Так как угловых поля всего 4, то расставить два короля в этом случае мы можем $4 \cdot 60$ способами — расставляем первого короля 4 способами **и** второго короля — 60 способами.

Граничных полей всего 24, значит первого короля мы можем поставить 24 способами **и** второго короля — $64 - 6 = 58$ способами (король, стоящей на границе, бьёт 5 полей и ещё одно поле занимает). То есть в этом случае есть $24 \cdot 58$ способов.

В третьем случае способов $36 \cdot 55$, по аналогичным соображениям. Итого, получается $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов.

Сформулируем ещё одно важное правило:

3. Правило деления: если каждый способ при подсчёте был учтён $n$ раз, то результат нужно поделить на $n$.

В разобранных задачах таких моментов ещё не возникало — каждый способ там был подсчитан ровно по 1 разу, что нельзя сказать про следующую задачу:

**Задача 3.** Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе ужин, если на ужин она съедает 2 мышки?

**Решение.** Воспользуемся правилом умножения: первую мышку она может выбрать 20 способами и вторую — 19 способами, так как одна мышка уже выбрана. Значит ответ — $19 \cdot 20$? А вот и нет. Дело в том, что мы каждый способ выбора мышек подсчитали по 2 раза. Действительно, рассмотрим двух мышек — Васю и Петю. Есть два способа: сначала выбран Вася, потом Петя, или наоборот — сначала Петя, а потом Вася. Поэтому искомое количество способов равно $19 \cdot 20/2 = 190$.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе завтрак, обед и ужин, если а) эти мышки были большими и ей достаточно одной, чтобы наесться? б) если мышки были средних размеров и на каждую трапезу ей необходимо по 2 мышки? в) если кошка на диете, и она пропускает один из приёмов пищи, при этом на одном из приёмов пищи она хочет съесть две мышки, а на другом — одну или две?

**Задача 2.** Сколько существует способов раскрасить таблицу $2 \times 3$ в 2 цвета — белый и чёрный, чтобы обязательно хотя бы одна клетка была белой и хотя бы одна клетка была чёрной?

# 8 Комбинаторика-2

Введём понятие числа сочетаний из $n$ объектов по $k$ объектов. По определению $C_n^k$ (читается как «Цэ из эн по ка») — это количество способов выбрать $k$ объектов из $n$. Например, это может быть количество способов взять 3 книги с полки, на которой стоит 10 книг, или выбрать 4 сорта колбасы из 12 для бутерброда.

Найдём число сочетаний $C_n^k$, пользуясь формулами умножения и деления. Первый объект можно выбрать $n$ способами. Второй объект уже можно выбрать $n-1$ способами, так как один объект уже выбран, следующий — $n-2$, и так далее. Последний, $k$-ый объект может быть выбран $n-k+1$ способами. Все эти числа нужно перемножить, потому что мы выбираем первый объект **и** второй **и** третий, и так далее. Но полученный результат нужно поделить на $k!$, так как каждый способ посчитан именно столько раз (это количество способов переставить выбранные объекты). Итого, получаем $C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Теперь мы можем ответить на вопрос о выборе книг: существует $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$ способов выбрать 3 книги из 10.

В частности, $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Формулы сокращённого умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ проходят в школе. А что произойдёт, если возводить в четвёртую, в пятую, и так далее степени? Оказывается, верна формула:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n b^0 + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^0 a^0 b^n.$$

Приведённая формула называется «Биномом Ньютона», именно поэтому числа сочетаний называют также биномиальными коэффициентами.

Треугольник Паскаля — это способ и записи и вычисления биномиальных коэффициентов (рис. 10) Нетрудно заметить, что он обладает следующим свойством: каждый элемент в нём равен сумме двух элементов, которые стоят сверху слева и сверху справа от него. Докажем это свойство: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. По определению, $C_n^k$ это количество способов выбрать k объектов из $n$. Все эти способы можно разбить на два случая:

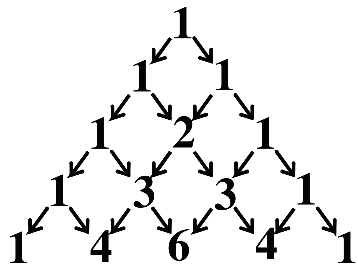



Рис. 10: Треугольник Паскаля.

1. Объект номер 1 был выбран, тогда из оставшихся $n-1$ объектов нужно выбрать $k-1$, это по определению $C_{n-1}^{k-1}$ способов.

2. Объект номер 1 выбран не был, тогда из оставшихся $n-1$ объектов нужно выбрать $k$, это по определению $C_{n-1}^k$ способов.

Так как возможен первый **или** второй случаи, то количество способов нужно сложить, что завершает доказательство.

Помимо приведённого свойства, треугольник Паскаля обладает ещё рядом красивых свойств.

**Задача 1.** Игральная колода состоит из 52 карт. Сколько имеется способов выбрать 6 карт, чтобы среди них встречались карты всех мастей?

**Решение.** Заметим, что есть два случая выбора мастей карт:

1. Какой-то масти было выбрано 3, а остальных по 1.

2. Каких-то двух мастей было выбрано по 2, а остальных по 1.

Найдём количество способов выбрать карты в первом случае. Сначала нужно выбрать «лидирующую» масть — ту, которой должно быть 3 карты. Это можно сделать $C_4^1 = 4$ способами. Теперь нужно выбрать 3 карты этой лидирующей масти. Это можно сделать $C_{13}^3$

способами, так как каждой масти по 13 карт. И наконец, каждую из оставшихся мастей можно выбрать $C_{13}^1$ способами. Перемножая все полученные числа, получаем $C_4^1 \cdot C_{13}^3 \cdot (C_{13}^1)^3$.

Количество способов во втором случае считается аналогично: способов выбрать две «лидирующие» масти $C_4^2$, по две карты каждой из этих мастей — $C_{13}^2$ и оставшиеся по $C_{13}^1$, итого $C_4^2 \cdot (C_{13}^2)^2 \cdot (C_{13}^1)^2$.

Значит общее число способов равно $\frac{1}{4} \cdot C_{13}^3 \cdot (C_{13}^1)^3 + C_4^2 \cdot (C_{13}^2)^2 \cdot (C_{13}^1)^2$. Как правило, в задачах на комбинаторику не обязательно доводить задачу до численного ответа, формул без многоточий вполне достаточно.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

а) среди них был ровно один туз?

б) среди них был хотя бы один туз?

в) среди них была хотя бы одна карта бубновой масти?

**Задача 2.** У Васи дома есть чай, кофе, какао, апельсиновый и яблочный соки, вода и кока-кола. Он решил составить себе меню напитков на завтрак, обед и ужин на 4 дня так, чтобы наборы напитков не совпадали (Васе не важно, на какой приём пищи он пил, например, чай, важно только, какие напитки он пил в течение дня). Сколькими способами он может это сделать?

# 9 Неравенство треугольника

Хотя задачи, в которых неравенство треугольников используется в чистом виде достаточно редки на олимпиадах, но в решении «больших» задач оно используется очень часто.

Давайте напомним основные свойства треугольников:

1. Напротив бóльшей стороны треугольника лежит бóльший угол.

2. Напротив бóльшего угла треугольника лежит бóльшая сторона.

3. Сумма двух любых сторон треугольника больше третьей стороны.

Последнее свойство часто так и называется «неравенством треугольника» и как раз оно чаще всего используется при решении задач.

**Задача 1.** В треугольнике длины двух сторон равны 1 и 2017 соответственно. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом.

Обозначив длины сторон за $a = 1$, $b = 2017$ и неизвестное $c$, получаем три неравенства:

$$\begin{gathered} 1 + 2017 > c \\ 1 + c > 2017 \\ 2017 + c < 1, \end{gathered}$$

откуда сразу следует, что $2016 < c < 2018$, следовательно, $c = 2017$.

**Задача 2.** Докажите, что в любом треугольнике длина любой стороны меньше половины периметра треугольника.

Обозначим длины сторон треугольника за $a, b, c$.

Для примера докажем, что $a < \dfrac{a+b+c}{2}$.

Известно, что $a < b + c$. Добавив $a$ к обоим частям неравенства, получим $2a < a + b + c$. Разделив обе части неравенства на положительное число 2, получаем искомое утверждение. Утверждения для $b$ и $c$ доказываются аналогично.

**Задача 3.** Докажите, что в четырёхугольнике любая диагональ меньше половины периметра.

Введём обозначения длин сторон четырёхугольника как $a, b, c, d$ (рис. 11).

Рассмотрим диагональ $AC$, обозначим её длину через $e$.

Тогда по третьему свойству

$$a + b > e$$
$$c + d > e$$

Сложив обе части неравенства (а мы можем это сделать для неравенств с одинаковым знаком), получаем

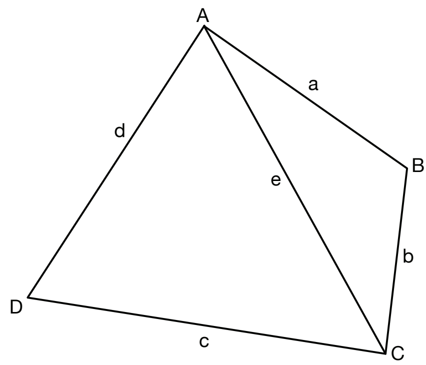



Рис. 11: Четырёхугольник.

$$a + b + c + c > 2e,$$

откуда, после деления на положительное число 2 получаем исходное утверждение.

Обратите внимание, что при составлении неравенства мы не использовали свойство выпуклости четырёхугольника, поэтому утверждение верно для произвольных четырёхугольников.

**Задача 4.** Верно ли, что для любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

**Решение.** Эта задача подходит также под тему «Примеры и конструкции», так как достаточно предъявить 10 отрезков, из которых выбрать любые три отрезка, из которых составить треугольник невозможно.

Давайте рассмотрим набор из следующих 10 отрезков: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Положим, что существует треугольник со сторонами $a < b < c$. По значениям предложенных длин отрезков, $a < \frac{c}{2}$ и $b \leqslant \frac{c}{2}$. Складывая неравенства, получаем $a + b < c$, что противоречит правилу треугольника.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Докажите, что сумма диагоналей любого выпуклого четырёхугольника меньше его периметра, но больше половины периметра.

**Задача 2.** Угол при вершине О треугольника ЛОШ равен $60^\circ$. Докажите, что ЛО + ОШ $<$ 2ЛШ.

# 10 Подобные треугольники и подсчёт углов

Зачастую многие, решая задачи по геометрии, забывают сделать самую простую вещь — рассмотреть всевозможные углы, возникающие в данной задаче. Для нахождения, то есть «подсчёта» углов во многих задачах достаточно знаний о сумме углов треугольника, равенстве вертикальных углов, сумме смежных углов, углах при параллельных прямых и углах в окружности. Обычно имеет смысл ввести одну, две, и в редких случаях три переменных.

Вспомним три признака подобных треугольников. Треугольник $ABC$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если:

1. $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$
2. $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$
3. $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Посчитав все возможные углы, которые можно найти в данной задаче, намного проще обнаружить подобные треугольники. Обычно на рисунке довольно много треугольников, и обнаружение подобных требует некоторой сноровки. Часто подсчёт углов помогает обнаружить равнобедренные треугольники.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $C$, из которого проведена высота $CH$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle ACH \sim \triangle BCH$ — в этом можно убедиться простым подсчётом углов. Из подобия треугольников $ACH$ и $BCH$ в частности следует, что $AH : CH = CH : BH \Rightarrow CH = \sqrt{AH \cdot BH}$ (рис. 12), то есть высота, проведённая из прямого угла, равна среднему геометрическому отрезков, на которые она делит гипотенузу.

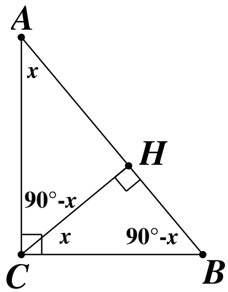



Рис. 12: Свойство высоты прямоугольного треугольника.

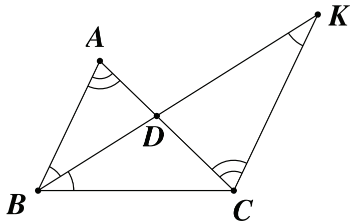



Рис. 13: Свойство биссектрисы треугольника.

**Свойство биссектрисы**: в произвольном треугольнике $ABC$ проведём биссектрису $BD$. Тогда $AB : BC = AD : DC$. Докажем это. Проведём через точку $C$ прямую, параллельную $AB$, до пересечения с продолжением биссектрисы $BD$ в точке $K$. Тогда $\angle ABK = \angle KBC$ из определения биссектрисы, а $\angle ABD = \angle DKC$ из параллельности прямых $AB$ и $CK$. Отсюда $\angle BKC = \angle KBC$, значит треугольник $BCK$ равнобедренный: $BC = CK$. Треугольники $ABD$ и $CKD$ подобны по трём углам, отсюда $AD : DC = AB : CK$. Но так как $BC = CK$, то $AD : DC = AB : BC$, что и требовалось доказать (рис 13).

**Задача 1.** (замечательное свойство трапеции). Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

**Решение.** Разобьём задачу на две:

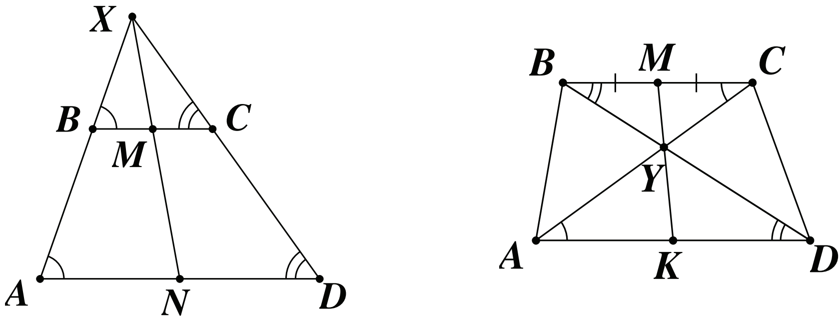
1. Доказать, что середины сторон и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

2. Доказать, что середины сторон и точка пересечения диагона-

лей лежат на одной прямой.

Обозначим трапецию $ABCD$. Пусть $M$ — середина меньшей стороны $BC$.

1) Пусть $X$ — точка пересечения продолжения боковых сторон. Проведём через точки $X$ и $M$ прямую. Пусть она пересекла сторону $AD$ в точке $N$. Докажем, что $N$ — середина основания $AB$ (рис.14а). Треугольники $XMB$ и $XAN$ подобны по трём углам, значит, выполняется соотношение: $XM/XN = BM/AN$. Аналогично, из подобия треугольников $XMC$ и $XND$ получаем, что $XM/XN = MC/ND$, отсюда получаем, что $BM/AN = MC/ND$, но так как $BM = MC$, то и $AN = ND$.




а) б)

Рис. 14: Замечательное свойство трапеции.

2)Пусть $Y$ — точка пересечения диагоналей. Проведём через точки $M$ и $Y$ прямую. Пусть она пересекла сторону $AD$ в точке $K$. Докажем, что $K$ — середина основания $AB$ (рис.14б).
Треугольники $YMB$ и $YKD$ подобны по трём углам, значит, выполняется соотношение: $MY/YK = BM/KD$. Аналогично, из подобия треугольников $YMC$ и $YKA$ получаем, что $MY/YK = MC/AK$, отсюда: $BM/KD = MC/AK$, но так как $BM = MC$, то и $AK = KD$.

Точки $N$ и $K$ совпадают — это середина стороны $AD$. С одной стороны, мы доказали, что $M$,$N$ и $X$ лежат на одной прямой, а с другой — что точки $M$, $N$ и $Y$ лежат на одной прямой — значит все эти 4 точки лежат на одной прямой.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $BB_1$. Докажите, что $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

**Задача 2.** Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивает её диагонали на 3 части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

# 11 Графы-2

Напомним, что такое граф. **Граф** — это набор вершин, некоторые из которых соединены рёбрами. При этом в графе не важно, как мы рисуем расположение вершин, или пересекаются ли рёбра на нашем рисунке или нет — один и тот же граф может быть изображён различными способами, важен факт соединения конкретных вершин.

Дадим несколько определений:

**Определение.** Графы называются **равными** (изоморфными), если они имеют одинаковое количество вершин, и эти вершины можно занумеровать таким образом, что вершины соединены в первом графе тогда и только тогда, когда вершины с такими же номерами соединены во втором графе.

**Определение.** Граф называется **связным**, если из любой его вершины можно добраться до любой другой, перемещаясь по рёбрам.

Любой граф, не являющийся связным, разбивается на связные части, называемые **компонентами связанности** графа.

**Определение. Циклом** в графе называется путь, который начинается и заканчивается в одной вершине, и при этом не проходит ни через одну из других вершин дважды.

Например на рис. 15 $B-C-D-E-B$ и $F-G-H-F$ — это циклы.

**Определение. Дерево** — это связный граф без простых циклов. У дерева количество рёбер на одно меньше количества вершин.

**Определение.** Граф называется **планарным**, если его можно так изобразить на плоскости, чтобы у него не пересекались рёбра (рёбра графа не обязательно должны быть прямыми отрезками!).

**Гранями** планарного графа называются циклы, которые не могут быть разбиты на более мелкие циклы. Для планарных графов выполняется формула Эйлера: $\text{Г} + \text{В} - \text{Р} = 1$, где Г— число граней,

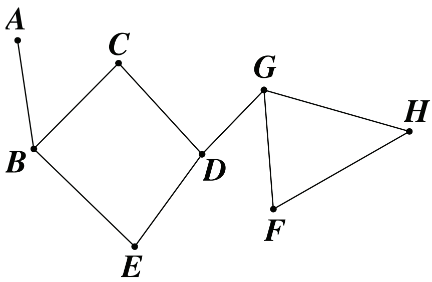
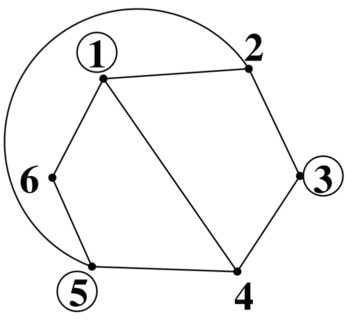



Рис. 15: Пример графа.

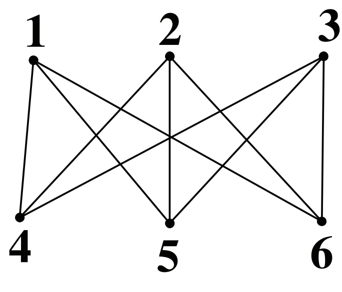
В — число вершин и Р — число рёбер.

**Задача 1.** Есть три дома и три магазина — продуктовый, винный и хозяйственный. Можно ли от каждого дома проложить тропинку до каждого из магазинов так, чтобы тропинки не пересекались?

**Решение.** Без труда строится пример, в котором проведены все тропинки, кроме одной, а вот как бы мы ни старались, последнюю провести не получается. (рис. 16а)




а) «почти пример»




б) все тропинки проведены

Рис. 16: К задаче о домах и магазинах.

Пусть дома и магазины — это вершины графа, а тропинки — это рёбра. Пусть вершины под номерами 1, 2 и 3 — это дома, а 4, 5 и 6 — магазины (рис. 16б). Количество вершин — 6, количество рёбер — 9. Для того, чтобы граф был планарным, необходимо, чтобы у него было количество граней, равное $\Gamma = \text{Р} + 1 - \text{В} = 9 + 1 - 6 = 4$. Но можно насчитать по крайней мере 5 циклов: $1-4-2-5-1$; $1-4-3-6-1$; $2-5-3-6-2$; $1-6-2-4-1$; $2-6-3-4-2$. Мы установили, что граф не является планарным, и, значит, его нельзя изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались.

**Задача 2.** Дана волейбольная сетка размером 12 на 25 квадратиков. Какое наибольшее число верёвочек можно разрезать так, чтобы сетка не распалась?

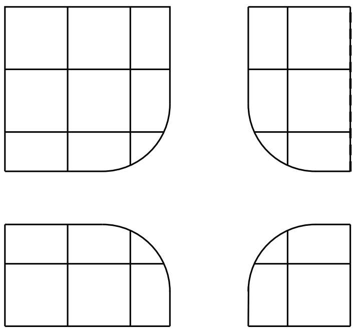


Рис. 17: Волейбольная сетка.

**Решение.** Представим сетку в виде графа, где узелки — это вершины, а верёвочки — рёбра. Нам требуется удалить как можно больше рёбер, чтобы граф при этом оставался связным. Будем поступать следующим образом: пока в графе есть цикл, можно убрать одно ребро из этого цикла. При этом граф останется связным. Будем «резать» циклы до тех пор, пока не останется ни одного. Связный граф без циклов — это дерево. В оставшемся графе будет $13 \cdot 26 = 338$ вершин, значит, в нём будет $338 - 1 = 337$ рёбер. А вначале в графе было $13 \cdot 25 + 12 \cdot 26 = 637$ рёбер. Поэтому можно разрезать максимум $637 - 337 = 300$ верёвочек. Больше ни одной верёвочки разрезать не получится — дерево при удалении любого из рёбер перестаёт быть связным.

Заметим, что в условии задачи присутствует слово «наибольшее» — это значит, что она на оценку и пример. В данном случае и оценка и пример идут бок о бок, из построения примера следует доказательство оценки.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Можно ли между каждыми двумя из 5 городов провести дорогу так, чтобы эти дороги не пересекались?

**Задача 2.** Докажите, что в любом планарном графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

# 12 Метод полной математической индукции

Напомним метод математической индукции: он состоит из базы индукции (утверждение 1) и индукционного перехода (из $n$-ого утверждения следует $n+1$-ое утверждение).

$$Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to \dots \to Y_n \to Y_{n+1} \to \dots$$

Особенность метода *полной* математической индукции в том, что при доказательстве утверждения номер $n+1$ можно пользоваться истинностью всех утверждений от номера 1 до номера $n$. Формально это можно записать так:

$$\text{из } \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} \text{ следует } Y_{n+1}.$$

Обычно при применении метода полной математической индукции используются лишь несколько предыдущих утверждений, а не сразу все. Можно привести следующую аналогию: если метод математической индукции можно было представить, как набор домино, и чтобы упало текущее домино, её должна была «подтолкнуть» предыдущая. А теперь домино каким-то образом ещё связаны некими шарнирами, и для того, чтобы упало $n+1$-ое домино, должны упасть все домино, с которыми она соединена.

**Задача 1.** Известно, что число $x+\dfrac{1}{x}$ является целым. Доказать, что при любом натуральном $n$ число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ также является целым.

**Решение.** Докажем сначала утверждение для $n=2$: действительно, возведём $x+\dfrac{1}{x}$ в квадрат: отсюда $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ — целое число, а значит и $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ — также целое.

Попробуем доказать утверждение под номером $n+1$: требуется доказать, что $x^{n+1}+\dfrac{1}{x^{n+1}}$ — целое. Утверждение под номером $n$

утверждает, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ — целое, а утверждение 1: $x + \dfrac{1}{x}$ — целое. Перемножим эти два числа, отсюда получается, что $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$ — также целое число. Но $n-1$-ое утверждение гласит, что $x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$ — целое число, а отсюда следует, что и $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}$ — также целое число, что и требовалось.

Заметим, что в решении этой задачи мы доказали $Y_{n+1}$, пользуясь $Y_n$, $Y_{n-1}$ и $Y_1$. То есть $n+1$-ое домино соединено шарнирами с $n$-й, $n-1$-й и 1-й домино.

**Задача 2.** Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое, начиная с шести, количество квадратов.

**Решение.** Попробуем сначала разрезать квадрат хотя бы на какое-нибудь число квадратов. Очевидно, каким образом квадрат разрезается на 4 части. Немного поразмыслив, можно найти и способ разрезания на 6 и на 8 частей. (рис.18)

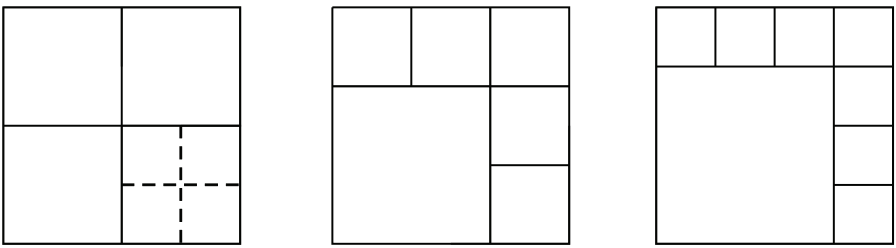


Рис. 18: Разбиение квадрата на 4, 7, 6 и 8 частей.

Заметим теперь, что если мы, например, хотим разрезать квадрат на 7 частей, то достаточно разрезать его на 4 части, а потом один из кусков снова разрезать на 4 части. Вообще, если какой-то квадрат разрезан на $n$ частей, то при разрезании любого из его квадратов на 4 части получается $n+3$ части, то есть выполняется следствие $Y_n \to Y_{n+3}$ для любого $n$. Выполняются цепочки следствий:

- $Y_6 \to Y_9 \to Y_{12} \to Y_{15} \to \ldots$
- $Y_7 \to Y_{10} \to Y_{13} \to Y_{16} \to \ldots$
- $Y_8 \to Y_{11} \to Y_{14} \to Y_{17} \to \ldots$

То есть для того, чтобы запустить домино, нужно, чтобы выполнялись $Y_6$, $Y_7$ и $Y_8$. Но в этом мы уже убедились.

Можно сказать, что в рассмотренной задаче — три независимых цепочки домино, и чтобы все три запустились, база должна быть сложной — состоять из трёх утверждений. Применяя полную индукцию, нужно внимательно следить за выполнением сложной базы, иначе не запустится «цепная реакция».

**Задача 3.** При каких $n > 3$ набор гирь с массами $1, 2, 3, \ldots, n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?

**Решение.** Чтобы гири можно было разделить требуемым образом, суммарная масса гирь должна делиться на 3. Сумма масс от 1 до $n$ равна $n(n+1)/2$, и поэтому $n$ может давать только остатки 0 или 2 при делении на 3.

Если можно разбить на три равные по массе кучки набор из $n$ гирек, то и набор из $n+6$ гирек тоже можно разбить требуемым образом, поскольку гири массами $n+1, n+2, \ldots, n+6$ легко разложить на три равные по массе кучки.

Легко проверить, что при количестве гирек, равных числам 5, 6, 8 или 9, то существуют требуемые разбиения:

- $1+4=2+3=5;$
- $1+6=2+5=3+4;$
- $1+2+3+6=4+8=5+7;$

- $1+2+3+4+5=6+9=7+8$.

Значит, разбить можно все наборы из количества гирь, дающего остатки 0 или 2 при делении на 3.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Доказать, что сумма модулей любого количества чисел не меньше модуля суммы этих чисел.

**Задача 2.** Доказать, что любое число можно представить в виде суммы различных степеней двойки.

**Задача 3.** Любую ли сумму из целого числа рублей, большую семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

# 13 Вписанные четырёхугольники

Как известно, вокруг любого треугольника можно описать окружность. Для четырёхугольников это, вообще говоря, не так, и для проверки можно воспользоваться одним из критериев: (см. рис. 19)

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан $\Leftrightarrow$ сумма его противоположных углов равна $180°$.
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан $\Leftrightarrow$ углы, опирающиеся на одну сторону равны (заметим, что всего есть 4 пары таких углов, и равенства углов из одной пары — достаточно).
3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан $\Leftrightarrow$ $AT \cdot CT = BT \cdot DT$, где $T$ — точка пересечения диагоналей.
4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан $\Leftrightarrow$ $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ (теорема Птолемея).

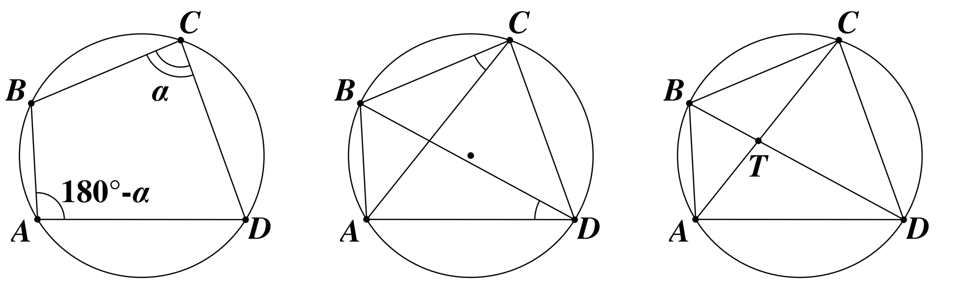



Рис. 19: Критерии вписанного четырёхугольника

**Задача 1.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведена прямая, которая пересекает окружности в точках $C$ и $D$ соответственно, а через точку $B$ проведена прямая, которая пересекает окружности в точках $E$ и $F$ соответственно. Докажите, что $CE \parallel DF$. (рисунок 20)

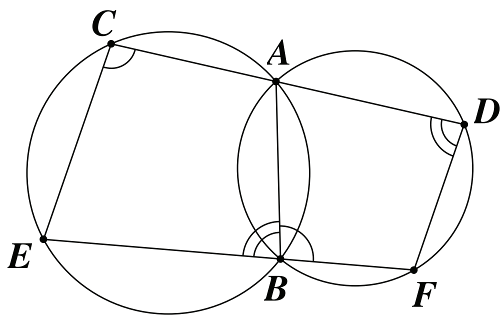



Рис. 20: Чертёж к задаче 1.

**Решение.** На рисунке присутствуют два вписанных четырёхугольника: $ABEC$ и $ADFB$. Воспользуемся первым критерием для $ABEC$: пусть $\angle ECA = \alpha$, тогда $\angle EBA = 180° - \alpha$. Угол $ABF$ равен $\alpha$ как смежный к углу $EBA$, и по первому критерию для $ABDF$ получаем, что $\angle ADF = 180° - \alpha$. Сумма углов $ECD$ и $CDF$ равна $180°$, а, следовательно, прямые $CE$ и $DF$ параллельны.

**Задача 2.** На сторонах остроугольного треугольника $ABC$ внешним образом построены правильные треугольники $ABC_1$, $BCA_1$ и $ACB_1$. Докажите, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке и равны по длине (рисунок 21).

**Решение.** Пусть отрезки $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $T$. Докажем, что точки $C$, $T$ и $C_1$ лежат на одной прямой — это и будет означать, что все три отрезка $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

$\triangle B_1CB = \triangle ACA_1$, так как $B_1C = AC$, $BC = CA_1$ и $\angle B_1CB = \angle ACA_1 = 60° + \angle ACB$. Отсюда $\angle AA_1C = \angle BB_1C$ и $\angle CAA_1 = \angle CB_1B$. Четырёхугольник $CTBA_1$ является вписанным, так как в нём два угла опираются на одну сторону (2 критерий): $\angle CA_1T = \angle CBT$. Значит у него сумма противоположных углов равна $180°$. А так как $\angle CA_1B = 60°$, то $\angle CTB = 120°$. Аналогично, четырёх-

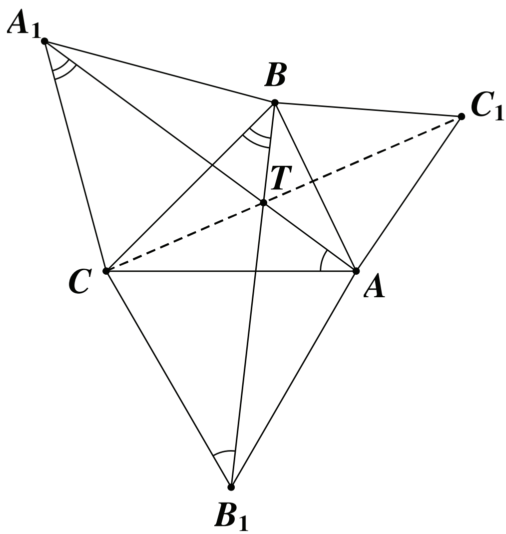



Рис. 21: Чертёж к задаче 2.

угольник $ATCB_1$ является вписанным, и $\angle CTA = 120°$.

Найдём угол $ATB$, он равен $360° - \angle ATC - \angle BTC = 360° - 120° - 120° = 120°$. Отсюда четырёхугольник $ATBC_1$ также является вписанным, так как сумма его противоположных углов равна $180°$. Из вписанности этого четырёхугольника $\angle ATC_1 = \angle ABC_1 = 60°$ (2 критерий). Следовательно, $\angle CTC_1 = \angle CTA + \angle ATC_1 = 120° + 60° = 180°$, что и означает принадлежность одной прямой точек $C, T$ и $C_1$.

Равенство отрезков $AA_1$ и $BB_1$ следует из равенства треугольников $B_1CB$ и $ACA_1$. Равенство отрезков $AA_1$ и $_1$ аналогичным образом следует из равенства треугольников $AA_1B$ и $C_1BC$.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** $ABCD$ — вписанный в окружность радиуса $R$ четырёхугольник, $AC \perp BD$, $P$ — точка пересечения диагоналей.

а) Найти $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.
б) Найдите сумму квадратов сторон $ABCD$.

**Задача 2.** Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Описанные окружности треугольников $AOB$ и $COD$ пересекаются в точке $M$ на стороне $AD$. Доказать, что $O$ — центр вписанной окружности треугольника $BMC$.

# 14 Счётные методы в геометрии

Хотя обычно задачи по геометрии, которые встречаются на олимпиадах, имеют красивое геометрическое решение, счётные методы зачастую помогают доказать некоторые утверждения, или даже найти решение всей задачи.

Самым громоздким способом является метод координат, который обычно не применим для более-менее сложных задач: возникает слишком много формул, работать с которыми без помощи компьютера очень сложно, а одна ошибка — и всё решение оказывается неверным.

Здесь пойдёт речь о некоторого рода «костылях» — теоремах, которые помогают понять, как связаны между собой отрезки и углы. При этом, для решения задачи не обязательно выписывать все счётные теоремы, их может оказаться слишком много, чтобы можно было разумно с ними работать. Приведём несколько полезных теорем:

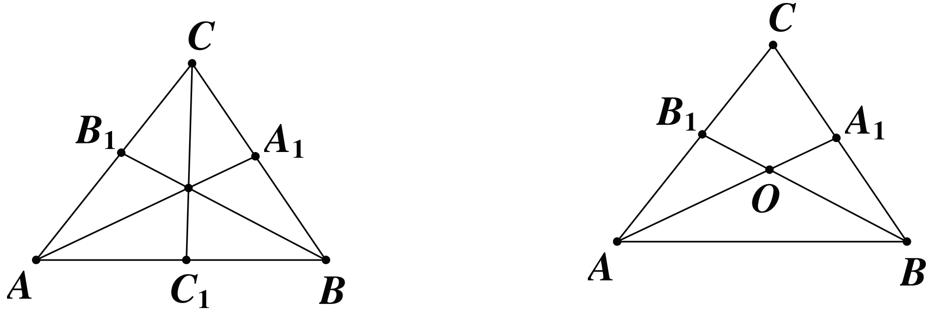
**Теорема Чевы:** Дан треугольник $ABC$ и точки $A_1$,$B_1$, $C_1$ на его сторонах $BC$,$AC$,$AB$ соответственно. Тогда отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда (рис. 22а)

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

**Теорема о пропорциональных отрезках:** Дан треугольник $ABC$ и точки $A_1$ и $B_1$ на его сторонах $BC$ и $AC$ соответственно. Пусть $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $O$. Тогда (рис. 22б)

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \left(1 + \frac{CA_1}{A_1B}\right).$$

**Задача 1.** В треугольнике $ABC$ площадью 1 точка $D$ расположена на отрезке $BC$ и делит его в отношении $BD : DC = 1 : 2$, а




а)Чевы.

б)О пропорциональных отрезках.

Рис. 22: Счётные теоремы для треугольника.

точка $E$ лежит на середине отрезка $AB$. Отрезки $CE$ и $AD$ пересекаются в точке $G$. Найти площадь треугольника $AGE$.

**Решение.** Проведём луч $BG$, который пересечёт отрезок $AC$ в точке $F$ (рис. 23).

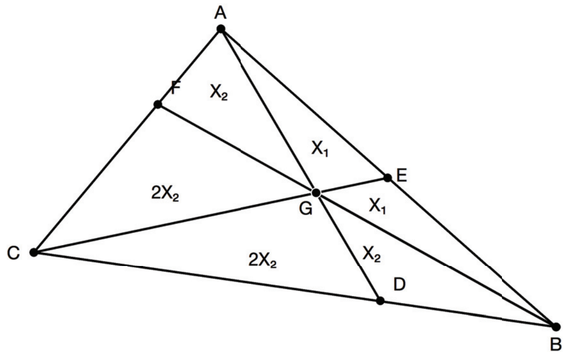



Рис. 23:

По теореме Чевы

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1,$$

отсюда $AF : FC = 1 : 2$. Обозначим площадь треугольника $AGE$ как $x_1$, а треугольника $AGF$ как $x_2$. $S_{BEG} = S_{AEG} = x_1$, так как у треугольников $BEG$ и $AEG$ одинаковое основание и общая высота.

$S_{CFG} = 2x_2$. Так как и $S_{ADB} = \frac{1}{3}$, и $A_{ABF} = \frac{1}{3}$, то $S_{BDG} = x_2$, а $S_{CDG} = 2x_2$, так как у треугольников $AFG$ и $CFG$ общая высота, а основания отличаются в два раза.

$S_{ADC} = 5x^2 = \frac{2}{3}$, отсюда $x_2 = \frac{2}{15}$. $S_{ABF} = x_2 + x_1 + x_1 = \frac{1}{3}$, отсюда $x_1 = \frac{1}{10}$.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ выбрана точка $D$ так, что $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$. Докажите, что угол $ACB$ — тупой.

# 15 Инвариант и полуинвариант

Напомним, что такое инвариант: это некоторая величина, которая остаётся неизменной при проводимых преобразованиях.

Полуинвариант тоже имеет постоянное при преобразованиях свойство, только он, в отличие от инварианта, величина не постоянная, а монотонно изменяющаяся (увеличивающаяся или уменьшающаяся). Понять присутствие полуинварианта в задаче нам помогает наличие «процесса» в задаче.

Можно использовать инвариант как для доказательства того, что какое-то условие недостижимо, так и для понимания, какие изменения могут происходить при действиях, описанных в задаче. Если мы обнаружили в задаче строго уменьшающийся полуинвариант, который может принимать конечное количество значений, то рано или поздно его минимальное значение будет достигнуто.Аналогичная ситуация возникает при строго увеличивающемся инварианте. Если мы знаем, на какое число за один ход может уменьшаться полуинвариант, мы можем оценить количество ходов, через которое достигается минимум.

**Задача 1.** На плоскости дано 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что их можно разбить на пары и провести 50 отрезков между точками пар так, чтобы никакие два из них не пересекались.

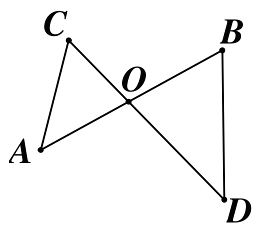


Рис. 24: Замена отрезков.

**Решение.** То, что эта задача находится в кванте с данной темой даёт нам отличную подсказку, ведь пока мы не видим в данной задаче никакого процесса. Ну что же, попробуем его запустить. Сначала разобьём точки произвольным образом на пары, и проведём 50 отрезков. Очень похоже на то, что точек пересечений будет очень много. Процесс будет заключаться в совершении «ходов» (рисунок

24): если отрезки $AB$ и $CD$ пересекались, то сотрём их и проведём отрезки $AC$ и $BD$. Общее количество отрезков не изменилось. Что-то должно при этом уменьшиться, ведь мы ищем полуинвариант. Может, это количество всевозможных точек пересечений отрезков? Нет, к сожалению это не так. Если мы уберём одно пересечение, у нас может возникнуть сразу несколько новых.

Примем за полуинвариант сумму длин всех отрезков. Действительно, из неравенства треугольника $AO+CO > AC$, а $BO+DO > BD$, а, значит, $AB + CD > AC + BD$. Длины остальных отрезков при этом не поменяются. Существует конечное, пусть и очень большое число разбить точки на пары (вычислите его, используя комбинаторику). Однажды обработанная четвёрка точек больше никогда обрабатываться не будет, количество возможных четвёрок точек конечно $\rightarrow$ следовательно, рано или поздно процесс прекратится. В полученном разбиении на пары никакие два отрезка уже не пересекутся — если бы они пересеклись, то можно было бы сделать ещё хотя бы один ход.

**Задача 2.** На шахматной доске $100 \times 100$ королю разрешено ходить вправо, вверх, вправо-вниз или вправо-вверх по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

**Решение.** Задача, как будто бы, простая, но для доказательства недостаточно гуманитарных рассуждений. Попробуем найти в задаче инвариант, который всё время увеличивается. Если ввести систему координат (рис. 25), то ход вправо будет увеличивать абсциссу на 1, ход вверх — ординату на 1, а ход вправо-вверх и абсциссу и ординату. Единственным «плохим» ходом будет ход вправо вниз, он увеличивает абсциссу на 1, но уменьшает ординату.

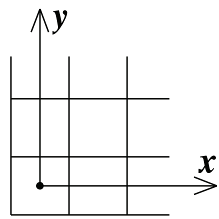


Рис. 25: Система координат.

Рассмотрим, как меняется сумма абсциссы и ординаты. В первых трёх случаях она увеличивается, и лишь в четвёртом остаётся прежней. Но оставаться прежней она может лишь ограниченное число ходов, так как при таких ходах увеличивается абсцисса, а она ограничена числом 99. Поэтому хотя бы каждый 99-ый ход полуинвариант увеличится, но доска ограничена верхним правым полем, где он равен $99 + 99 = 198$, поэтому рано или поздно нельзя будет сделать ход.

Можно предложить другой полуинвариант: $2x + y$, где $x$ — абсцисса, а $y$ — ордината. Действительно, при ходе вверх эта величина увеличивается на 2, при ходе вправо на 1, при ходе вправо-вверх на 3 и при ходе вправо-вниз на 1. Но эта величина ограничена правым верхним полем, где она равна $2 \cdot 99 + 99 = 297$, значит, процесс рано или поздно завершится. Мы видим, что в качестве полуинварианта мы можем использовать любую удобную нам формулу, важно только, чтобы после очередного хода полуинвариант менялся нужным нам образом.

**Задача 3.** В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя.

**Решение.** Данная задача выглядит сложнее, чем предыдущие. Догадаться до выражения, которое даст нам полуинвариант, достаточно тяжело, но он тут есть. На самом деле, пусть каждому положению карт соответствует 52-значное число из единиц и двоек, составленное следующим образом: на $k$-м месте справа стоит «1», если $k$-я карта снизу лежит рубашкой вверх, и «2» в противном случае. Тогда после каждого преобразования это число уменьшается. Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т. е. найдём самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра «2» сменилась на «1». Поскольку количество 52-значных чисел конечно, в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадёт с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

**Задача 2.** На квадратном поле $100 \times 100$ на девяносто девяти клетках сидят кролики. После этого на какой-то клетке, у которой не менее двух соседних клеток уже заняты кроликами, может тоже появиться кролик. Докажите, что, тем не менее, кролики никогда не займут все клетки.

# 16 Сравнения по модулю

Почти в каждой олимпиаде встречаются задачи, в которых и коэффициенты, и переменные могут принимать только целочисленные значения. Это — так называемые задачи в целых числах. В этом разделе мы будем рассматривать только такие задачи. Один из мощнейших инструментов решения таких задач — модульная арифметика.

**Определение.** говорят, что числа $a$ и $b$ *сравнимы по модулю* $x$, если их разница делится на $x$. Записывают это как $a \equiv b \pmod{x}$, или как $a = b \pmod{x}$.

Нетрудно убедиться в равносильном утверждении: Числа $a$ и $b$ сравнимы по модулю $x$, тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый остаток при делении на $x$.

Сравнивать по модулю можно также и отрицательные числа: Например, $13 \equiv 7 \pmod{3}$ или $11 \equiv -3 \pmod{7}$.

Если $a \equiv 0 \pmod{x}$, то $a$ делится на $x$.

Со сравнениями по модулю можно работать так же, как и с обычными равенствами: их можно складывать, умножать и возводить в степень: если $a \equiv b \pmod{x}$ и $c \equiv d \pmod{x}$, то

1. $a + c \equiv b + d \pmod{x}$;

2. $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{x}$;

3. $a^n \equiv b^n \pmod{x}$ для любого натурального $n$.

Так как речь идёт о целых числах, о делении говорить не будем, хотя его в ряде случаев можно определить как операцию, обратную умножению: например так как $3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{5}$, то $2/3 \equiv 4 \pmod{5}$, но эта операция определима не для всех значений модулей.

Порой использование сравнений по модулю позволяет существенно уменьшить сложность вычислений. Рассмотрим это на примере:

**Задача 1.** Найти остаток от деления $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^3$ при делении на 7.

**Решение.** Найдём остаток от деления 2013 на 7. Разумеется, это можно сделать, использовав деление в столбик, но мы, как участники олимпиад, вспомним красивый факт: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, откуда число 2002 делится на 7, то есть $2002 \equiv 0 \pmod 7$, но $11 \equiv 4 \pmod 7$, откуда $2002 + 11 \equiv 0 + 4 = 4 \pmod 7$. Значит $2014 \equiv 5 (\bmod 7)$ и $2015 \equiv 6 (\bmod 7) \Rightarrow 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \equiv 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \equiv 1 (\bmod 7)$ $2016 \equiv 0 (\bmod 7)$, а значит $2016^3 \equiv 0^3 (\bmod 7)$. Окончательно: $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^3 \equiv 1 + 0 = 1 (\bmod 7)$.

В некоторых случаях удобнее перейти к отрицательным числам: например $8^{100} \equiv (-1)^{100} = 1 (\bmod 9)$.

Когда мы используем сравнения по модулю, многие из известных признаков делимости открываются нам с новой стороны. Например, признаки делимости на 9 и на 3 выглядят следующим образом:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1 + a_0 (\bmod 9)$$

и

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1 + a_0 (\bmod 3).$$

Одним из методов решения задач на делимость является перебор остатков. В некоторых задачах найти модуль, по которому перебираются остатки, не составляет труда, в других — его ещё нужно угадать.

**Задача 2.** Доказать, что ни при каких целых $n$ число $n^2+3n+4$ не делится на 9.

**Решение.** Целое число может давать остатки $0, 1, 2, \ldots, 8$ при делении на 9. Переберём все эти случаи. Для удобства запишем остатки в виде таблицы:

| $n \pmod 9$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2 \pmod 9$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 |
| $3n \pmod 9$ | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 |
| $n^2+3n+4 \pmod 9$ | 4 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 4 | 2 | 2 |

Рассмотрим, например, случай, когда $n$ даёт остаток 5 при делении на 9. Тогда $n \equiv 5 \pmod 9 \Rightarrow n^2+3n = 4 \equiv 5^2+3\cdot 5+4 = 25+15+4 \equiv 7+6+4 = 17 \equiv 8 \pmod 9$; остальные случаи разбираются аналогично. Видим, что ни в одном случае не получился остаток 0, а это значит, что данное выражение не делится на 9 ни при каких целых $n$.

**Задача 3.** Может ли число, составленное из 13 двоек, 13 троек, 13 четвёрок и 13 пятёрок быть полным квадратом?

**Решение.** Докажем, что это невозможно. Так как речь в задаче идёт о числе, цифры которого известны, но не известен их порядок, воспользуемся признаком делимости на 3. Обозначим число за $N$.

Тогда сумма цифр числа $N$ равна $13(2+3+4+5)$. По признаку делимости, получаем: $N \equiv 13\cdot 14 \equiv 1\cdot 2 = 2 \pmod 3$.

Посмотрим, может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 по модулю 3, как и в предыдущей задаче разберём случаи:

| $x \pmod 3$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x^2 \pmod 3$ | 0 | 1 | 1 |

Делаем вывод — квадрат натурального числа не может давать остаток 2 по модулю 3, значит, составить квадрат из всех данных цифр невозможно.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Натуральные числа $x$, $y$, $z$ таковы, что $x^2+y^2=z^2$ (то есть, образуют «Пифагорову тройку»). Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

**Задача 2.** Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

**Задача 3.** Сколько существует натуральных чисел $n$, меньших 2014, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

# 17 Комбинаторика в теории чисел

Задачи на теорию чисел достаточно часто встречаются в разнообразных олимпиадах. Давайте вспомним основные теоретические факты. В данном кванте мы будем иметь дело только с натуральными и иногда с целыми числами.

Что такое простое число мы уже знаем. заметим, что все натуральные числа делятся на три непересекающихся множества — множество простых чисел, множество составных чисел и единицу (да-да, она не является простым числом и мы скоро поймём почему).

Основная теорема арифметики гласит, что любое натуральное число, отличное от единицы, единственным образом раскладывается на произведение простых чисел в соответствующих степенях.

$$M = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

где $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ — простые числа, а $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Мы видим, что если бы единицу мы назначили бы простым числом, то такое разложение не было бы единственным.

Количество всех делителей числа можно определить комбинаторно. Давайте при поиске всех делителей включать в количество этих делителей единицу и само число. Тогда задача сводится к элементарной комбинаторной задаче: имеется $n$ кучек предметов, размер $i$−й равен $\alpha_i$. Из каждой кучки можно взять любое количество предметов, а можно ничего не брать. Сколько различных комбинаций можно получить? Ответ прост: каждая из кучек даёт нам $\alpha_i + 1$ независимых вариантов выборки. Следовательно, общее количество вариантов будет $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$.

**Задача 1.** Число имеет 9 делителей, включая единицу и само число, причём их сумма равна 217. Найти число.

**Решение.** Мы уже знаем формулу количества делителей числа. Имеется две возможности получить 9 как произведение одного и более множителей — $9 = 9$ и $9 = 3 \cdot 3$. Первый случай даёт нам $x = p_1^8$, даже при наименьшем возможном $p_1 = 2$ значение $x = 256$, что больше 217. Второй случай даёт нам вариант $x = p_1^2 p_2^2$ и ровно 9 делителей, сумма которых $s = 1+p_1+p_1^2+p_2+p_1p_2+p_1^2p_2+p_2^2+p_1p_2^2+p_1^2p_2^2$. Как хорошо раскладывается на множители это выражение!

$$s = (1+p_1+p_1^2)+p_2(1+p_1+p_1^2)+p_2^2(1+p_1+p_1^2) = (1+p_1+p_1^2)(1+p_2+p_2^2).$$

Геометрическая прогрессия? Это она.

$$s = \frac{p_1^3 - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^3 - 1}{p_2 - 1} = 217$$

Нам нужно найти представление числа 217 в виде произведения двух сумм геометрической прогрессии. $217 = 7 \cdot 31$, разложение единственное. Поэтому $p_1 = 2, p_2 = 5; x = 2^2 5^2 = 100$.

**Задача 2.** Сколькими нулями заканчивается 2016!?

**Решение.**

Решим вспомогательную задачу: сколькими нулями заканчивается число $x = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} \ldots$?

Из основной теоремы арифметики, в частности, из единственности разложения числа на простые множители следует, что для того, чтобы число $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ делилось на число $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$, необходимо, чтобы все коэффициенты при соответствующих множителях $p_i$ числа $x$ были не меньше таковых в числе $y$.

Вспомним, что если число оканчивается на $k$ нулей, то оно делится на $10^k = 2^k 5^k$. Задача сводится к следующей: найти наибольшее число $k$ такое, что $x$ делится на $2^k 5^k$. Для нашей задачи это означает, что $k = \min(\alpha_2, \alpha_5)$, то есть, число оканчивается на столько нулей, чему равно наименьшее из степеней двойки и пятёрки в его разложении на простые множители.

Попробуем вычислить, какая степень двойки в разложении числа $n!$.

Выпишем разложение, например, для 10!:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Под каждым чётным числом поместим плюс, под нечётным — минус.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ - & + & - & + & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

Мы разве учли все двойки? Нет, $4 = 2 \cdot 2$, а под 4-й стоит только один плюсик. Подпишем под всеми числами, делящимися на 4 ещё по плюсику:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ - & + & - & + & - & + & - & + & - & + \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & + \end{array}$$

А восемь и делящиеся на восемь числа?

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ - & + & - & + & - & + & - & + & - & + \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & + \\ - & - & - & - & - & - & - & + & - & + \end{array}$$

Под каждым числом у нас оказалось столько плюсиков, какую степень двойки содержит это число в разложении на простые множители. Степени других простых множителей нас пока не интересуют. Подсчитаем количество плюсов по рядам:

$\alpha_2 = \left\lfloor \dfrac{n}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{2^3} \right\rfloor + \ldots$

Нетрудно доказать, что подобная формула верна для любого простого множителя, в частности, для $p = 5$:

$\alpha_5 = \left\lfloor \dfrac{n}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots$

Осталось подсчитать $\alpha_2$ и $\alpha_5$ для $n = 2016$.

$$\alpha_5 = \left\lfloor \frac{2016}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{5^4} \right\rfloor = 403+80+16+3 = 500$$

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Сколько заключительных нулей в записи числа 2016! в 99-ричной системе счисления?

**Задача 2.** Найдите сумму всех делителей за исключением самого числа, для чисел 220 и 284, не вычисляя всех делителей.

# 18 Функции-1

Понятие функции — одно из основополагающих определений в математике. Одно из определений функции: функция — это **правило**, по которому из независимой переменной получается зависимая переменная. Обычно независимую переменную обозначают $x$, а зависимую $y$, и пишут $y = f(x)$. Важно понимать, что функция — это именно правило: например, если $f(x) = x^2 - 3 \cdot |x|$ и $g(t) = t^2 - 3 \cdot |t|$, то функции $f$ и $g$ совпадают, так как они по одинаковому правилу из независимой переменной получают зависимую переменную. Важно также понимать устройство сложной функции: например, если $f(x) = x^2 - 3 \cdot |x|$, то $f(x - 1/x) = (x - 1/x)^2 - 3 \cdot |x - 1/x|$. Во второй формуле в качестве независимой переменной выступает выражение: «$x - 1/x$», и к этому выражению мы применяем наше правило.

Важным частным случаем функции является квадратичная функция, которая в общем виде записывается как $y = ax^2 + bx + c$, где $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа. Из школьной программы хорошо известна формула для корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Важным свойством, непосредственно следующим из определения корня уравнения, является $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Также следует не забывать про теорему Виета: выполняются соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

**Задача 1.** Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 - ax + b$, для которых $a + b = 16$. Найти количество таких многочленов, которые имеют целые корни.

**Решение.** Решим задачу, используя теорему Виета. Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения, тогда $x_1 + x_2 = a$ и $x_1 x_2 = b$. Отсюда получаем, что $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 16$.

Так как корни уравнения должны быть целыми, то требуется решить уравнение в целых числах. Количество решений этого уравнения и будет количеством искомых многочленов. Добавим к обоим частям уравнения единицу, и разложим левую часть на множители: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 17$.

Так как число 17 является простым, то есть 4 способа представить его в виде произведения двух целых чисел: $17 = 1 \cdot 17 = 17 \cdot 1 = (-1) \cdot (-17) = (-17) \cdot (-1)$, значит, существует 2 многочлена с данными свойствами (так как при подстановке (x-1)(x-17)=(x-17)(x-1)).

**Задача 2.** Найти сумму всех корней многочленов вида $x^2 + px - 2014$, где $p$ принимает все целые значения от $-1000$ до 1000.

**Решение.** Заметим, что все рассматриваемые многочлены имеют по два корня, так как их дискриминанты — это числа вида $p^2 + 4 \cdot 2014$ — положительны. По теореме Виета, сумма корней каждого такого многочлена равна $-p$. А поэтому сумма корней всех таких многочленов — это сумма чисел от $-1000$ до 1000, что равно нулю.

Иногда полезен графический метод, продемонстрируем и его:

**Задача 3.** Известно, что квадратные трёхчлены $a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $a_2x^2 + b_2x + c_2$ оба не имеют корней, и $a_1 > 0$; $a_2 > 0$. Докажите, что квадратный трёхчлен $\dfrac{a_1 + a_2}{2}x^2 + \dfrac{b_1 + b_2}{2}x + \dfrac{c_1 + c_2}{2}$ также не имеет корней.

**Решение.** Парабола, которая не имеет корней, и у которой ветви направлены вверх, находится полностью выше оси $OX$. Сумма двух графиков, каждый из которых находится выше оси $OX$, также находится выше оси $OX$. Если мы теперь поделим данный трёхчлен на 2, то график всё равно останется выше оси $OX$. То есть получилась парабола, которая всегда больше нуля, а это значит, что она не имеет корней, что и требовалось доказать. (рис. 26)

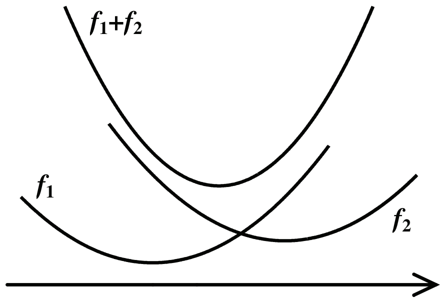



Рис. 26: Полусумма двух положительных парабол положительна.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Укажите все точки плоскости $(x, y)$, через которые проходит хотя бы одна кривая семейства $y = p^2 + (2p - 1)x + 2x^2$.

**Задача 2.** Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух из них действительных корней не имеет?

**Задача 3.** Даны квадратные трёхчлены $f$ и $g$ с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна $N$. Найдите сумму корней трёхчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

# 19 Полуинвариант и дискретная непрерывность

**Теорема** (о нуле дискретно-непрерывной функции): пусть некоторая целая величина в каждый момент времени может либо увеличиваться, либо уменьшаться на 1, либо не меняться. Если вначале эта величина была отрицательной, а в конце стала положительной, то в какой-то момент времени она была равна нулю.

**Доказательство:** предположим противное — пусть величина никогда не примет значение 0. Так как в начальный момент времени величина отрицательна, а в конечный — положительная, то существует момент времени, в который величина из отрицательной становится положительной. Но наименьшее положительное число — это 1, а наибольшее отрицательное число это $-1$, значит, величина поменялась хотя бы на 2. Полученное противоречие доказывает теорему.

Данная формулировка теоремы не является самой общей, но она наиболее простая для понимания. Мы не будем приводить формулировку в самом общем виде, это может усложнить понимание сути. Разберём задачи, и покажем, что именно можно поменять в формулировке.

**Задача 1.** На плоскости отмечено 2014 точек. Доказать, что можно провести прямую так, чтобы по обе стороны от неё было поровну точек.

**Решение.** Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через две из данных точек. Таких прямых будет конечное число (не более, чем $C_{2014}^2$). Проведём прямую $l$, не параллельную ни одной из этих прямых, и не проходящую ни через одну их точек. Если с обоих сторон по 1007 точек, то цель достигнута. Иначе, посмотрим на количество точек с обоих сторон от прямой, и будем двигать прямую параллельно самой себе в ту сторону, где их больше (а их там $> 1007$). С каждым шагом количество точек уменьшается на одну, значит, в какой-то момент времени по обе стороны от прямой будет по 1007 точек, что и требовалось доказать.

В этой задаче шаг, на который изменялась величина, был постоянен — величина уменьшалась на 1. По сути, мы использовали полуинвариант (величину, которая может изменяться только в одну сторону).

**Задача 2.** В некоторых клетках квадрата 100 на 100 стоят «+1» и «-1», причём модуль суммы всех этих чисел не превосходит 200. Докажите, что есть квадрат 50 на 50, модуль суммы чисел в котором не превосходит 50.

**Решение.** Предположим противное. Разобьём квадрат на 4 квадрата размером 50 на 50. Тогда в каждом из таких квадратов сумма чисел либо $> 50$, либо $< -50$, причём одновременно быть больше 50 или быть меньше $-50$ все суммы не могут, так как тогда модуль суммы всех чисел будет превосходить 200. Нетрудно понять, что существуют два квадрата A и B, расположенные рядом, сумма чисел в одном из которых $> 50$, а в другом $< -50$ (рис. 27).

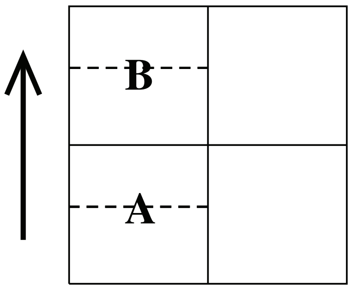



Рис. 27: Двигаемся от нижнего квадрата к верхнему.

Будем двигаться от одного квадрата к другому. Посмотрим, как может меняться сумма чисел в квадрате. При сдвиге добавляется 50 новых клеток, и убирается 50 старых клеток. Так как на каждой из этих клеток могут стоять «+1», «-1» или ничего не стоять, то сумма чисел в квадрате может поменяться максимум на 100. Вначале сумма чисел в квадрате $> 50$, а в конце $< -50$, поэтому существует момент времени, когда сумма меняется с положительной $x > 0$ на отрицательную $y < 0$. Но так как $x - y \leqslant 100$, то одно из чисел $x$ или $y$ по модулю не превосходит 50.

Здесь шаг, на который изменялась величина, мог быть не постоянным, но ограниченным сверху числом 100. Мы доказали, что тогда эта величина «попадёт» в отрезок длины 100, расположенный между начальным и конечным значением величины — она просто не может проскочить этот отрезок. Можно привести такую аналогию: пусть есть речка шириной $> 100$ метров, и кузнечик, который может прыгать не дальше, чем на 100 метров. Тогда он никак не сможет попасть на другой берег, не намочив ноги.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Докажите, что существует 100 подряд идущих чисел, среди которых ровно 7 простых.

**Задача 2.** За круглым столом сидит чётное количество гномов. У каждого на колпаке по несколько помпонов. Причём у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не более чем на 1. Докажите, что найдётся пара гномов, сидящих друг напротив друга, количества помпонов на колпаках которых отличаются не больше, чем на 1.

# 20 Метод математической индукции в графах

Метод математической индукции можно применять и в графах, но здесь с ним нужно обходиться очень аккуратно. Обычно индукция ведётся по количеству вершин и, бездумно добавляя новую вершину, можно получить неправильный логический переход. Доказывая утверждение для $n+1$ вершин, нужно выделить множество из $n$ вершин, убедиться, что они обладают свойствами для выполнения $Y_n$. Потом для них применить утверждение индукции, и затем уже добавить оставшуюся вершину, со всеми рёбрами, которые из неё выходят. Приведём пример ошибочного рассуждения, показывающего всю важность того, о чём идёт речь.

Докажем по индукции, что любой граф, степень каждой из вершин которого $\geqslant 1$ (то есть в нём нет изолированных вершин), является связным:

База очевидна, для $n = 2$.

Переход: пусть утверждение выполняется для $n$ вершин, и этот граф является связным. Добавим ещё одну вершину, она точно соединена с какой-то из рассмотренных, а значит и новый граф будет связным — из любой вершины можно добраться до любой.

Ошибка тут в следующем: добавленная вершина может быть единственной, с кем соединена одна из рассмотренных $n$ вершин: (рис. 28), и нельзя применять предположение индукции к этим $n$ вершинам: среди них уже есть изолированные вершины.

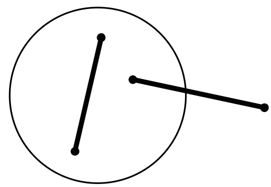


Рис. 28: Ошибка в рассуждениях.

**Определение.** граф называется двудольным, если все вершины в нём можно разбить на два множества (доли) так, чтобы все рёбра находились между вершинами различных множеств. (рис. 29)

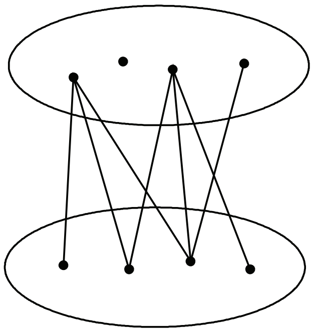


Рис. 29: Двудольный граф.

**Задача 1.** Доказать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём не содержатся циклы нечётной длины.

**Решение.** 1)Пусть граф двудольный. Рассмотрим любой цикл, и докажем, что он будет чётной длины. Начнём обход по циклу с некоторой вершины — пусть она лежит в первой доле графа, тогда следующая вершина лежит во второй доле, следующая — снова в первой, и так далее. Так как доли чередуются, и мы снова должны вернуться к первой вершине, то должно быть сделано чётное число шагов — значит длина цикла — чётна.

2) Докажем, по индукции по числу вершин, что граф без нечётных циклов является двудольным. База: граф, в котором 1 или 2 вершины, очевидно, является двудольным.

Переход индукции: пусть выполняется $Y_n$: граф с $n$ вершинами, в котором нет нечётных циклов является двудольным. Докажем, что тогда выполняется $Y_{n+1}$: граф с $n+1$ вершиной, в котором нет нечётных циклов, является двудольным. Выберем из этих $n+1$ вершин $n$, и применим к ним утверждение индукции: (это можно сделать, так как нечётного цикла там нет). Вообще говоря, граф на этих вершинах не обязан быть связанным: пусть он разбился на несколько компонент. Докажем, что оставшуюся вершину $A$ всегда можно поместить в одну из долей. Она не может быть одновременно соединена с какими-то двумя вершинами $B$ и $C$ из одной компоненты связанности, но из разных долей (рис. 30): тогда от вершины $B$ до $C$ можно добраться за нечётное число ходов и ещё два хода по рёбрам $CA$ и $AB$. Поэтому вершина $A$ может быть соединена только с одной из долей каждой компоненты связанности.

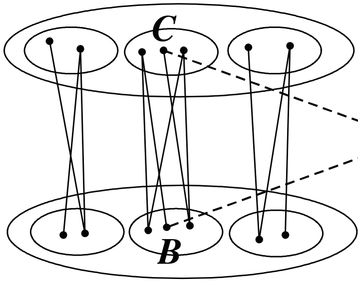



Рис. 30: Если $A$ соединена с $B$ и $C$, то есть нечётный цикл

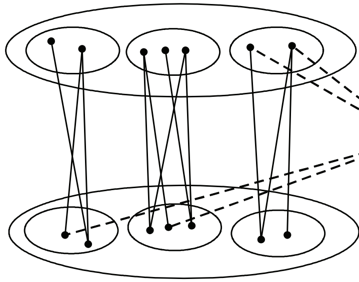



Рис. 31: Можно поменять местами вершины в 3 доле.

Поменяем местами вершины в долях так, чтобы вершина $A$ оказалась соединена только с вершинами из одной доли. Например, на рис. 31 достаточно поменять местами вершины в третьей справа компоненте. При таком обмене, вершину $A$ теперь можно поместить в одну из долей, без нарушения двудольности. Переход доказан.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Любые два города в стране соединены либо водным, либо воздушным транспортом. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы из любого города по-прежнему можно было бы добраться в любой другой.

**Задача 2.** В стране $N$ городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнёт путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

# 21 Функции

Известная теорема Виета для квадратичных функций имеет обобщение и на многочлены более высоких порядков. Запишем её формулировку для многочлена третьей степени: Пусть приведённый многочлен $P_n(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ имеет корни $x_1$, $x_2$ и $x_3$, тогда выполняются соотношения:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1;$$

$$a_3 = -x_1x_2x_3.$$

Выражения, которые находятся в правых частях этих равенств (без знаков «-»), называются симметрическими многочленами от трёх переменных $x_1$, $x_2$ и $x_3$ — они не меняются при перестановке переменных местами. Теорема Виета для многочленов более высоких степеней записывается аналогично: сначала идёт сумма всех корней со знаком минус, потом сумма попарных произведений, потом сумма произведений по три со знаком минус, и так далее.

Вообще говоря, не любой многочлен имеет $n$ действительных корней, но следствие из основной теоремы алгебры гласит, что многочлен $n$-ой степени не может иметь больше $n$ корней.

**Теорема Безу:** если многочлен $P(x)$ разделить на одночлен $(x - a)$, то в остатке получится $P(a)$ (напомним, что при делении одного многочлена на другой в остатке получается многочлен, степень которого ниже того, на который производилось деление). В частности, отсюда следует, что если $a$ — корень многочлена $P(x)$, то $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен $n - 1$ степени. Также отсюда следует способ поиска целых корней многочлена: нужно перебрать все делители свободного члена, но следует понимать, что не обязательно каждый многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень.

**Пример:** решить уравнение: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 20 = 0$. Перебираем делители свободного члена: это $1, 2, 4, 5, 10, 20, -1-, 2, -4, -5, -10, -20$, и убеждаемся, что $P(5) = 0$. Пользуемся теоремой Безу: делим $x^3-3x^2-6x-20$ на $x-5$, получаем $x^2+2x+4$ (в этом можно убедиться, пользуясь делением столбиком). Квадратное уравнение $x^2+2x+4 = 0$ не имеет корней, значит, единственным корнем уравнения будет $x = 5$.

**Задача 1.** Для некоторого многочлена $n$-ой степени $P(x)$ известно, что $P(1) = 1$, $P(2) = 1/2$, $P(3) = 1/3, \dots, P(n+1) = 1/(n+1)$. Чему равно $P(n+2)$?

**Решение.** Заметим, что $P(1) \cdot 1 = P(2) \cdot 2 = \dots = P(n) \cdot n = P(n+1) \cdot (n+1) = 1$. Введём новый многочлен: $Q(x) = P(x) \cdot (x-1)$. Тогда уравнение $Q(x) = 0$ имеет, по крайней мере, $n+1$ решение: $x = 1, 2, \dots, n+1$. Но с другой стороны, многочлен $Q(x)$ — $n+1$−ой степени, и он не может иметь больше $n+1$ корня по следствию из основной теоремы алгебры. Отсюда получаем:

$$Q(x) = a(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-n-1),$$

где $a$ — некоторое число. Тогда $P(x) = \dfrac{Q(x)+1}{x}$ должен быть многочленом, значит, многочлен $Q(x)+1$ должен иметь нулевой свободный член: $a(n+1)!(-1)^{n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow a = (-1)^n/(n+1)!$ Теперь многочлен $P(x)$ задан однозначно, и можно найти значение $P(n+2)$:

$$P(n+2) = \frac{Q(n+2)+1}{n+2} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2-1)(n+2-2)\dots(n+2-n-1)+1}{n+2} = \frac{(-1)^n+1}{n+2}.$$

**Задача 2.** Некоторый многочлен $P(x)$ имеет остаток 3 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x-2$. Какой он имеет остаток при делении на $x^2-3x+2$?

**Решение.** Заметим, что $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Остатком при делении на квадратичный многочлен может быть многочлен не более первой степени: линейная функция или число. Пусть это $ax+b$. Тогда выполняется равенство:

$$P(x)=Q(x)\cdot(x^2-3x+2)+ax+b$$

Подставим $x=1$: $P(1)=Q(x)\cdot 0+a+b \Leftrightarrow 3=a+b$, так как по теореме Безу $P(1)=3$ — остаток от деления $P(x)$ на $(x-1)$ равен 3. Аналогично, подставим $x=2$, откуда: $P(2)=Q(x)\cdot 0+2a+b \Leftrightarrow 1=2a+b$. Получилось два уравнения с двумя неизвестными: $\begin{cases} a+b=3; \\ 2a+b=1, \end{cases}$ откуда $a=-2$ и $b=5$. Поэтому искомым остатком является линейный многочлен $-2x+5$.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Докажите, что многочлен $P(x)=(x+1)^6-x^6-2x-1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

**Задача 2.** При каких $n$ многочлен $1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}$ делится на $1+x+x^2+\dots+x^n$?

# 22 Тригонометрия

Вспомним основные формулы тригонометрии:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$;

Формулы **приведения** для преобразования выражения вида
$\sin\left(\dfrac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

а) перед приведённой функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция при $0 < \alpha < \pi/2$

б) функция меняется на кофункцию, если $n$ нечётно; функция не меняется, если $n$ чётно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенс.)

Выведем также формулу дополнительного аргумента: пусть дано выражение вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$, где $a$ и $b$ — некоторые числа. Тогда

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Положив теперь $\sqrt{a^2+b^2} = \rho$; $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$; $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ (такой угол существует, потому что сумма квадратов этих двух величин равна 1), получим

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \rho\sin(\alpha+\varphi),$$

угол $\varphi$ как раз и есть тот дополнительный аргумент, о котором идёт речь (часто этот угол называют *фазовым углом*).

Тригонометрия на олимпиадах может встретиться в двух случаях: либо она является вспомогательным аппаратом для геометрических задач, либо в условии задачи дано некоторое уравнение, или неравенство. Сейчас мы рассмотрим второе её применение.

**Задача 1.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}\operatorname{tg} z; \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}\operatorname{ctg} z. \end{cases}$$

**Решение.** Заметим, что в правой части уравнений находятся тангенс и котангенс, которые являются обратными величинами. Логичным действием будет перемножить уравнения:

$$(\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x + \sin y\cos y + \sin x\cos y + \sin y\cos x = 2.$$

Домножим обе части уравнения на 2, воспользуемся формулой двойного угла и формулой синуса суммы:

$$4 = \sin 2x + \sin 2y + 2\sin(x+y).$$

Воспользуемся тем, что синус является ограниченной функцией: он не может превосходить числа 1, поэтому правая часть уравнения не превосходит 4, и равенство может достигаться только в том случае, когда $\sin 2x = 1; \sin 2y = 1; \sin(x + y) = 1$.

$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \pi/2 + 2\pi n \Leftrightarrow x = \pi/4 + \pi n$, $n$-целое. Аналогично, $y = \pi/4 + \pi k$, $k$ — целое. Это, например, легко видеть из тригонометрической окружности. Отсюда $x + y = \pi/2 + \pi(n + k)$, и чтобы выполнялось $\sin(x + y) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $n$ и $k$ имели одинаковую чётность.

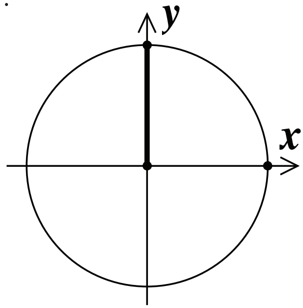



Рис. 32: Тригонометрическая окружность.

1. $n$ и $k$ оба чётные, тогда $x = \pi/4 + 2\pi n_1, y = \pi/4 + 2\pi k_1$, $n_1$ и $k_1$ — целые. Подставляя эти значения в исходные уравнения, получим: $\operatorname{tg} z = 1$; $z = \pi/4 + \pi m_1$, $m_1$ -целое

2. $n$ и $k$ оба нечётные, тогда $x = 5\pi/4 + 2\pi n_2$, $y = 5\pi/4 + 2\pi k_2$, $n_2$ и $k_2$ — целые. Подставляя эти значения в исходные уравнения, получим: $\operatorname{tg} z = -1$; $z = -\pi/4 + \pi m_2$, $m_2$ -целое.

Теперь можно записать
**ответ:** $(x, y, z) = (\pi/4 + 2\pi n_1, \pi/4 + 2\pi k_1, \pi/4 + \pi m_1); (5\pi/4 + 2\pi n_2, 5\pi/4 + 2\pi k_2, -\pi/4 + \pi m_2), n_1, k_1, m_1, n_2, k_2, m_2 \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что эту задачу можно решить с помощью метода дополнительного аргумента, если не перемножать, а складывать уравнения.

**Задача 2.** Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы треугольника $ABC$. Доказать, что выполняется тождество: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

**Решение.** Сумма углов треугольника равна $\pi$, поэтому $\operatorname{tg}\gamma = tg(\pi-\alpha-\beta) = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Воспользуемся формулой тангенса суммы: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta =$$

$$= (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\left(1 - \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma.$$

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 3$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

**Задача 2.** Докажите равенство:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

# 23 Функциональные уравнения

В функциональных уравнениях, в отличие от обычных, требуется найти все возможные функции, для которых выполняется данное уравнение. Многие трюки, которые используются при решении обычных уравнений, можно использовать и тут. Функциональные уравнения в некотором роде «сложнее» чем обычные уравнения — множество всевозможных функций шире, чем множество чисел, и даже угаданное решение (а угадать его не так просто) не сильно помогает делу (в отличие от, например, многочленов).

Самым общим и широко используемым правилом решения функциональных уравнений является подстановка вместо значений аргумента каких-либо чисел, либо выражений: функциональное равенство выполняется для всех значений аргумента из области определения. Обнаружив связи между значениями функции в каких-то точках, можно сначала угадать, а потом и доказать, как ведёт себя функция в целом.

**Задача 1.** Функция $f$ такова, что для любых положительных $x$ и $y$ выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2014)$, если $f(1/2014) = 1$.

**Решение.** Равенство выполняется для любых положительных $x$ и $y$: возьмём $x = 1$ и $y = 1$. Тогда $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, откуда сразу же следует, что $f(1) = 0$.

В условии задачи требуется найти $f(2014)$ — логичным ходом будет какое-то из чисел $x$, $y$ или $xy$ сделать равным 2014. Пусть $x = 2014$ и $y = 1/2014$. Тогда

$$f(2014 \cdot 1/2014) = f(2014) + f(1/2014) \Leftrightarrow 0 = f(2014) + 1,$$

откуда $f(2014) = -1$.

**Задача 2.** Решить функциональное уравнение

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x.$$

**Решение.** В этой задаче, в отличие от предыдущей, нужно найти функцию, а не её значение в конкретной точке — это сложнее. Подставим вместо $x$ выражение $\dfrac{y-1}{y}$. Почему именно такое выражение? Потому что выражение такого вида присутствует в функциональном уравнении. Получаем:

$$f\left(\frac{y-1}{y}\right)+f\left(\frac{\frac{y-1}{y}-1}{\frac{y-1}{y}}\right)=2\cdot\frac{y-1}{y}.$$

Упрощая это выражение, получаем: $f\left(\dfrac{y-1}{y}\right)+f\left(\dfrac{1}{1-y}\right)=\dfrac{2(y-1)}{y}$. Но это выражение выполняется для любых $y$, значит, оно выполняется и для любых $x$:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}.$$

Подставим теперь в исходное уравнение $x=\dfrac{1}{1-y}$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{1-y}\right)+f\left(\frac{\frac{1}{1-y}-1}{\frac{1}{1-y}}\right)=2\cdot\frac{1}{1-y}.$$

Или, после упрощения и замены  на $x$, как мы это делали в предыдущем случае:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x}.$$

Заметим теперь, что в полученных трёх выражениях фигурируют только значения функции: $f(x)$, $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$. Сделаем замену: $a = f(x), b = f\left(\dfrac{x-1}{x}\right), c = f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, и запишем три уравнения в виде системы:

$$\begin{cases} a+b=2x; \\ b+c=\dfrac{2(x-1)}{x}; \\ c+a=\dfrac{2}{1-x}. \end{cases}$$

Сложим уравнения этой системы и поделим обе части на 2:

$$a+b+c=x+\frac{x-1}{x}+\frac{1}{1-x};$$

отсюда

$$a=f(x)=x-\frac{x-1}{x}+\frac{1}{1-x},$$

что и требовалось найти. В данной задаче вместо значений переменных пришлось подставлять не числа, а выражения.

**Задача 3.** Решить функциональное уравнение:

$$f^2(x+y)=f^2(x)+f^2(y).$$

**Решение.** Подставим $x=y=0$: $f^2(0)=f^2(0)+f^2(0)$, откуда $f(0)=0$. Подставим теперь

$$y=-x: f^2(x-x)=f^2(x)+f^2(-x) \Leftrightarrow 0=f^2(x)+f^2(-x).$$

Но в левой части уравнения находится сумма двух неотрицательных чисел, равенство возможно только в том случае, если они оба равны 0. Поэтому для любого $x$ выполняется $f(x)=f(-x)=0$.

Следовательно, $f(x) \equiv 0$.

Наряду с функциональными уравнениями, существуют также и функциональные неравенства. Методы их решения, как правило, такие же, как и для уравнений.

**Домашнее задание.**

**Задача 1.** Решить функциональное уравнение:

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x.$$

**Задача 2.** Найдите все функции $f$, которые для всех действительных $x, y, z$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z).$$

# Заключение

Мы рассмотрели несколько интересных тем, иногда простых, иногда сложных. Редко оказывается, что какая-либо задача полностью может быть решена с применением только материала из одного кванта. Это — строительные материалы, из которых собирается большая задача.

Какую из тем применять при решении конкретной задачи? Мы постарались дать необходимые подсказки, какие слова или какие условия могут натолкнуть на нужную тему. Тем не менее, любая из задач имеет множество вариантов решений и выбор нужного из них определяется опытом.

*Научное издание*

# Материалы математического отделения Летней Олимпиадной Школы

ЧАСТЬ 1

*В авторской редакции*

Отпечатано в ООО «Эдитус»
129515, г. Москва, ул. Академика Королева, 13
8 (800) 775-30-87
www.editus.ru

Подписано в печать 19.07.17
Формат 148x210. Печ. л. 11,25
Печать цифровая. Бумага офсетная
Тираж 366 экз. Заказ № 201707178

ISBN 978-5-00058-638-9
www.editus.ru
9 785000 586389 >