летняя Олимпиадная школа

• МФТИ, 2017 •

Материалы математического отделения Летней Олимпиадной Школы

ЧАСТЬ 2

Бабичева Татьяна Сергеевна, Бабичев Дмитрий Сергеевич, Бабичев Сергей Леонидович, Галицкий Борис Васильевич

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский Физико-Технический институт (Государственный Университет)»
Центр развития ИТ-образования

Материалы Летней Олимпиадной Школы

летняя Олимпиадная школа

• МФТИ, 2017 •

Материалы математического отделения Летней Олимпиадной Школы

ЧАСТЬ 2

*Бабичева Татьяна Сергеевна, Бабичев Дмитрий Сергеевич,
Бабичев Сергей Леонидович, Галицкий Борис Васильевич*

Издательство Э́дитус
Москва

УДК 371.67
ББК 22.1
М34

М34 **Материалы математичсекого отделения Летней Олимпиадной Школы.** – М.: Эдитус, 2017. – 90 с.

ISBN 978-5-00058-677-8

УДК 371.67
ББК 22.1

ISBN 978-5-00058-677-8 (Часть 2)
ISBN 978-5-00058-638-9

Содержание

Введение

Данное методическое пособие — вторая часть серии базовых материалов математической секции Летней Олимпиадной Школы МФТИ. Они рассчитаны на школьников и учителей. Материал разбит на достаточно независимые друг от друга «кванты», каждый из которых примерно соответствует одному короткому занятию. Мы выбирали темы, которые жизненно необходимы для успешного решения задач математических олимпиад разных уровней, но которые мало представлены или совсем не изучаются в курсе школьной математики.

В каждом из квантов излагаются некоторые теоретические факты, разбирается несколько задач, уровень которых варьируется от школьных до областных математических олимпиад, а в заключение предлагается несколько задач для самостоятельного решения. Мы старались выделить типичные ошибки, которые совершают учащиеся, и дать рекомендации о том, как распознать тему задачи и как выбрать правильные методы её решения.

Для прохождения курса никаких специальных знаний не требуется, достаточно хорошего понимания того, что проходят в школе. Хотя мы старались, чтобы каждый квант можно было прорабатывать отдельно, некоторые темы зависят от предыдущих, а некоторые требуют нескольких квантов.

Вначале рассмотрены решения домашних задач из квантов, предложенных в первой книге. Рекомендуем Вам читать все кванты по-порядку.

Вторая часть книги посвящена разбору нескольких новых тем.

Авторы сердечно благодарят директора ЦРИТО, основателя олимпиадных школ МФТИ Малеева Алексея Викторовича за вдохновение и ряд ценных замечаний.

Часть I
Решение задач из 1-й книги

1 Взвешивания

Задача 1. Есть 9 внешне одинаковых конфет, из которых одна невкусная (более лёгкая, потому что без начинки). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить невкусную конфету за 2 взвешивания?

Решение.

Для начала мы должны понять, что имея три конфеты мы можем найти невкусную за одно взвешивание. Опираясь на это, мы легко решим задачу.

Сначала поделим конфеты на три кучки, в первой из которых будут конфета (1,2,3), во-второй — конфеты (4,5,6), в-третьей — (7,8,9).

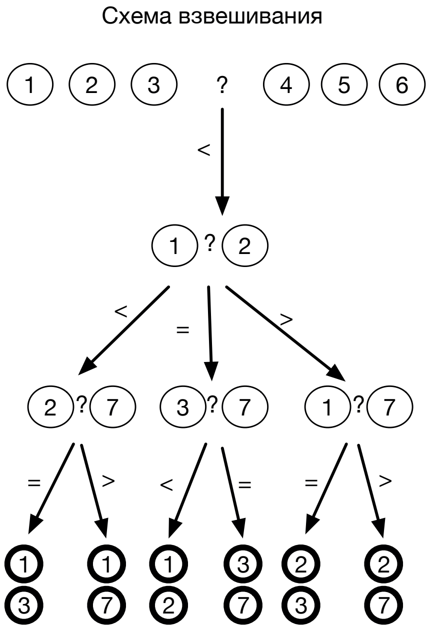
Взвесим первую и вторую кучки. Та кучка, которая окажется более лёгкой и содержит невкусную конфету. Если первая и вторая кучки равны по весу, значит невкусная конфета — в третьей. Таким образом, за одно взвешивание мы обнаружили кучку из трёх конфет, одна из которых невкусная. За одно взвешивание мы найдём невкусную конфету и в этой кучке. Итого —ровно два взвешивания.

Задача 2. Среди семи монет имеются 2 фальшивые (более лёгкие). За 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определите обе фальшивые монеты.

Это немного более сложная задача, но решение предыдущих нам тоже помогает.

Давайте взвесим кучки из трёх монет — (1,2,3) и (4,5,6). Лёгкий случай, если кучки равны по весу, так как теперь мы точно знаем, что в каждой кучке ровно по одной фальшивой и за оставшихся два взвешивания мы найдём их. Более сложна ситуация, если одна кучка легче другой. Рассмотрим случай, когда первая кучка легче (совершенно аналогично рассматривается случай, когда легче вторая кучка). Проблема в том, что мы не знаем, насколько легче первая кучка, то есть, одна там фальшивая монета, или там их две.

Взвесим первую и вторую монеты. Если одна легче другой, то она точно фальшивая, а другая — точно не фальшивая. Взвешивая не фальшивую и седьмую монеты, мы находим, какая монета фальшивая — третья или седьмая. Если же первая и вторая равны по весу, то они либо обе фальшивые, либо обе не фальшивые (тогда фальшивыми будут третья и седьмая). Распознать это можно, взвесив вторую и седьмую монеты. Общая схема взвешивания в данном сложном случае показана на рисунке.



2 Примеры и конструкции

Задача 1. Запишите число 1997 с помощью десяти двоек и арифметических операций.

Решение. Для получения полного балла по этой задаче достаточно предъявить решение. В таких задачах обычно допускается не ставить между числами знаков операции, что позволяет из четырёх двоек получить число 2222. Нам требуется число 1997, четыре двойки для получения 2222 мы уже использовали. Осталось вычесть число 225, которое нужно получить шестью двойками.

$$1997 = 2222 - 222 - 2 - 2 : 2$$

Задача 1. Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй — три, в третьей — четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?

Решение. Задача решается весьма просто: вначале вычисляем вес каждой коробочки. Вес всех гирек — 45 граммов, значит одна коробочка должна содержать гирьки на 15 граммов. Одну коробочку мы наполним гирьками в 9 и 6 граммов, вторую — 8, 5 и 2 грамма, третью — 1, 3, 4, 7 граммов. Ответ предъявлен, задача решена.

Задача 2. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продаёт купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25 000 рублей, если сначала у него было 1000 рублей?

Решение. Задачу можно решать с конца. После пятого дня у него должно стать 25000 рублей. Если у него было 13000 рублей после четвёртого дня, то, купив на 12000 товара и продав их за 24000, он получит искомую сумму. Рассуждая аналогично, если после третьего дня у него будет 7000 рублей, то он в этот день купил товар на 6000 рублей и продал за 12000. 7000 рублей можно получить из 4000 , закупив товар на 3000. Ну а 4000 мы получим за два дня, закупая товар на все деньги оба раза.

3 Принцип Дирихле-1

Задача 1. В таблице 8×8 расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних по сторонам клетках отличаются не более, чем на 4. Докажите, что среди этих чисел есть 2 равных.

Решение. Предположим противное. Тогда в таблице нет двух одинаковых чисел — все числа различные. Рассмотрим наименьшее и наибольшее из них — они будут отличаться хотя бы на 63. Но от одного из них можно добраться до другого через соседние клетки за, максимум, $k + l \leqslant 7 + 7 = 14$ ходов (рис. 1). Так как разница между соседними числами не более, чем 4, то, сделав $\leqslant 14$ ходов, разница будет не более, чем $4 \cdot 14 = 56$. Полученное противоречие завершает доказательство задачи.

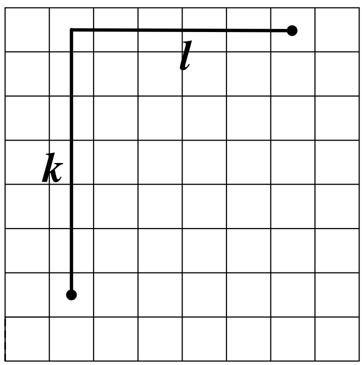


Рис. 1: Путь из одной клетки в другую.

Задача 2. На шахматной доске более четверти полей занято шахматными фигурами. Докажите, что занятыми оказались хотя бы две соседние (по стороне или углу) клетки.

Решение. Разобьём доску на квадраты 2×2 (рис. 2). Всего на шахматной доске 64 поля, более четверти из которых занято. Тогда занято не меньше, чем 17 клеток. Так как квадратов-«клеток» всего 16, а фигур-«кроликов» — 17, то по принципу Дирихле в каком-то квадрате стоят хотя бы две фигуры, а, значит, они соседние либо по стороне, либо по углу.

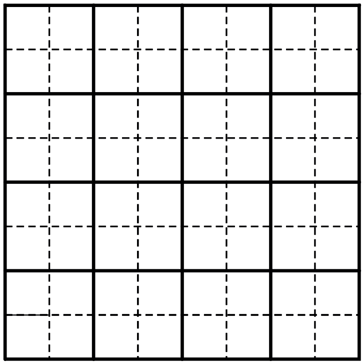


Рис. 2: Разбиения на квадраты 2×2.

Задача 3. Докажите, что правильный треугольник нельзя полностью накрыть двумя правильными треугольниками с меньшими площадями.

Решение. Заметим, что наибольший отрезок, который можно покрыть правильным треугольником — это длина стороны этого треугольника. Рассмотрим три вершины («кролика») исходного правильного треугольника и два меньших правильных треугольника («клетки»). Тогда по принципу Дирихле какие-то две вершины исходного треугольника должны быть покрыты одним треугольником с меньшей стороной, что невозможно, что и требовалось доказать.

4 Инвариант

Задача 1. По кругу записаны числа $1, 2, 3, 2, 2, 0$. За один ход можно к любым двум соседним числам прибавить по единице. Можно ли все числа сделать равными?

Решение. Докажем, что инвариантом будет знакопеременная сумма всех чисел, написанных по кругу, то есть первое число входит в эту сумму со знаком плюс, второе — со знаком минус, третье — со знаком плюс и так далее. Действительно, после прибавления единицы к любым двум соседним числам такая величина будет оставаться постоянной: одно из двух соседних чисел обязательно будет со знаком плюс и к общей сумме единица прибавится, а второе будет со знаком минус, из общей суммы единица вычтется. Если все числа станут равными, то знакопеременная сумма будет равна нулю. Но вначале она равна $1-2+3-2+2-0 = 2 \neq 0$ и при любой операции оне не изменяется, поэтому сделать все числа равными невозможно.

Задача 2. На доске написаны числа от 1 до 2014. Каждый день какие-то 2 числа стирают и вместо них пишут их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Мог ли на 2014 день получиться набор чисел с произведением 2015! ?

Решение. Докажем, что инвариантом является произведение всех чисел. Пусть числа, которые были заменены на среднее арифметическое и среднее гармоническое - это a и b. Среднее арифметическое равно $\frac{a+b}{2}$, среднее гармоническое: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Тогда их произведение составляет:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab.$$

Произведение этих двух чисел осталось такими же, каким и было, а так как другие числа затронуты не были, то и произведение всех чисел остаётся прежним. Мы получили инвариант. Но вначале произведение всех чисел, написанных на доске равно $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2014 = 2014!$. Значит, на доске ни когда не будут написаны числа, произведение которых равно $2015!$.

5 Метод математической индукции-1

Задача 1. Определите, на сколько частей делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

Решение. Попробуем сначала проследить закономерность, по которой изменяется число прямых. Нетрудно понять, что 1 прямая делит плоскость на 2 части, 2 прямых — на 4 части, 3 прямых — на 7 частей и 4 прямых на 11 частей (рис. 3).

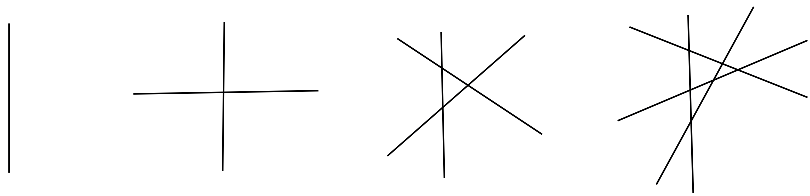


Рис. 3: Количество частей при 1,2,3,4 прямых.

Прослеживается закономерность: каждая следующая прямая добавляет на одну часть больше, чем предыдущая. Докажем, что n-ая прямая добавит n частей. Действительно, она пересечёт каждую из остальных $n-1$ прямых, добавив при этом $n-1$ точку пересечения. Эти $n-1$ точка разделит прямую на n кусков, каждый из которых разрежет один из кусков на 2 части: число кусков увеличится на n. Например на рисунке 4 $n = 4$, и прямая разрежет каждый из кусков A, B, C, D на две части. Итак, n-ая прямая добавит n кусков, и, следовательно, все прямые разрежут плоскость на $2+2+3+\cdots+n$

кусков. Теперь докажем по индукции, что

$$2 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

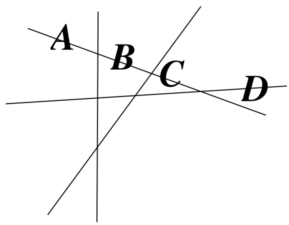


Рис. 4: Увеличение количества частей при добавлении прямой.

База индукции выполняется при $n = 2$.
Переход: требуется доказать $n + 1$-ое утверждение:

$$2 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}.$$

Докажем, что приращение левой части равно приращению правой части:

$$n + 1 = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2} - \frac{n^2 + n + 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n + 1 = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2 - n^2 - n - 2}{2} \Leftrightarrow n + 1 = n + 1.$$

Переход доказан, поэтому n прямых общего положения делят плоскость на $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ кусков, что и требовалось найти.

Задача 2. Докажите, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Решение. База индукции: $n = 1$, тогда $1 \cdot 1! = (1 + 1)! - 1$.

Переход. Докажем $n+1$-ое утверждение:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1.$$

Докажем, что приращение левой части равно приращению правой части. Приращение левой части равно $(n+1) \cdot (n+1)!$, в то время, как приращение правой части равно $(n+2)! - 1 - ((n+1)! - 1) = (n+2)! - (n+1)! = (n+1)! \cdot (n+2-1) = (n+1) \cdot (n+1)!$. Переход доказан, значит, задача решена.

6 Графы-1

Задача 1. В общежитии живёт 214 студентов. Каждый час ровно 4 из них отправляются на кухню перекусить. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым на кухне ровно по одному разу?

Решение. Заметим, что всего существует $\dfrac{214 \cdot 213}{2} = 107 \cdot 213$ пар студентов. Каждый час на кухне встречается 4 студента, это даёт нам $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ возможных пар (рёбер графа). Но так как $107 \cdot 203$ число нечётное, то оно не может делиться на 6. Поэтому не могло получиться так, что в какой-то момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым ровно по разу.

Заметим, что задачу можно сформулировать на языке графов: есть полный граф на 214 вершинах (в котором проведены все рёбра), требуется узнать, можно ли его разбить на полные подграфы на 4 вершинах.

Задача 2. В стране Ёжландия кандидат в президенты после выборов обещает сделать самолётное сообщение. При этом из столицы будет выходить 7 рейсов, из всех остальных городов — по 6, а из города Бобров — всего один рейс. Жители города Бобров считают, что теперь они даже с пересадками не смогут долететь до столицы. Докажите, что они ошибаются.

Решение. Предположим, что из города Бобров нельзя будет долететь до столицы. Это означает, что граф, вершинами которого являются города, а рёбрами — авиалинии, является несвязным. При этом столица и город Бобров находятся в разных компонентах связанности. Рассмотрим ту компоненту, в которой находится город Бобров: степени всех вершин, кроме одной, равны 6, и степень одной вершины равна 1. Но тогда сумма всех степеней является нечётным числом, что невозможно. Поэтому жители города Бобров ошибаются, и из него точно можно долететь до столицы.

7 Комбинаторика-1

Задача 1. Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе завтрак, обед и ужин, если а) эти мышки были большими и ей достаточно одной, чтобы наесться? б) если мышки были средних размеров и на каждую трапезу ей необходимо по 2 мышки? в) если кошка на диете, и она пропускает один из приёмов пищи, при этом на одном из приёмов пищи она хочет съесть две мышки, а на другом - одну или две?

Решение. а)Завтрак можно выбрать 20 способами, обед - уже 19 способами, и ужин — 18 способами. Воспользуемся правилом умножения, откуда получаем $20 \cdot 19 \cdot 18$ способов.
б) Завтрак может быть выбран $\dfrac{20 \cdot 19}{2}$ способами, обед уже $\dfrac{18 \cdot 17}{2}$ способами, а ужин: $\dfrac{16 \cdot 15}{2}$ способами. Воспользуемся правилом умножения: получается $\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{8}$ способов.
в) Посчитаем сначала, сколькими способами кошка сможет выбрать себе мышек на том приёме пищи, на котором есть 2 мышки: у неё есть $\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$ способов. Сам этот приём пищи можно выбрать тремя способами. Количество способов выбрать мышек для второго

приёма пищи равно $18 + \dfrac{18 \cdot 17}{2} = 171$, так как две мышки уже были выбраны. Выбрать сам приём пищи осталось 2 способа, один уже выбран. Итого, существует $3 \cdot 190 \cdot 2 \cdot 171$ способов выбрать два приёма пищи **и** мышек для этих приёмов пищи.

Задача 2. Сколько существует способов раскрасить таблицу 2×3 в 2 цвета – белый и чёрный так, чтобы обязательно хотя бы одна клетка была белой и хотя бы одна клетка была чёрной?

Решение. Найдём сначала общее количество способов раскрасить доску в два цвета. Каждая клетка может быть закрашена одним из двух способов, а так как клеток всего 6, то существует $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ способа.

Из этих способов нужно убрать те, которые не удовлетворяют условию задачи. Это те случаи, когда все клетки одноцветные. Существует два таких способа раскраски: когда все клетки белые и когда все клетки чёрные.

Поэтому существует $64 - 2 = 62$ способа раскрасить рассматриваемую доску так, чтобы хотя бы одна клетка была белой и хотя бы одна клетка была чёрной.

8 Комбинаторика-2

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

а) среди них был ровно один туз?

б) среди них был хотя бы один туз?

в) среди них была хотя бы одна карта бубновой масти?

Решение. а) Вначале выберем какой-либо туз. Его можно выбрать 4 способами. Далее осталось выбрать 9 карт из $52 - 4 = 48$

карт, не являющимися тузами. Это можно осуществить C_{48}^{9} способами. Значит, всего способов будет $4 \cdot C_{48}^{9}$.
б) Число способов, в которых был выбран хотя бы один туз, равно числу всех способов, за исключением тех способов, когда ни один туз выбран не был. Всего есть C_{52}^{10} способов выбрать 10 карт из колоды, из которых C_{48}^{10} способов не содержат туза. Поэтому искомое число способов равно $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$.
в) Решение этого пункта аналогично решению предыдущего. Всего есть C_{52}^{10} способов выбрать 10 карт, из которых в C_{52-13}^{10} отсутствует бубновая масть. Итого, получается $C_{52}^{10} - C_{38}^{10}$ способов

Задача 2. У Васи дома есть чай, кофе, какао, апельсиновый и яблочный соки, вода и кока-кола. Он решил составить себе меню напитков на завтрак, обед и ужин на 4 дня так, чтобы наборы напитков не совпадали (Васе не важно, на какой приём пищи он пил, например, чай, важно только, какие напитки он пил в течение дня). Сколькими способами он может это сделать?

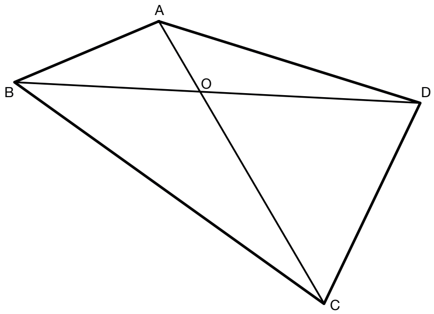
Решение. Узнаем, сколько у Васи есть способов выбрать себе 3 напитка в день. Всего есть 7 вариантов напитков, поэтому способов будет C_7^3. Во второй день он не может выбрать набор, который он выбрал в первый день, поэтому у него остаётся $C_7^3 - 1$ способ. В третий день у него есть $C_7^3 - 2$ способов, и в четвёртый - $C_7^3 - 3$. Итого, у Васи есть $C_7^3 \cdot (C_7^3 - 1) \cdot (C_7^3 - 2) \cdot (C_7^3 - 3)$ способа составить себе меню.

9 Неравенство треугольника

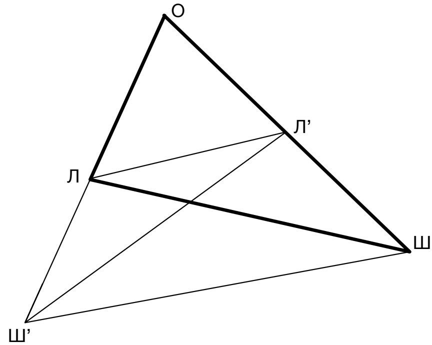
Задача 1. Докажите, что сумма диагоналей любого выпуклого четырёхугольника меньше его периметра, но больше половины периметра.

Решение.

В четырёхугольнике $ABCD$ каждая диагональ формирует 2 треугольника, диагональ AC — треугольники ADC и ABC, диагональ



Задача 1. Выпуклый четырёхугольник



Задача 2. Треугольник

BD — треугольники BAD и BCD.

$$BD < BA + AD$$
$$BD < BC + CD$$
$$AC < AD + DC$$
$$AC < AB + BC$$

Складывая неравенства, получаем

$$2 \cdot BD + 2 \cdot AC < 2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CD + 2 \cdot DA,$$

откуда следует решение первой части задачи.

Для решения второй части задачи рассмотрим более мелкие треугольники, с участием точки O.

$$AB < BO + AO$$
$$AD < AO + DO$$
$$DC < DO + CO$$
$$BC < BO + CO$$

После сложения получаем, что

$$AB + AD + DC + BC < 2 \cdot AO + 2 \cdot OC + 2 \cdot BO + 2 \cdot OD,$$

что после деления обеих частей неравенства даёт нам искомое неравенство.

Задача 2. Угол при вершине О треугольника ЛОШ равен 60°. Докажите, что ЛО + ОШ $\leqslant$ 2ЛШ.

Решение. Если ЛО = ОШ, то треугольник — равносторонний и выполняется равенство ЛО + ОШ = 2ЛШ.

Если треугольник не равносторонний, продляем короткую сторону (пусть это будет ОЛ) на длину стороны ОШ, образуя равносторонний треугольник ОШШ'. На стороне ОШ откладываем отрезок ОЛ'=ОЛ.

Так как ЛШ = Л'Ш', то 2ЛШ = ЛШ + Л'Ш' < ШШ' + ЛЛ' (по задаче 1), а ШШ' = ОШ, ЛЛ' = ОЛ. Утверждение задачи доказано.

10 Подобные треугольники и подсчёт углов

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$ (рис. 5).

Решение. Заметим, что треугольники AA_1C и BB_1C подобны по двум углам: угол ACB у них общий и $\angle BB_1C = \angle AA_1C = 90°$. Поэтому можно записать соотношения для сторон треугольников:

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{B_1C}{A_1C} = \frac{BC}{AC},$$

из второго равенства следует искомое утверждение: $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

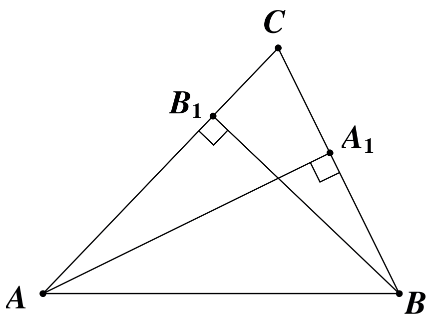


Рис. 5: Иллюстрация к задаче 1.

Задача 2. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивает её диагонали на 3 части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

Решение. Обозначим трапецию за $ABCD$. Пусть отрезок, данный в условии задачи, пересекает стороны и диагонали в точках K, L, M, N, как показано на рисунке 6. Требуется доказать, что $KL = MN$. Из подобия треугольников AKL и ABC следует, что $\dfrac{KL}{BC} = \dfrac{AK}{AB}$. Из подобия треугольников MND и BCD следует, что $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DN}{DC}$. Из теоремы Фалеса для прямых AB и CD и факта параллельности прямых BC, KN и AD следует, что $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{DN}{DC}$. Отсюда

$$\frac{KL}{BC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow KL = MN,$$

что и требовалось доказать.

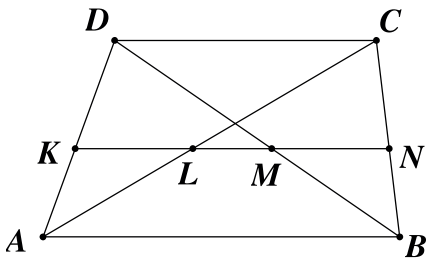


Рис. 6: Иллюстрация к задаче 2.

11 Графы-2

Задача 1. Можно ли между каждыми двумя из 5 городов провести дорогу так, чтобы эти дороги не пересекались?

Решение. Рассмотрим граф на 5 вершинах, вершинами которого являются города, а рёбрами — дороги между ними. Тогда условие задачи можно переформулировать, как: «является ли такой граф планарным». Докажем, что не является. Воспользуемся для доказательства формулой Эйлера.

Подсчитаем количество вершин, рёбер и граней. Вершин — 5, рёбер $C_5^2 = 10$, так как каждое ребро соединяет две вершины. Грани — это простые циклы. Так как все вершины соединены между собой, то любые три вершины образуют простой цикл, поэтому есть хотя бы 10 граней. Но по формуле Эйлера $\text{Г} = \text{Р} + 1 - \text{В} = 10 + 1 - 5 = 6 < 10$. Полученное противоречие доказывает, что граф планарным не является, значит, невозможно искомым образом провести дороги.

Задача 1. Докажите, что в любом планарном графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

Решение. Воспользуемся методом доказательства «от противного»: пусть степень каждой вершины превосходит 5. Так как степень каждой вершины - целое число, то степени всех вершин $\geqslant 6$. Поэтому всего из всех вершин выходит хотя бы 6В ребёр, каждое из которых было посчитано ровно по 2 раза, отсюда

$$\text{Р} \geqslant \frac{6\text{В}}{2} = 3\text{В} \Leftrightarrow \text{В} \leqslant \frac{\text{Р}}{3}.$$

Найдём зависимость между количеством граней и количеством рёбер. Каждая грань состоит как минимум из трёх рёбер. Значит, все грани состоят из хотя бы 3Г рёбер, каждое из которых было посчитано не более двух раз. Поэтому

$$\text{Р} \geqslant \frac{3\text{Г}}{2} \Leftrightarrow \text{Г} \leqslant \frac{2\text{Р}}{3}.$$

Сложим получившееся неравенства для граней и вершин: $\text{В} \leqslant \frac{\text{Р}}{3}$ и $\text{Г} \leqslant \frac{2\text{Р}}{3}$, откуда: $\text{Г}+\text{В} \leqslant \text{Р}$. Полученное неравенство противоречит формуле Эйлера: $\text{Г}+\text{В}=\text{Р}+1$. Полученное противоречие завершает доказательство данной задачи.

12 Метод полной математической индукции

Задача 1. Доказать, что сумма модулей любого количества чисел не меньше модуля суммы этих чисел.

Решение. База: докажем утверждение для двух чисел $|x|+|y| \geqslant |x+y|$. Если они одного знака, то достигается равенство. Если числа разных знаков, то нетрудно понять, что число, стоящее в левой части неравенства, по модулю больше правого.

Переход: пусть выполняется утверждение для n чисел:

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geqslant |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|.$$

Докажем, что выполняется утверждение для $n+1$ числа:

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}| \geqslant |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}|.$$

Это действительно так:

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}| \geqslant |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \geqslant$$

$$\geqslant |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}|,$$

где первое неравенство следует из утверждения n, а второе из утверждения 2. Таким образом, мы доказали требуемое.

Задача 2. Доказать, что любое число можно представить в виде суммы различных степеней двойки.

Решение. База: число $n = 0$ можно представить в виде суммы нуля различных степеней двойки.

Переход: докажем, что любое число n можно представить в виде суммы различных степеней двойки, пользуясь некоторыми предыдущими утверждениями. Рассмотрим наибольшую степень двойки 2^k такую, что $2^k \leqslant n$. По предположению индукции, число $n - 2^k$ можно представить в виде суммы различных степеней двойки. При этом ни одна из этих степеней двойки не будет равна k, потому что $n - 2^k < 2^k \Leftrightarrow n < 2^{k+1}$ (иначе k была бы не наибольшей степенью двойки).

Следовательно и число n также можно представить в виде различных степеней двойки. На этом доказательство завершено.

На самом деле, таким образом мы доказали единственность перевода числа в двоичную систему счисления.

Задача 3. Любую ли сумму из целого числа рублей, большую семи рублей, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

Решение. Докажем, что любую сумму, начиная с 8 рублей можно уплатить купюрами в 3 и 5 рублей.

База: $8 = 3 + 5$; $9 = 3 + 3 + 3$; $10 = 5 + 5$.

Переход: из утверждения номер n следует утверждение номер $n + 3$. Действительно, если n рублей можно представить как сумму 3 и 5 рублевых купюр, то, добавив 3 рубля, мы представим $n + 3$ рубля.

Тройная база: $n = 8, 9, 10$ и переход $Y_n \to Y_{n+3}$ доказывает утверждение задачи.

13 Вписанные четырёхугольники

Задача 1. $ABCD$ — вписанный в окружность радисуса R четырёхугольник, $AC \perp BD$, P — точка пересечения диагоналей (рис. 7).

а) Найти $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.

б) Найдите сумму квадратов сторон $ABCD$.

Решение. а) Воспользуемся этим фактом для решения задачи: $90^\circ = \angle APB = \dfrac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$, откуда $\smile AB + \smile CD = 180^\circ \Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle COD = 180^\circ - \alpha$.

Продолжим AO до пересечения с окружностью в точке A_1 (рис. 8). Вспомним следующий факт: угол между хордами равен полусумме дуг, которые находятся между этими хордами.

Значит, $\dfrac{\smile AD + \smile BC}{2} = 90^\circ$. Но, так как AA_1 — диаметр, то

$$\smile AD + \smile DA_1 = 180^\circ \Rightarrow \smile DA_1 = \smile BC \Rightarrow DA_1 = BC.$$

Тогда,

$$AP^2 + PD^2 + BP^2 + CP^2 = AD^2 + BC^2 = AD^2 + DA_1^2 = AA_1^2 = 4R^2.$$

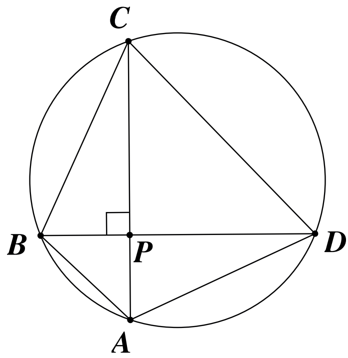


Рис. 7: Иллюстрация к задаче 1

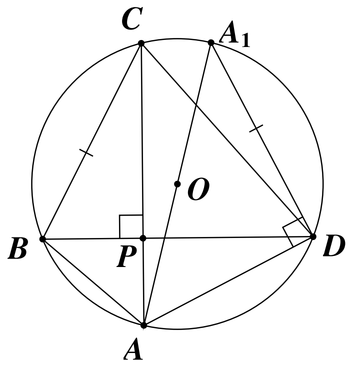


Рис. 8: Дополнительное построение

б) Заметим, что BC^2+AD^2 также равно $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$, поэтому

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2) = 8R^2.$$

Задача 2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне BC. Доказать, что O — центр вписанной окружности треугольника BCM (рис. 9).

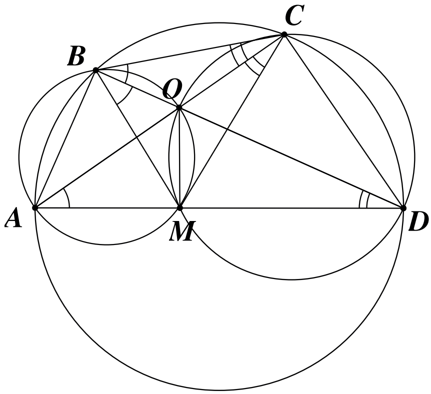


Рис. 9: Иллюстрация к задаче 2.

Решение. Центр вписанной окружности треугольника находится на точке пересечения биссектрис этого треугольника. Докажем, что AO — биссектриса угла DAM. Из вписанного четырёхугольника $ABCD$: $\angle DAC = \angle DBC$, так как эти углы опираются на одну дугу. Из вписанного четырёхугольника $ABMO$: $\angle OBM = \angle OAM$. Отсюда $\angle MAO = \angle DAO$, следовательно, AO - биссектриса угла DAM. Аналогично доказывается, что DO — биссектриса угла ADM: $\angle ADO = \angle ACB = \angle ODM$. Поэтому O — центр вписанной окружности треугольника ADM, что и требовалось доказать.

14 Счётные методы в геометрии

Задача 1. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D так, что $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$. Докажите, что угол ACB — тупой.

Решение. Обозначим угол CAB за α (рис. 10). Воспользуемся теоремой синусов для треугольника ADC:

$$\frac{AD}{\sin\angle ACD} = \frac{DC}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\sin\angle ACD}{\sin\alpha}.$$

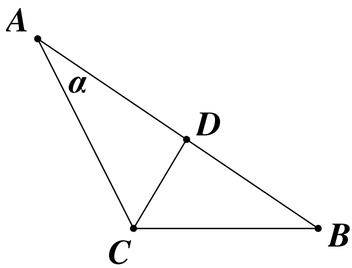


Рис. 10: Иллюстрация к задаче 1.

Воспользуемся также теоремой синусов для треугольника ABC:

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\alpha}.$$

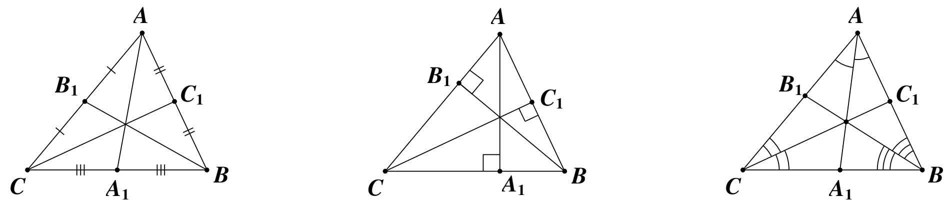
Отсюда, из равенства $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$ следует, что $\sin\angle ACD = \sin\angle ACB$. Синусы углов треугольников могут быть равны, только если они равны, или дают в сумме 180°. Первый случай невозможен, и так как $\angle ACD < \angle ACB$, то угол ACB будет тупым, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать с помощью теоремы Чевы, что а)медианы б)биссектрисы в)высоты треугольника пересекаются в одной точке.

а) Пусть в треугольнике ABC проведены три медианы AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 14а). Из теоремы Чевы:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

поэтому медианы пересекаются в одной точке.



а)медианы б)высоты в)биссектрисы

б) Пусть в треугольнике ABC проведены три высоты AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 14б). Из определения синуса и теоремы Чевы:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} =$$

$$= \frac{AB \cdot \sin \angle BAC}{BC \cdot \sin \angle ACB} \cdot \frac{AC \cdot \sin \angle ACB}{AB \cdot \sin \angle ABC} \cdot \frac{BC \cdot \sin \angle ABC}{AC \cdot \sin \angle BAC} = 1,$$

поэтому высоты пересекаются в одной точке.

в) Пусть в треугольнике ABC проведены три биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 14в). Из свойств биссектрисы и теоремы Чевы:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1,$$

поэтому биссектрисы пересекаются в одной точке.

15 Инвариант и полуинвариант

Задача 1. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадёт с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

Решение. Полуинвариантом в данной задаче является количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше всего. При каждом ходе это число либо не меняется, либо уменьшается на 1. В последнем случае, очевидно, берётся карта загаданной масти. Осталось заметить, что в начале игры характеристика колоды равнялась 13, а в конце — 0, так что по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

Задача 2. На квадратном поле 100×100 на девяносто девяти клетках сидят кролики. После этого на какой-то клетке, у которой не менее двух соседних клеток уже заняты кроликами, может тоже появиться кролик. Докажите, что, тем не менее, кролики никогда не займут все клетки.

Решение. Докажем, что полуинвариантом в данной задаче будет периметр фигуры, занятой кроликами: он не может увеличиваться. Клетка, на которой появится новый кролик имеет хотя бы две клетки соседа с кроликами. Поэтому она может иметь либо 2, либо 3 либо 4 соседа. Всего существует 4 возможных варианта, которые изображены на рисунке 11. В первых двух из них периметр не меняется, в третьем — уменьшается на 2 и в четвёртом — уменьшается на 4.

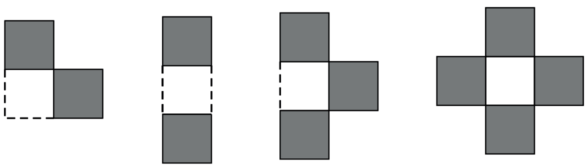


Рис. 11: Возможные расположения кроликов.

Вначале на поле сидело 99 кроликов, поэтому периметр занятой ими фигуры не будет превышать $4 \cdot 99 = 396$. Но в случае, когда все клетки поля заняты, периметр занятой ими фигуры должен быть равен 400. Но $400 > 396$, периметр увеличился, что невозможно. Значит, кролики никогда не займут все клетки.

16 Сравнения по модулю

Задача 1. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$ (то есть, образуют «Пифагорову тройку»). Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Решение. Рассмотрим, какие остатки может давать квадрат натурального числа при делении на 3:

x	0	1	2
x^2	0	1	1

Отсюда можно сделать вывод: если число не делится на 3, то его квадрат даёт остаток 1 при делении на 3. Предположим противное: ни одно из чисел не делится на 3, тогда все квадраты дают остаток 1. Но тогда уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ по модулю 3 записывается как $1+1 \equiv 1$, что неверно. Полученное противоречие означает, что хотя бы одно из чисел x, y или z делится на 3.

Задача 2. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Решение. Обозначим числа $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ и x_7. Сумма любых шести из них делится на 5:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_6 \,\vdots\, 5 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_7 \,\vdots\, 5 \\ \qquad\cdots \\ x_7 + x_1 + \cdots + x_5 \,\vdots\, 5 \end{cases}$$

Просуммируем все эти выражения. Тогда каждое число x_i слева будет встречаться ровно по 6 раз:

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \,\vdots\, 5,$$

откуда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \,\vdots\, 5.$$

Вычитая от сюда каждую из делимостей написанной выше системы, получаем требуемое утверждение: $x_7 \,\vdots\, 5, x_1 \,\vdots\, 5, \ldots, x_6 \,\vdots\, 5$.

Задача 3. Сколько существует натуральных чисел n, меньших 2014, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

Решение. Рассмотрим, какие остатки имеет число n^2 при делении на 7, они будут иметь период длины 7:

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Рассмотрим также, какие остатки будет иметь число 2^n при делении на 7, они будут иметь период длины 3:

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	1	2	4

Поэтому у числа $n^2 - 2^n$ остатки будут иметь период $3 \cdot 7 = 21$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1
2^n	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4

Заметим теперь, что $2014 = 21 \cdot 95 + 19$, поэтому полный период повторится 95 раз. За каждый период будет 6 случаев, когда $n^2 - 2^n = 0$: $n \equiv 2, 4, 5, 6, 10, 15 \pmod{21}$. И ещё за неполный период также будет 6 случаев. Поэтому всего будет $95 \cdot 6 + 6 = 96 \cdot 6 = 576$ таких n, что $2^n - n^2$ делится на 7.

17 Комбинаторика в теории чисел

Задача 1. Сколько заключительных нулей в записи числа 2016! в 99-ричной системе счисления?

Решение. Число $99 = 3^2 \cdot 11$. Количество заключительных нулей какого-либо в 99-ричной системе есть наибольшая степень числа 99, на которую делится исходное число. Определим степени тройки и одиннадцать в разложении 2016!.

Степень тройки $\alpha^3 = \lfloor \dfrac{2016}{3^1} \rfloor + \lfloor \dfrac{2016}{3^2} \rfloor + \dots$.

Воспользуемся тождеством для натуральных p, q и r:

$$\left\lfloor \frac{p}{q \cdot r} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor}{r} \right\rfloor$$

Это позволяет нам вычислять элементы последовательности друг за другом. $\lfloor \frac{2016}{3} \rfloor = 672$, следовательно $\lfloor \frac{2016}{3^2} \rfloor = \lfloor \frac{672}{3} \rfloor = 224$. Итого

$$\alpha_3 = 672 + 224 + 74 + 24 + 8 + 2 = 1004$$

.

Аналогично,

$$\alpha_{11} = 183 + 16 + 1 = 200$$

.

Вспоминаем, что для образования числа 99 нужны две тройки и одно число 11. $\min\left(\dfrac{1004}{2}, \dfrac{200}{1}\right) = 200$.

Задача 2. Найдите сумму всех делителей за исключением самого числа, для чисел 220 и 284, не вычисляя всех делителей.

Первое число раскладывается на множители так: $220 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1$, следовательно сумма всех его множителей, включая его самого будет $S = \dfrac{2^3-1}{2-1}\cdot\dfrac{5^2-1}{5-1}\cdot 11^2 - 111 - 1 = 7\cdot 6\cdot 12 = 504$. Вычтя само число получим результат: 284.

При разложении второго числа на множители получается следующее: $284 = 2^2\cdot 71^1$, что даёт нам сумму делителей $S = \dfrac{2^3-1}{2-1}\cdot \dfrac{71^2-1}{71-1} = 7*72 = 504$. После вычитания самого числа результат оказывается равным 220.

Это — пример «дружественных» чисел. Как мы видим, суммы всех делителей у них равны. Пара 220 и 284 — наименьшая из всех известных пар дружественных чисел.

18 Функции-1

Задача 1. Укажите все точки плоскости (x, y), через которые проходит хотя бы одна кривая семейства $y = p^2 + (2p-1)x + 2x^2$.

Решение. Требуется найти все такие точки (x, y), для которых уравнение $y = p^2 + (2p-1)x + 2x^2$ имеет решение при некотором значении числа p. Если рассматривать числа x, y как параметры, то получается квадратное уравнение относительно p:

$$p^2 + (2x)\cdot p + (2x^2 - x - y) = 0.$$

Это уравнение должно иметь хотя бы одно решение, значит, его дискриминант должен быть неотрицательным:

$$(2x)^2 - 4\cdot(2x^2 - x - y) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant x^2 - x.$$

На плоскости эти точки будут лежать ниже параболы $y = x^2 - x$ (рис. 12). Это множество и будет являться решением данной задачи.

Задача 2. Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух из них действительных корней не имеет?

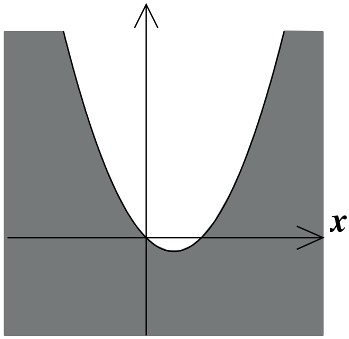


Рис. 12: Искомое множество точек на плоскости.

Решение. Приведём пример таких трёхчленов:

$$f(x) = (x-5)^2 - 1; \quad g(x) = x^2 - 1; \quad h(x) = (x+5)^2 - 1.$$

Тогда каждый из них имеет по два различных корня: $f(x)$ имеет корни 4 и 6, $g(x)$ имеет корни -1 и 1 и $h(x)$ имеет корни -6 и -4.

Рассмотрим их попарные суммы: $f(x) + g(x) = 2x^2 - 10x + 23$ имеет дискриминант $10^2 - 2 \cdot 23 \cdot 4 < 0$. Аналогично, дискриминанты $g(x) + h(x)$ и $h(x) + f(x)$ также отрицательны.

Задача 3. Даны квадратные трёхчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна N. Найдите сумму корней трёхчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = ax^2 + dx + e$. Тогда по теореме Виета сумма корней трёхчлена $f(x)$ равна $-b/a$, а сумма корней трёхчлена $g(x)$ равна $-d/a$. Отсюда $N = -\frac{b}{a} - \frac{d}{a} = -\frac{b+d}{a}$.

Рассмотрим теперь многочлен

$$f(x) + g(x) = 2ax^2 + (b+d)x + (c+e).$$

По теореме Виета сумма его корней равна $-\dfrac{b+d}{2a}$, что равняется $N/2$.

19 Полуинвариант и дискретная непрерывность

Задача 1. Докажите, что существует 100 подряд идущих чисел, среди которых ровно 7 простых.

Решение. Нетрудно понять, что среди первых 100 натуральных чисел есть больше 7-и простых.

Легко привести пример из любого наперёд заданного числа идущих подряд составных чисел. Например, вот 100 подряд идущих составных чисел: $101!+2, 101!+3, \ldots, 101!+101$, первое из них делится на 2, второе на 3, ..., последнее - на 101.

Будем «двигать» ряд из 100 чисел вправо по числовой оси: при этом одно число уберётся слева, и одно добавится справа. При таком процессе количество составных чисел может измениться максимум на 1. Вначале простых чисел было больше 7, а в конце их стало 0. Значит, в силу дискретной непрерывности, существует некоторый момент времени, в который простых чисел ровно 7, что и требовалось доказать.

Задача 2. За круглым столом сидит чётное количество гномов. У каждого на колпаке по несколько помпонов. Причём у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не более, чем на 1. Докажите, что найдётся пара гномов, сидящих друг напротив друга, количества помпонов на колпаках которых отличаются не больше, чем на 1.

Решение. Рассмотрим любых двух гномов, которые сидят напротив друг друга. Пусть разница количества помпонов на их голове равна $x > 0$. Будем двигаться по часовой стрелке, меняя каждого из гномов на следующего. При этом они снова будут сидеть напротив друг друга, и разница количества колпаков изменится не больше, чем на 2. Будем вращать их до тех пор, пока они не поменяются местами. При этом разница помпонов станет равна $-x$. В силу дискретной непрерывности, будет некоторый момент времени, в который разница между количеством помпонов будет 0, -1 или 1, что и требовалось доказать.

20 Метод математической индукции в графах

Задача 1. Любые два города в стране соединены либо водным, либо воздушным транспортом. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы из любого города по-прежнему можно было добраться в любой другой.

Решение. Для удобства будем обозначать водный транспорт сплошными рёбрами, а воздушный — пунктирными.

База. Если есть 2 города, то между ними существует лишь один вид транспорта, и утверждение доказано.

Переход. Пусть утверждение доказано для n городов. Докажем, что оно выполняется для $n+1$ города. Рассмотрим любые n городов из них, и применим для них утверждение индукции. Не умаляя общности, можно считать, что среди этих n городов можно оставить только воздушный транспорт. Рассмотрим $n+1$-ый город. Возможны 2 варианта:

1. Если он соединён с хотя бы одним из остальных городов воздушным транспортом (рис. 13а), тогда от любого города до любого можно добраться, используя только воздушный транспорт, и переход индукции доказан.

2. Если же он соединён со всеми остальными городами водным транспортом (рис. 13б), то из любого города можно добрать-

ся до любого, используя только его. И в этом случае переход индукции также доказан.

а) б

Рис. 13: Индукционный переход по числу вершин

Таким образом, в обоих возможных случаях переход выполняется, утверждение индукции доказано.

Задача 2. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнёт путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

Решение. Для удобства, автомобильную дорогу будем обозначать пунктирными рёбрами, а железную — сплошными. Требуется доказать, что существует маршрут по всем вершинам, который состоит из двух кусков, один из которых полностью из сплошных рёбер, а второй — полностью из пунктирных.

База. Если есть $N = 1$ или $N = 2$ города, то, очевидно, что искомый маршрут существует.

Переход. Пусть утверждение верно для n городов. Докажем его для $n+1$ города. Выберем из этих $n+1$ городов n и применим к ним утверждение индукции. Возможны два варианта:

1. Среди выбранных городов существует искомый маршрут $A_1A_2\dots A_n$, состоящий из одного вида транспорта (рис. 14а). Тогда маршрут $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}A_1$ будет искомым, независимо от того, какими являются рёбра A_nA_{n+1} и $A_{n+1}A_1$.

2. Среди выбранных городов существует маршрут $A_1A_2\dots A_n$, у которого рёбра $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k$ сплошные и рёбра $A_kA_{k+1}, \dots, A_nA_1$ — пунктирные (рис. 14б). Пусть ребро A_kA_{n+1} сплошное, тогда маршрут $A_1A_2\dots A_kA_{n+1}A_{k+1}\dots A_nA_1$ является искомым. Иначе, маршрут $A_1A_2\dots A_{k-1}A_{n+1}A_k\dots A_nA_1$ — искомый.

а) б

Рис. 14: Индукционный переход по числу вершин

Переход доказан, значит, турист сможет выбрать город, с которого он начнёт путешествие и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза, что и требовалось доказать.

21 Функции

Задача 1. Докажите, что многочлен $P(x) = (x+1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

Решение. Воспользуемся теоремой Безу.
Многочлен $x(x+1)(2x+1)$ имеет корни $x = 0; -1; -0,5$.

$$P(0) = (0+1)^6 - 0^6 - 2 \cdot 0 - 1 = 0;$$

$$P(-1) = (-1+1)^6 - (-1)^6 - 2(-1) - 1 = 0;$$

$$P(-0,5) = (-0,5+1)^6 - (-0,5)^6 - 2 \cdot 0,5 - 1 = 0.$$

Отсюда следует, что $P(x)$ делится на x, $x+1$ и $2x+1$, а поэтому и на их произведение $x(x+1)(2x+1)$, что и требовалось доказать.

Задача 2. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$ делится на $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$?

Решение. Воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1};$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1};$$

Для того, чтобы один многочлен делился на другой, необходимо, чтобы их частное тоже было многочленом. Вычислим их частное:

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^{n+1} - 1} = \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}.$$

Для того, чтобы полученное выражение было многочленом, необходимо и достаточно, чтобы $x^{n+1} + 1 \,\vdots\, x + 1$, или, из теоремы

Безу -1 должен быть корнем уравнения $x^{n+1}+1=0$, значит, $(-1)^{n+1}=-1$, что выполняется только для чётных n, что и требовалось найти.

22 Тригонометрия

Задача 1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=2$, $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=3$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

Решение. Воспользуемся формулой для тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Из условия задачи $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=2$;

$$3=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{3}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2}{1-2/3}=6,$$

что и требовалось найти.

Задача 2. Докажите равенство:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

Решение. Докажем вспомогательную формулу:

$$\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b=\operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}.$$

Действительно, пусть $\operatorname{arctg}a=\alpha\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha=a$; $\operatorname{arctg}b=\beta\Leftrightarrow\operatorname{tg}\beta=b$. Отсюда

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b)=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{a+b}{1-ab}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}.$$

Пользуемся доказанной формулой:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{1/3+1/5}{1-1/3\cdot 1/5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{7};$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{1/7+1/8}{1-1/7\cdot 1/8} = \operatorname{arctg}\frac{3}{11};$$

$$\operatorname{arctg}\frac{4}{7} + \operatorname{arctg}\frac{3}{11} = \operatorname{arctg}\frac{4/7+3/11}{1-4/7\cdot 3/11} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

23 Функциональные уравнения

Задача 1. Решить функциональное уравнение:

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x.$$

Решение. Данное функциональное уравнение выполняется для любого x. Подставим вместо x число $1/y$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{y}\right) + 2f\left(\frac{1}{1/y}\right) = \frac{3}{y}.$$

Подставим вместо y число x, откуда

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}.$$

Обозначим $a = f(x)$ и $b = \left(\dfrac{1}{x}\right)$. Тогда

$$\begin{cases} a + 2b = 3x; \\ 2a + b = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow a = f(x) = \frac{2}{x} - x,$$

что и требовалось найти.

Задача 2. Найдите все функции f, которые для всех действительных x, y, z удовлетворяют неравенству

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geqslant 3f(x + 2y + 3z).$$

Решение. Подставим в качестве тройки (x, y, z) числа $(x, 0, 0)$:

$$f(x + 0) + f(0 + 0) + f(0 + x) \geqslant 3f(x + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) \geqslant f(x).$$

Подставим теперь $(x, y, z) = (x/2, x/2, -x/2)$:

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \geqslant 3f\left(\frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} - 3 \cdot \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(0) + f(0) \geqslant 3f(0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(0).$$

Отсюда можно сделать вывод, что $f(x) \equiv f(0) = C$. Также нетрудно понять, что любая функция $f(x) = C$ удовлетворяет условию задачи.

Часть II
Несколько новых тем

1 Симметрия в играх

Задачу на игру определить очень просто: обычно в условии задачи это явно указано. Игроков в игре — двое. В задаче требуется определить, кто выигрывает при правильной игре. Проясним это понятие: правильной называется игра, в которой игроки играют наилучшим образом. Например, пусть мы хотим доказать, что у первого игрока есть выигрышная стратегия. Это значит, что как бы ни играл второй игрок, первый обязательно выиграет. То есть в этом случае мы играем за первого игрока, говорим, как он должен ходить в ответ на любой ход второго.

Часто применяется такое понятие, как «лучший» ход. Иногда игру можно проанализировать до самого конца. Если анализ показал, что начальная позиция выиграна для, скажем, Пети, то это означает, что в любой позиции при своём ходе Вася не может спастись при идеальной игре Пети, то есть, все ходы Васи ведут в позиции, которые выиграны для Пети. При ходе Пети не все ходы могут оказаться хорошими, некоторые могут привести к его проигрышу, но, если позиция была выиграна для него, то всегда существует выигрывающий ход («лучший» ход).

В большинстве игр практически невозможно чётко определить, что значит этот самый «лучший» ход не проанализировав позицию до самого конца. Например, в шахматах есть такое понятие как «жертва фигуры», которая, на первый взгляд, может показаться «плохим» ходом, так как теряется материал. Но в перспективе этот ход может оказаться довольно «хорошим», так как он через несколько ходов приведёт к позиции с более высокой оценкой.

Таким образом, по сделанному ходу часто нельзя сразу же определить, является ли он «лучшим». Поэтому это понятие мы будем применять только в играх, в которых мы можем рассчитать ходы противников до самого конца, а в остальных случаях всячески избегать этого скользкого понятия. И при решении задачи на игры мы будем рассматривать не только те ходы, которые нам кажутся «лучшими», а все возможные.

Довольно распространённой является симметричная стратегия. В этом случае игрок с выигрышной стратегией придерживается некоторой симметрии: на каждый ход соперника он отвечает симметричным ходом.

Задача 1. Пусть есть круглый стол и неограниченное количество одинаковых круглых монет. Двое по очереди кладут монеты на стол, при этом нельзя класть их друг на друга. Проигрывает тот, которому некуда положить монету. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Приведём выигрышную стратегию для первого игрока - то есть мы будем руководить его ходами. Первым ходом положим монету в самый центр стола. На любой ход второго игрока будем ходить центрально симметрично, то есть симметрично относительно центра данного стола.

Докажем, что такая стратегия будет работать: для этого достаточно показать, что первый игрок всегда сможет сделать ход. В силу стратегии, после хода первого игрока расположение монет на столе всегда будет оставаться центрально симметричным. Это значит, что если второй игрок кладёт куда-нибудь на стол монету, то центрально симметричное место остаётся свободным — именно на это место мы и положим монету.

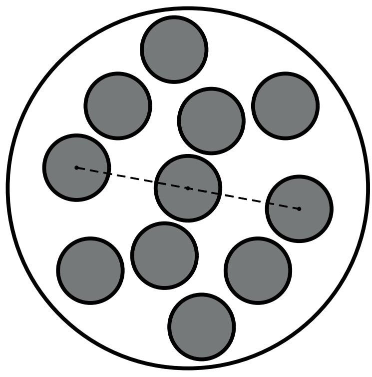


Рис. 15: Симметричная стратегия

Приведём пример другой задачи, где симметрия выражена менее ярко:

Задача 2. Пусть дано две кучки, в каждой из которых лежит по 20 камней. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Докажем, что у второго игрока есть выигрышная стратегия, то есть будем руководить его ходами. На любой ход первого мы будем брать такое же количество камней из другой кучки. Тогда после любого хода второго камней в обоих кучках будет поровну. Это означает, что после любого хода первого количество камней в кучках различное, и второй сможет сделать свой ход.

Как можно заметить, симметрия в этой задаче уже не геометрическая: симметрия заключалась в равенстве кучек.

Задача 3. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 7. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. В данном случае позиция — это одно число. Назовём *выигрышными* те позиции, в которых совершающий ход игрок выигрывает при наилучшей игре обоих сторон, в *проигрышными* те, в которых совершающий ход игрок не может избежать поражения. Любая из возможных в игре позиций может быть либо выигрышной либо проигрышной. Воспользуемся анализом с конца. Все числа от 143 до 1000 являются выигрышными, так как умножив число на 7 мы достигнем цели. Все позиции от 72 до 142 являются проигрышными, потому что любой ход из такой позиции неизбежно приводит к позиции, выигрышной для соперника : при домножении числа от 72 до 142 на число от 2 до 7 получается число от 144 до 994. Продолжая аналогичным образом, получаем: позиции от 11 до 71 - выигрышные, позиции с 6 по 10 — проигрышные, и позиции с 1 по 5 — выигрышные.

Получается, что начальная позиция — выигрышная, значит, при правильной игре выигрывает первый игрок.

Обратите внимание, что при игре двух соперников позиция является выигрышной тогда, когда существует хотя бы идин ход, ведущий в проигрышную позицию. А вот для того, чтобы объявить позицию проигрышной требуется установить, что абсолютно все возможные ходы ведут в выигрышные позиции.

Домашнее задание.

Задача 1. Дана плитка шоколада размером 6 на 12 долек. Двое играют в следующую игру: можно взять любой прямоугольный кусок и разломать его по линии раздела долек на два меньших прямоугольных куска. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 2. На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 3. На доске написано число 2014. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (единица тоже степень двойки) и заменить написанное на доске число на него. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет при правильной игре?

2 Раскраски

Большинству из нас с детства знакома шахматная доска и порядок, в котором расположены чёрные и белые поля. Оказывается, эта раскраска помогает решить некоторые задачи намного более наглядным и понятным способом. В качестве разминки рассмотрим одну из самых известных задач по данной теме:

Задача 1. Дана доска размером 8×8 клеток, у которой вырезан левый нижний и правый верхний углы. Можно ли такую доску разрезать на домино размером 1 на 2 клетки (рис. 16)?

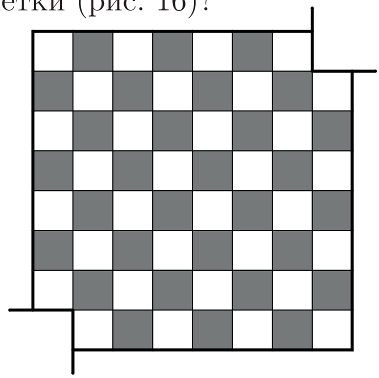


Рис. 16: Шахматная раскраска

Решение. Пытаясь подобрать пример такого разбиения, мы всё время будем терпеть неудачу, что заставляет задуматься — может быть, это вообще невозможно? Но как доказать, что это невозможно? Ведь существует просто огромное количество вариантов, и перебрать их все не хватит времени не только на олимпиаде, но и у самого мощного компьютера. Тут нам на помощь приходит шахматная раскраска. Рассмотрим сначала доску без вырезанных уголков: в ней количество белых и количество чёрных полей будет одинаковыми: по 32 клетки. Заметим теперь, что левый нижний и правый верхний углы одного цвета. Пусть этот цвет оказался чёрным (случай с белым цветом абсолютно аналогичен). Тогда у доски с двумя вырезанными полями 32 белых и 30 чёрных полей. Но каждая доминошка состоит из одной белой и одной чёрной клетки! Значит и доска, разрезанная на домино, должна содержать поровну чёрных и белых клеток, что не так. Следовательно, данную доску нельзя разрезать на домино.

Рассмотренная раскраска является далеко не единственной, которая используется при решении подобного типа задач, а именно, следующие раскраски встречаются также довольно часто:

- «полосатая раскраска»: в ней первый столбец полностью чёрный, следующий за ним — белый, потом снова чёрный, и так далее (рисунок 17).
- «большая шахматная раскраска»: почти то же самое, что и обычная шахматная раскраска, только всё разбивается на квадраты 2 на 2 (рисунок 18).

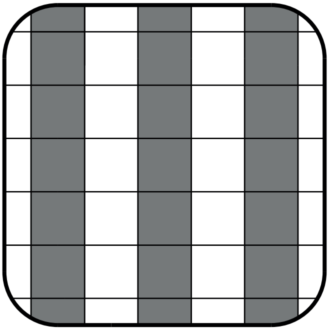


Рис. 17: «полосатая раскраска»

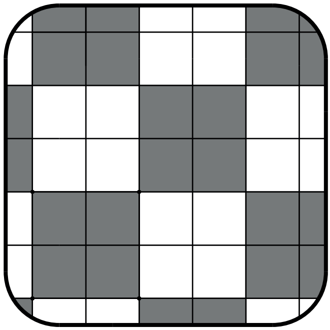


Рис. 18: «большая шахматная раскраска»

Раскраски используются, как правило, чтобы доказать, что требуемое разбиение не существует. Обычно в задаче не сразу понятно, какую нужно использовать раскраску для решения, поэтому первым шагом следует понять, какую именно? Рассмотрим следующую задачу:

Задача 2. Дана доска размером 10 на 10. Можно ли её разрезать на прямоугольники размером 1 на 4?

Решение. Попробуем использовать шахматную раскраску — тогда на ней будет по 50 чёрных и белых полей. Но ведь каждый прямоугольник занимает по 2 чёрных и 2 белых поля, то есть, теоретически, 25 прямоугольников размером 1 на 4 будут давать 50 чёрных и 50 белых полей, и никакого противоречия в этом случае не получается. Но отсюда вовсе не следует, что подобное разбиение существует. Используем «большую» шахматную раскраску. Тогда доска делится на 25 квадратов 2 на 2, и из них 13 будут чёрными, а 12 — белыми. Значит, всего будет 52 чёрных и 48 белых полей. Но каждый прямоугольник 1 на 4 занимает ровно 2 чёрных и ровно 2 белых поля. Отсюда получается противоречие.

Домашнее задание.

Задача 1. Можно ли доску 10×10 с вырезанными левым нижним и правым верхним углами обойти ходом шахматного коня, побывав в каждой клетке ровно по 1 разу?

Задача 2. Можно ли квадрат 8×8 с вырезанной угловой клеткой разрезать на прямоугольники размером 1 на 3 ?

Задача 3. На клетчатой доске стоит фигура «бобёр», которая может ходить на три клетки по горизонтали и на одну по вертикали или пять клеток по вертикали и одну по горизонтали. Может ли «бобёр», сделав несколько ходов, попасть в соседнюю с начальной клетку?

3 Логические задачи

Зачастую в олимпиадах школьников встречаются задачи, которые можно объединить в общую группу так называемых «логических задач». Зачастую данные задачи вызывают большое раздражение у участников олимпиад, так как многие логические переходы, которые требуют объяснения по критериям оценки данной задачи кажутся им «очевидными». Самый простой способ не лишиться баллов из-за недостаточно правильного оформления – написать решение задачи настолько подробно, чтобы его понял даже первоклассник. Правда, тогда есть шанс вызвать раздражение жюри «простынёй текста», но баллов за раздражение по критериям снять не смогут.

Рассмотрим несколько классических типажей задач на логику.

Задача 1. У бобрих Тата, Диди и Дита проколоты уши. На троих у них три пары серёжек — красные, зелёные и синие (они бывают для правого уха и для левого). У Тата цвета серёжек в разных ушах совпадают. У Диди точно нет ни одной красной серёжки. У Дита в правом ухе зелёная серёжка, а в левом — другого цвета. У кого на левом ухе синяя серёжка?

Решение. Определим, какого цвета серёжка в правом ухе у Диди. Она не красного цвета, а правая зелёная у Дита, значит в правом ухе у Диди синяя серёжка. Тогда, в правом ухе у Тата оставшаяся красная серёжка. Цвета серёжек у Тата одинаковы, значит в левом ухе у неё тоже красная серёжка. Тогда у Дита, так как в правом — зелёная, а в левом — другого цвета, а красная уже занята, в левом ухе синяя серёжка. Ответ: у Дита.

Логика часто имеет дело с **высказываними**. Каждое высказывание может быть истинным или ложным. Если мы не можем построить чёткого отрицания высказывания, значит мы неверно его сформировали.

Задача 1. Постройте отрицание высказыванию «Нынешний король Франции имеет бороду»

Решение. Для начала давайте определимся, что сейчас в Франции нет короля. Тогда, вроде бы, приведённое высказывание является ложным и нам достаточно высказать что-либо, являющееся истинным? Например, высказывание «два плюс два равно четыре»? Не конечно. Отрицание высказывания подразумевает, что если высказывание было истинно, то результат должен быть ложным, а если оно было ложным, то результат должен быть истинным. Наше высказывание ложно в настоящее время, но на логику не должна иметь влияние правдоподобность или невозможность конкретного высказывания. При смене истинности искомого высказывания должен измениться и результат операции. Верен ли ответ: «У нынешнего короля Франции нет бороды»? Исходное высказывание было ложно и новое высказывание тоже ложно (ведь у Франции нет короля). Мы должны были быть внимательными и понять, что исходная фраза высказыванием с точки зрения логики не является! Её нужно разбить на две: «Имеется некто, являющийся королём Франции» **и** «этот некто имеет бороду». Отрицать нужно два высказывания, связанные операцией **и**. Например, так:

«Или персоны, называемой королём Франции не существует, **или** эта персона не имеет бороды»

Более простой вариант звучит так:

«Неверно, что нынешний король Франции имеет бороду».

Задача 1. После родительского собрания к учительнице подошёл один из родителей.

— Вы не назвали моего сына в числе хороших учеников, а ведь он — отличник и чемпион школы по лыжам.

— Да, но мы считаем хорошим учеником, того, кто хорошо учится, дисциплинирован, помогает отстающим и участвует в работе научного кружка или занимается спортом. Ваш же Федя ...

Что могла сказать учительница?

Решение. Введём высказывания:

A — Федя хорошо учится

B — Федя дисциплинирован

C — Федя помогает отстающим

D — Федя участвует в работе научного кружка

E — Федя занимается спортом.

Высказывание «Федя — хороший ученик» есть

$$A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E).$$

Учительница говорит, что это высказывание ложно.

$$A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E) = 0$$

$$\overline{A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E)} = 1$$

$$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{(D \vee E)} = 1$$

$$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee (\overline{D} \wedge \overline{E}) = 1$$

Так как $A = 1$ и $E = 1$, то

$$0 \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee (\overline{D} \wedge 0) = 1$$

$$\overline{B} \vee \overline{C} = 1$$

То есть Федя или недисциплинирован, или не помогает отстающим или и то и другое.

Одним из классических методов оформления задач на логику является составление таблиц. Рассмотрим следующую задачу:

Задача 1. Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподаёт литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподаёт каждый из них?

Решение. Составим таблицу парных соответствий между именами, городами и предметами. Мы объединим их в одну таблицу на рис. 19.

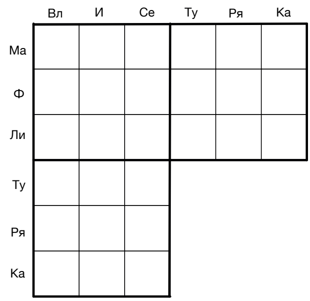


Рис. 19: Таблица для логической задачи

Заполним таблицу фактами из условия задачи, для этого мы проставим минусы в те клетки, в которых утверждение ложно и плюсики в те, где утверждение истинно. Так как у нас условия взаимоисключающие (то есть, учитель математики не живёт одновременно в Туле и Калуге), то, поставив плюсик в клетку, мы должны поставить минусы в остальные клетки в подтабличке 3×3 в той же строке и том же столбце. Как только мы поставили минус после условия «рязанец преподаёт не физику», мы обнаруживаем, что в столбце «Рязань» в правой подтаблице у нас осталась единственная пустая клетка, в неё ставим плюсик. После первоначального заполнения мы видим такую таблицу (Рис. 20a) :

Мы уже получили достаточно много информации: учитель литературы живёт в Туле, учитель математики — в Рязани и учитель физике — в Калуге.

Начнём рассуждать. Игорь живёт не в Туле, Игорь — не математик, математик живёт в Рязани $\rightarrow$ Игорь живёт не в Рязани $\rightarrow$ Игорь живёт в Калуге. Ставим плюсик. Теперь мы знаем, что Вла-

	Вл	И	Се	Ту	Ря	Ка
Ма		-		-	+	-
Ф				-	-	+
Ли				+	-	-
Ту		-				
Ря	-					
Ка						

а) После первого заполнения

	Вл	И	Се	Ту	Ря	Ка
Ма	-	-	+	-	+	-
Ф	-	+	-	-	-	+
Ли	+	-	-	+	-	-
Ту	+	-	-			
Ря	-	-	+			
Ка	-	+	-			

б) Решённая задача

Рис. 20: Решение задачи про учителей

димир живёт в Туле и Сергей — в Рязани. Объединив наши знания, мы получаем заключительную таблицу (рис. 20б).

Ещё одной важной темой в логических задачах является задачи про рыцарей (правдолюбцев), которые всегда говорят правду, лжецов, которые всегда лгут и хитрецов, которые могут говорить как правду, так и ложь (возможно, с наложенными ограничениями). Рассмотрим задание на эту тему:

Задача 1. Из трёх человек, А,В и С, один – рыцарь, другой – лжец, третий – хитрец. А сказал: «Я хитрец». В сказал: «А и С иногда говорят правду». С сказал: «В — хитрец». Кто из них лжец, кто — рыцарь, а кто хитрец?

Решение. А говорит, что он хитрец, значит он не может быть рыцарем, так как в таком случае он соврёт.

Пусть А лжец. Тогда он никогда не говорит правду, а, значит, В солгал, так как если он говорит, что А и С иногда говорят правду, то правдой будет только одновременное выполнение этих условий. Тогда, В — хитрец. Значит, С — рыцарь, и С говорит правду. Данный вариант нам подошёл. Но мы должны проверить все возможные варианты.

Пусть А — хитрец. Тогда С точно лжёт, так как В не может быть тоже хитрецом. Значит, С лжец, так как хитрец у нас уже есть. Тогда В — рыцарь. Но С никогда не говорит правду, значит, В солгал.

Таким образом, мы получили единственный ответ: А — лжец, В — хитрец, С — рыцарь.

Задача 1. Андрей, Борис, Василий, Георгий и Дмитрий приняли участие в конкурсе. У Дмитрия спросили: «Кто старше, вы или Борис?». Он ответил: «Если я старше Андрея, то я либо старше Бориса либо моложе Василия. Если я не старше Бориса, то я моложе Георгия. Если я моложе Георгия и старше Андрея, то я не моложе Василия. Если я моложе Георгия и не старше Бориса, то я старше Андрея».

Какой правильный ответ на вопрос журналиста?

Решение. Обозначим за A высказывание «Дмитрий старше Андрея», за B — «Дмитрий старше Бориса», за C — «Дмитрий старше Василия», за D – «Дмитрий старше Георгия».

Тогда высказывания образуют систему логических уравнений:

$$\begin{cases} A \implies B \vee C & = 1 \\ \overline{B} \implies D & = 1 \\ D \wedge A \implies \overline{C} & = 1 \\ D \wedge \overline{B} \implies A & = 1 \end{cases}$$

Упрощая:

$$\begin{cases} \overline{A} \vee B \vee C & = 1 \\ B \vee D & = 1 \\ \overline{D} \vee \overline{A} \vee \overline{C} & = 1 \\ \overline{D} \vee B \vee A & = 1 \end{cases}$$

Составив таблицу истинности для четырёх переменных и вычеркнув неинтересные строки, не удовлетворяющие условиям, получаем, что везде $B = 1$.

Домашнее задание.

Задача 1. На Марсе жители имеют либо 7 щупалец, либо 8. Первые всегда врут, вторые всегда говорят правду. Вот разговор трёх марсиан:

- Фиолетовый марсианин: мы трое имеем вместе 24 щупальца.

- Оранжевый марсианин: ты сказал правду.

- Синий марсианин: фиолетовый соврал.

Сколько у кого щупалец?

Задача 2. Из трёх жителей К, М и Р острова правдолюбцев и лжецов двое сказали:

К: «Мы все лжецы».

М: «Ровно один из нас правдолюбец».

Кто из жителей К, М и Р правдолюбец и кто лжец?

Задача 3. Путешественник посетил остров, на котором живут рыцари и лжецы. Он познакомился с 10 туземцами и захотел установить, сколько из них рыцарей, а сколько лжецов. Он задал первому туземцу 9 вопросов: рыцарь ли второй? рыцарь ли третий? ... рыцарь ли 10-й? По ответам он смог установить количество рыцарей среди этой десятки. Установите и вы.

Задача 4. За круглым столом сидят 12 рыцарей и лжецов. Каждый из них заявил, что каждый из сидящих за столом, кроме, может быть его самого и его соседей — лжецы. Сколько всего рыцарей было за столом? А если за столом было 13 человек?

Задача 5. В поезде, в одном купе, ехали астроном, поэт, прозаик и драматург. Их фамилии были Алексеев, Борисов, Константинов и Дмитриев. Каждый из них взял с собой книгу, написанную одним из пассажиров купе. Алексеев и Борисов поменялись книгами и углубились в чтение. Поэт читал пьесу. Прозаик, очень молодой человек, выпустивший свою первую книгу, говорил, что он никогда ничего не читает по астрономии. Борисов купил в дорогу одно из произведений Дмитриева. Никто из пассажиров не покупал и не читал книг, написанных им самим. Что читал каждый из них? Кто кем был?

4 Принцип крайнего

Название принципа «крайнего» говорит само за себя — для решения задачи нужно найти и рассмотреть некоторый «крайний» объект. Что значит «крайний»? Оно может немного сбивать с толку, особенно если это задача на числа, а не геометрическая задача. «Крайний» — это обычно наибольшее или наименьшее число, выражающее какое-то свойство, присутствующее в задаче. Это может быть, например, наибольшее расстояние между точками, если дано множество точек; это может быть наименьшая из площадей треугольников, наименьший угол и тому подобное.

Задача 1. В круге радиуса 1 расположено 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше единицы.

Решение. По крайней мере, 7 из этих точек лежат не в центре этого круга. Обозначим их $A_1, \ldots, A_7$. Пусть O — центр окружности. Зададимся вопросом: чему может быть равен наименьший из углов A_iOA_j? (рис. 21)

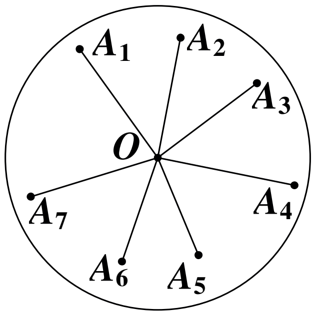


Рис. 21: Соединим центр с точками $A_1, \ldots, A_7$.

Так как полный угол в 360° делится на 7 углов, то наименьший из углов будет меньше либо равен 360°/7. Действительно: если это не так, то каждый угол больше, чем 360°/7, а значит, сумма всех этих 7 углов больше 360°. Пусть X и Y — точки, которые соответствуют наименьшему углу. Рассмотрим треугольник OXY. Докажем, что в этом треугольнике отрезок $XY < 1$. Так как $XOY \leqslant 360°/7 < 60°$, то угол XOY не может являться наибольшим в треугольнике. А так как оба отрезка OX и OY не больше единицы, то отсюда $XY < 1$, так как напротив большего

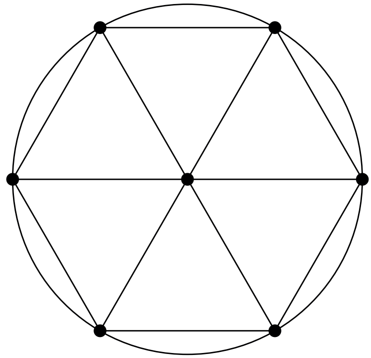


Рис. 22: Случай расположения 7 точек

угла лежит большая сторона.

Заметим, что если бы в задаче было бы не 8, а 7 точек, то их можно было бы разместить в вершинах и центре правильного шестиугольника, расположенного на окружности данного круга, и в этом случае не существовало бы точек, расстояния между которыми меньше единицы. (см. рис. 22)

Задача 2. Доказать, что при любом натуральном n число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ не является целым.

Решение. Рассмотрим среди чисел от 1 до n наибольшую степень двойки, пусть это 2^k. Тогда среди оставшихся чисел больше нет делящихся на 2^k — следующее число, делящееся на 2^k это 2^{k+1}, и оно уже больше n, так как мы рассматривали наибольшую степень двойки. Значит, все оставшиеся числа от 1 до n делятся максимум на $k-1$ степень двойки.

Приведём числа к общему знаменателю — наименьшему общему кратному чисел от 1 до n. Тогда знаменатель получившейся дроби будет числом вида $x \cdot 2^k$, где x — нечётное число. В числителе будет сумма $n-1$ чётного числа и нечётного числа x, которое даёт слагаемое $\frac{1}{2^k}$, значит, числитель будет нечётным. Но нечётное число не может делиться на чётное, поэтому дробь не может оказаться целым числом.

Как в рассмотренной задаче догадаться, что рассматривать нужно наибольшую степень двойки? В задаче идёт речь о делимости, и приведение к общему знаменателю является разумным ходом. Посмотрев частные случаи для небольших n, можно увидеть, что в числителе получаются все нечётные числа, кроме одного — того, которое получилось из степени двойки.

Домашнее задание.

Задача 1. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трёх). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

Задача 2. В некоторой стране 2014 аэродромов, причём все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолёт и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолётов.

5 Неравенства

С понятием неравенства каждый из вас сталкивался ещё с младшей школы, когда приходилось сравнивать целые числа. Сложнее дело обстоит, если числа заданы некоторой формулой. Тогда не сразу понятно, где именно на числовой оси находятся эти числа.

Одним из наиболее используемых неравенств является неравенство Евклида, которое гласит, что квадрат любого числа неотрицателен:

$$x^2 \geqslant 0 \text{ для любого } x,$$

его вы должны были проходить в 6-7 классе.

Неравенства одного знака можно складывать. Обе части неравенства можно домножить на положительное число. При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства поменяется. Если обе части неравенства неотрицательные, их можно возвести в квадрат.

Доказать неравенство — значит доказать, что оно выполняется при любых значениях переменной или переменных. Распространённой ошибкой является рассматривание частных случаев, или только целых значений переменных (когда например, в условии сказано, что $x \geqslant 0$).

Одними из широко используемых неравенств являются неравенства о средних:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \text{ для любых } x, y \geqslant 0.$$

Число $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ называется средним гармоническим чисел x и y, $\sqrt{xy}$ — средним геометрическим, $\frac{x+y}{2}$ — средним арифметическим и

$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ — средним квадратичным.

Докажем наиболее часто используемое в задачах неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическим. Требуется доказать, что $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ при неотрицательных x и y.

Домножим обе части неравенства на 2 и возведём его в квадрат. Мы можем возвести обе части в квадрат, так как обе части неотрицательны.

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leqslant x+y \Leftrightarrow 4xy \leqslant x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (x-y)^2$$

Все переходы, которые мы использовали при доказательстве, являются равносильными, а так как последнее неравенство выполняется для любых неотрицательных x и y, то и исходное неравенство выполняется для любых неотрицательных x и y. Остальные неравенства о средних доказываются похожим образом.

Иногда неравенство можно представить как сумму более простых неравенств, как это будет проделано в следующей задаче:

Задача 1. Доказать, что для любых $x, y, z \geqslant 0$ выполняется неравенство:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

Решение. Раскроем скобки: $3+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \geqslant 9 \Leftrightarrow$ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \geqslant 6$. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел x/y и y/x. Получаем:

$$\frac{x/y+y/x}{2} \geqslant \sqrt{x/y \cdot y/x} = 1 \Leftrightarrow x/y+y/x \geqslant 2.$$

Аналогично доказывается, что $x/z+z/x \geqslant 2$ и $y/z+z/y \geqslant 2$. Складывая эти три неравенства, получаем искомое.

Задача 2. Какое из чисел больше: 3^{2014} или 5^{1342}?

Решение. Воспользуемся методом вставки: найдём такое число, которое больше одного из данных чисел, но меньше другого. Возводить 3 и 5 в такие степени конечно не получится, поэтому попробуем выписать несколько степеней:

$$3, 9, 27, \ \ldots, \ 5, 25, 125, \ \ldots$$

Найдём две достаточно «близкие» степени: заметим, что $27 > 25$, а значит $3^3 > 5^2$. Возведём обе части этого неравенства в 671 степень, получаем: $3^{2013} > 5^{1342}$. Отсюда получаем, что $3^{2014} > 3^{2013} > 5^{1342} \Rightarrow 3^{2014} > 5^{1342}$.

Домашнее задание.

Задача 1. Докажите, что для любых x, y и z выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$$

Задача 2. Найдите наименьшее значение выражения $x + \dfrac{1}{4x}$ при положительных x.

Задача 3. Что больше: $2014^{2015} + 2015^{2014}$ или $2014^{2014} + 2015^{2015}$?

6 Индукция в неравенствах

Некоторые неравенства можно решить, пользуясь методом математической индукции. Так как речь идёт об индукции, то такие неравенства должны зависеть от натурального числа n, по которому и будет вестись индукция. Например, неравенства $2^n > n^2$ или $n! > 3^n$, где n — натуральное. Доказать по индукции, например, что для любых действительных чисел $x : x^2 \geqslant 0$, уже невозможно (хотя это очевидно доказывается без индукции).

Докажем несколько классических неравенств:

Задача 1. Доказать, что при любых натуральных $n \geqslant 2$ и действительных $x > -1$, $x \neq 0$ выполняется неравенство

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Решение. База индукции: $n = 2$, действительно: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, так как $x^2 > 0$.

Индукционный переход: пусть утверждение выполняется для n: $(1+x)^n > 1 + xn$, требуется доказать его для $n+1$: $(1+x)^{n+1} > 1 + x(n+1)$. Домножим обе части неравенства $(1+x)^n > 1 + xn$ на $x + 1$. От этого его знак не поменяется, так как $1+x$ — положительное число. Получаем, что верно следующее неравенство: $(1+x)^{n+1} > (1+xn)(1+x) = 1 + x(n+1) + x^2 > 1 + x(n+1)$, то есть, утверждение $n+1$ доказано. Значит, неравенство выполняется для всех натуральных n. Неравенство, доказанное выше, называется неравенством Бернулли.

Задача 2. Докажите неравенство для натуральных n:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Решение. База индукции очевидна: при $n = 1$: $1 \geqslant 1$ выполняется.

Докажем переход. Для этого докажем, что приращение левой части неравенства при переходе от n к $n+1$ больше, чем приращение правой части неравенства. Приращение левой части составляет $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, а приращение правой: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \Leftrightarrow 1 > n+1-\sqrt{n^2+n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} > n \Leftrightarrow n^2+n > n^2.$$

Так как выполняется утверждение n: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$ и неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, то, сложив эти два неравенства, мы получим $n+1$-ое утверждение: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1}$. Переход доказан.

Задача 3. Доказать, что для любых натуральных $n \geqslant 2$ выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < 1.$$

Решение. База индукции очевидна: $\dfrac{1}{2^2} < 1$.

Попробовав применить такой же метод, как в предыдущей задаче, мы потерпим неудачу: приращение левой части равно $1/n^2$, в то время как приращение правой части равно нулю. Но $1/n^2 > 0$ - и это вовсе не означает, что исходное неравенство неверное, просто метод не работает. Попробуем доказать более сильное утверждение: $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dots+\dfrac{1}{n^2} < 1-\dfrac{1}{n}$ для любых натуральных n.

База: $n=2: \dfrac{1}{2^2} < 1-\dfrac{1}{2}$.

Переход: докажем, про приращение левой части меньше, чем приращение правой. Приращение левой части составляет $\frac{1}{(n+1)^2}$. Приращение правой: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Но $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, так как $(n+1)^2 > n(n+1)$, откуда следует доказательство перехода.

В ряде задач, как, например, в только что рассмотренной, доказательство более содержательного утверждения быстрее приводит к решению.

Домашнее задание.

Задача 1. Доказать, что для всех натуральных n выполняется неравенство:

$$\sqrt{\underbrace{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\cdots+\sqrt{4}}}}_{n}} < 3$$

Задача 2. Доказать, что для любого натурального $n > 1$ выполняется неравенство:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Задача 3. Доказать, что при $n > 1$ выполняется неравенство:

$$2! \times 4! \times \ldots \times (2n)! > \big[(n+1)!\big]^n$$

7 Степени точек и радикальные оси

Определение. степенью точки относительно окружности ω называется число $d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки до центра окружности, а R — радиус окружности. Обозначается как $\deg(M, \omega)$.

Заметим, что внутри окружности степень точки отрицательна, на окружности равна нулю, и вне окружности - положительна. Сформулируем две важные теоремы, связанные со степенью точки:

Теорема о двух хордах. Пусть хорды AB и CD окружности ω пересекаются в точке T. Тогда $AT \cdot BT = CT \cdot DT = -\deg(\omega, T)$. (рис. 23)

Теорема о касательной и секущей. Пусть дана окружность ω и точка S вне её. Проведём из точки S касательную SA к окружности и секущую, имеющую общие точки B и C с окружностью ω . Тогда $SA^2 = SB \cdot SC = \deg(\omega, S)$. (рис. 24)

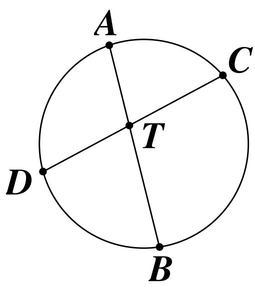


Рис. 23: Теорема о двух хордах

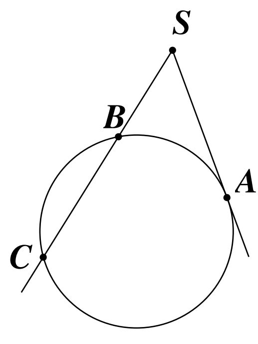


Рис. 24: Теорема о касательной и секущей

Доказательства обоих теорем основаны на подобии треугольников. Первая теорема позволяет находить степень точки, находящей внутри окружности, а вторая - для точки, находящейся снаружи окружности.

Определение. Радикальной осью двух неконцентрических окружностей называется геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно этих двух окружностей.

Радикальная ось - это прямая, перпендикулярная линии центров окружностей, причём для пересекающихся окружностей это прямая, содержащая их общую хорду, для касающихся - их общая касательная.

Задача 1. Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум непересекающимся окружностям лежат на одной прямой. (рис. 25)

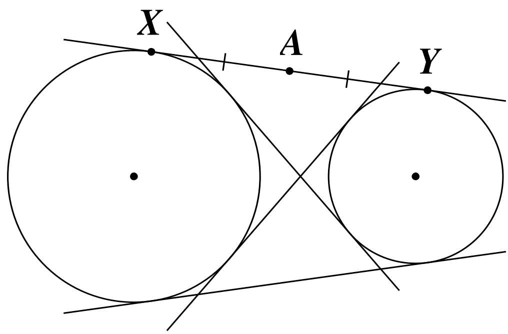


Рис. 25: Иллюстрация к задаче 1.

Решение. Докажем, что все эти четыре точки лежат на радикальной оси этих двух окружностей. Рассмотрим, например, точку A - середину внешней касательной XY. Используя теорему о касательной и секущей, получаем, что степень точки A относительно первой окружности равна AX^2, а относительно второй окружности равна - AY^2, но эти числа равны, и, из определения радикальной оси, получаем, что точка A лежит на ней. Аналогично доказывается, что и середины других общих касательных лежат на радикальной оси.

Задача 2. Докажите, что три общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. (рис. 25)

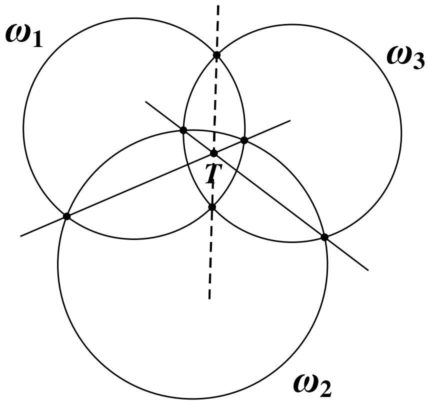


Рис. 26: Иллюстрация к задаче 2.

Решение. Вспомним, что каждая из общих хорд находится на радикальной оси двух окружностей, и теперь требуется доказать, что радикальные оси пересекаются в одной точке. Обозначим окружности ω_1, ω_2 и ω_3. Радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2 - это геометрическое место точек, для которых равны степени относительно ω_1 и ω_2. Аналогично для окружностей ω_2 и ω_3. Пусть эти радикальные оси пересеклись в точке T (а они пересекутся, так как радикальные оси перпендикулярны линиям центра, а линии центра не параллельны). Эта точка обладает тем свойством, что она имеет равные степени точек относительно всех трёх окружностей, а значит, она лежит и на радикальной оси ω_1 и ω_3.

Полученная при решении задачи точка называется радикальным центром трёх окружностей. Для любых трёх попарно не концентрических окружностей, либо радикальные оси попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке - радикальном центре.

Домашнее задание.

Задача 1. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

Задача 2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что четырёхугольники $AFDC$, $FECB$, $EDBA$ являются вписанными. Докажите, что диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

8 Метод Штурма в неравенствах

Метод Штурма обычно используется для доказательства неравенств с несколькими переменными. Основная его идея заключается в следующем: менять одновременно две переменные, сохраняя их сумму или произведение так, чтобы при этом одна из частей неравенства всегда изменялась в одну сторону. Обычно переменные либо пытаются сделать равными, либо наоборот — раздвинуть как можно дальше друг от друга. При этом процесс изменения переменных не должен быть бесконечным, нужно показать, что рано или поздно он остановится.

Задача 1. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \cdot x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\dots+x_n = 1$. Доказать, что для них выполняется неравенство:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

Решение.

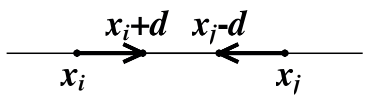


Рис. 27: Движение точек навстречу.

Посмотрим, как изменяется сумма квадратов чисел, если мы будем сближать два числа: пусть числа, которые мы сближаем это $x_i < x_j$, левое из которых подвинуто на $d > 0$ вправо, а правое на d влево так, чтобы при этом они не поменялись местами. Требуется сравнить числа $x_i^2 + x_j^2$ и $(x_i + d)^2 + (x_j - d)^2$, так как остальные числа при этом не поменялись. Докажем, что второе из них больше. Действительно:

$$(x_i + d)^2 + (x_j - d)^2 = x_i^2 + x_j^2 + 2d(x_i - k_j + d/2) < x_i^2 + x_j^2,$$

так как $x_i - x_j + d/2 < 0$. Это верно, так как разница между числами x_i и x_j равна хотя бы $2d$.

Рассмотрим теперь процесс движения чисел. Насколько именно нужно сдвигать числа навстречу друг другу? Если их сдвигать до середины, то такой процесс может оказаться бесконечным. Конечно можно доказать задачу, используя предельный переход, но это выходит за рамки школьной программы. Поэтому будем действовать следующим образом: возьмём два числа, одно из которых меньше $1/n$, а второе — больше $1/n$ (а такие точно есть, если все числа не равны $1/n$) и будем их двигать навстречу друг другу, пока одно из них не станет равным $1/n$ — сумма квадратов при этом уменьшится. Будем повторять этот процесс, пока это возможно. Он не будет бесконечным — каждый раз одно из чисел будет становиться равным $1/n$, и не позже, чем через n шагов все числа станут равными по $1/n$. Для всех чисел, равных $1/n$, сумма их квадратов также равна $1/n$. Но при движении чисел сумма квадратов в процессе всё время уменьшалась, значит, вначале она была $\geqslant 1/n$.

Задача 2. Про положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ известно, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Решение. На этот раз будем менять числа, сохраняя их произведение. Снова рассмотрим два числа $a_i < a_j$. Меньшее из них увеличим в $d > 1$ раз, а большее из них уменьшим в d раз. Посмотрим, как меняется выражение $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$: все множители, кроме двух, останутся такими же. Требуется сравнить числа $(1+a_i)(1+a_j)$ и $(1+da_i)\left(1+\dfrac{a_j}{d}\right)$. Докажем, что второе из них меньше:

$$(1+da_i)\left(1+\frac{a_j}{d}\right) < (1+a_i)(1+a_j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + a_i a_j + a_i d + \frac{a_j}{d} < 1 + a_i + a_j + a_i a_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i d^2 + a_j < a_i d + a_j d \;\Leftrightarrow\; (a_i d - a_j)(d-1) < 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $a_i d < a_j$ и $d > 1$.

Возьмём два числа, одно из которых меньше единицы, а второе больше, и будем их двигать навстречу друг другу, сохраняя постоянным произведение, пока одно из них не станет равным единице. Повторим такой процесс, пока все числа не станут равными 1 — это произойдёт не позднее, чем через n шагов. Когда все числа станут равными единицам, выражение $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$ станет равным 2^n, и так как мы с каждым шагом уменьшали значение выражения, то вначале оно было $\geqslant 2^n$, что и требовалось доказать.

Домашнее задание.

Задача 1. Доказать, что среднее арифметическое n положительных чисел не меньше среднего геометрического тех же чисел:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Задача 2. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что выполняется неравенство:

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

9 Геометрические места точек

Определение. Геометрическим местом точек (ГМТ) называются множество из тех, и только тех точки, которые обладают заданным свойством.

Например, определение окружности — это ГМ точек, удалённых от данной точки (центра) на данное расстояние (радиус). В определении ГМТ присутствуют слова «те и только те», что означает по смыслу то же, что и выражение «тогда и только тогда», значит, нужно доказывать два утверждения — то, что все описанные точки удовлетворяют заданному условию, и что никакие другие точки ему не удовлетворяют. ГМ точек, равноудалённых от сторон угла является биссектриса этого угла, потому что:

1. Необходимость: любая точка, равноудалённая от сторон угла, лежит на биссектрисе.

2. Достаточность: любая точка, лежащая на биссектрисе, равноудалена от сторон угла.

Вспомним ещё несколько важных ГМТ:

ГМ точек, равноудалённых от двух концов данного отрезка — это серединный перпендикуляр к этому отрезку.

ГМ точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние — это две параллельных ей прямых, лежащих по разные стороны от неё.

Как правило, ГМТ — это либо прямая, луч, отрезок, окружность или дуга, или комбинация этих объектов.

Задача 1. На плоскости даны точки A и B и точка N. Найти ГМТ точек M, для которых $AM^2 - BM^2 = AN^2 - BN^2$.

Решение. Проведём через точку N прямую l, перпендикулярную AB. Докажем, что эта прямая и есть искомое ГМТ. Пусть она пересекла отрезок AB (или его продолжение) в точке X.

а)достаточность б)необходимость

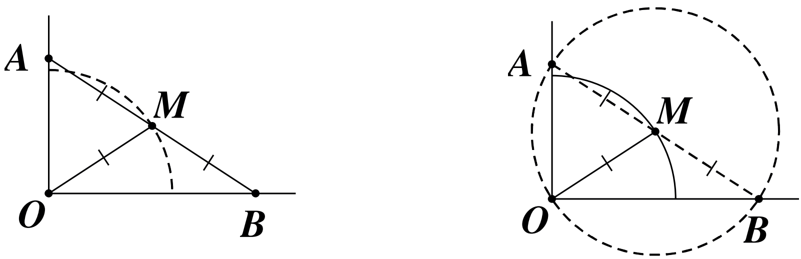
Рис. 28: К задаче о разнице квадратов расстояний до концов.

1)Достаточность (рис. 28а): докажем, что для любой точки M на этой прямой выполняется равенство $AM^2 - BM^2 = AN^2 - BN^2$. Запишем теорему Пифагора для треугольников AMX, BMX, ANX, BNX: $AM^2 = AX^2 + XM^2$; $BM^2 = BX^2 + XM^2$; $AN^2 = AX^2 + XN^2$; $BN^2 = BX^2 + XN^2$. Отсюда $AM^2 - BM^2 = AX^2 + XM^2 - BX^2 - XM^2 = AX^2 - BX^2$. Но и $AN^2 - BN^2 = AN^2 + XN^2 - BN^2 - XN^2 = AX^2 - BX^2$.

2)Необходимость: докажем, что любая точка M, для которой выполняется равенство $AM^2 - BM^2 = AN^2 - BN^2$, лежит на прямой l. Предположим, что это не так (рис. 28б). Проведём через точку M прямую, перпендикулярную AB. Пусть эта прямая пересекла прямую AB в точке Y, не совпадающей с точкой . Тогда из теорем Пифагора для треугольников AMY и BMY следует, что $AM^2 - BM^2 = AY^2 - BY^2$. Аналогично, $AN^2 - BN^2 = AX^2 - BX^2$. Отсюда, $AX^2 - BX^2 = AY^2 - BY^2$. Введём числовую ось на прямой AB. Пусть точка A имеет координату 0, B — координату b, X - координату x и Y — координату y. Тогда $AX^2 - BX^2 = x^2 - (b - x)^2 = 2bx - b^2$; $AY^2 - BY^2 = y^2 - (b-y)^2 = 2by - b^2$. А из равенства $2bx - b^2 = 2by - b^2$ следует, что $x = y$, то есть точки X и Y совпадают. Полученное противоречие завершает доказательство.

Задача 2. На середине лестницы, которая прислонена к стене, спит котёнок. По какой траектории будет двигаться котёнок, когда лестница начнёт съезжать на пол?

Решение. Найти траекторию лестницы означает найти ГМТ середин отрезков данной длины, концы которых лежат на двух данных лучах (стенах). Пусть длина лестницы равна $2l$. Докажем, что искомым ГМТ будет четверть окружности с центром в точке O и радиусом l.



а)достаточность б)необходимость

Рис. 29: К задаче о котёнке на лестнице

1) Достаточность: (рис. 29а) докажем, что середина M любого положения лестницы AB будет находиться на окружности. Действительно, в прямоугольном треугольнике AOB медиана OM равна половине гипотенузы, то есть $OM = l$.

2) Необходимость: (рис. 29б) любая точка M, лежащая на четверти окружности будет серединой некоторого положения лестницы: построим окружность с центром в точке M, радиусом l. Пусть она пересечёт лучи (стены) в точках A и B. Тогда $AB = 2l$, то есть M — действительно середина некоторого положения лестницы.

Домашнее задание.

Задача 1. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

Задача 2. В окружность вписан треугольник ABC. Точка P пробегает дугу ACB. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей всевозможных треугольников ABP.

10 Диофантовы уравнения

Определение. уравнение в целых числах называется диофантовым.

Обычно в диофантовых уравнениях (или системах) переменных больше, чем уравнений. Тем не менее, уравнения обычно имеют либо конечное число решений, либо серию решений, зависящую от параметра. Примеры диофантовых уравнений: $x^n+y^n = z^n$; $7x+11y = 15$; $2^x-1 = t^2$. Пожалуй, одной из самых известных теорем математики является:

Великая теорема Ферма: существует ли решение в натуральных чисел уравнения

$$x^n + y^n = z^n, n \geqslant 3.$$

Не правда ли, очень короткая и красивая формулировка? Несмотря на это, на доказательство этой теоремы ушло более 350 лет, и окончательно она была доказана всего 20 лет назад. Полное доказательство занимает внушительный объём: около 500 страниц. Фактически, для доказательства этой теоремы был разработан новый раздел математики.

К счастью, на олимпиадах нам не повстречаются такие гиганты, как эта задача. Приведём несколько идей, которые наиболее часто используются для решения диофантовых уравнений.

1. Преобразовать выражение таким образом, чтобы какая-нибудь его часть удачным образом разложилась на множители, и будет возможным перебор конечного числа вариантов.

2. Рассмотреть остатки по какому-либо модулю, или, в более сложных задачах сразу по нескольким модулям. Как выбрать модуль? Обычно это такое число, что одна из частей уравнения делится на этот модуль.

3. Использовать какое-либо неравенство или оценку.

Задача 1. Решить уравнение в целых числах:

$$7x + 10y = 16.$$

Решение. Такие уравнения называются линейными диофантовыми уравнениями, и для них есть известный алгоритм решения:

1)поделим 10 на 7 с остатком: получим 1 в неполном частном и 3 в остатке: $10 = 7 \cdot 1 + 3$. Тогда $7x + 7y + 3y = 16$ или $7(x+y) + 3y = 16$. Введём новую переменную: $z = x + y$. Тогда $7z + 3y = 16$.

2)поделим 7 на 3 с остатком: получим 2 в неполном частном и 1 в остатке: $7 = 3 \cdot 2 + 1$. Тогда $3 \cdot 2 \cdot z + z + 3y = 16$ или $3(2z+y) + z = 16$. Введём новую переменную: $t = 2z + y$. Тогда $3t + z = 16$.

3)один из коэффициентов полученного уравнения равен единице, поэтому $z = 16 - 3t$ для любого t — целого числа. Возвращаемся обратно к исходным переменным: $t = 2z + y \Rightarrow y = t - 2z = t - 2(16 - 3t) = 7t - 32$; $z = x + y \Rightarrow x = z - y = 16 - 3t - (7t - 32) = 48 - 10t$. Окончательно, ответ записывается в виде: $(x, y) = (48 - 10t, 7t - 32)$ для любого целого t.

Задача 2. Решить уравнение в целых числах:

$$3 \cdot 2^m + 1 = n^2.$$

Решение. Рассмотрим это уравнение по модулю 3: левая часть даёт остаток 1 при делении на 3. Значит и правая должна давать такой же остаток — n может давать остатки 0, 1 или 2 при делении на 3, но первый случай невозможен — правая часть будет делиться на 3. Итак, разберём два случая:

1) $n \equiv 1 (\bmod 3)$, тогда $n = 3k+1$ для некоторого неотрицательного k. Перенесём единицу в правую часть и разложим на множители: $3 \cdot 2^m = n^2 - 1 = (n-1) \cdot (n+1) = 3k \cdot (3k+2) \Leftrightarrow 2^m = k \cdot (3k+2)$. Для того, чтобы число было степенью двойки, необходимо, чтобы каждый из его множителей был степенью двойки. Но для $k > 3$ выполняется неравенство: $2k < 3k + 2 < 4k$, но это невозможно: числа

$2k$ и $4k$ являются двумя соседними степенями двойки, и между ними степеней двойки быть не может. Случаи $k = 0, 1, 2, 3$ перебираем: подойдёт случай $k = 2$, тогда $m = 4$ и $n = 7$.

2) $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогда $n = 3k + 2$ для некоторого неотрицательного k. Этот случай разбираем аналогично предыдущему, подойдут варианты $k = 0$ и $k = 1$, при которых $(m, n) = (1, 2); (3, 5)$.

Задача 3. Решить уравнение в целых числах: $n^2 + 44 = m!$
Решение.

1. Так как $4! = 24 < 44$ и $n^2 \geqslant 0 \to m \geqslant 5$.

2. Для $m = 5$: $m! = 120 \to n^2 = 120 - 44 = 76$ — нет решения.

3. Для $m = 6$: $m! = 720 \to n^2 = 720 - 44 = 676 = 26^2$ — решение.

4. Для $m \geqslant 7$: $m! \pmod 7 = 0$. Заметим, что $44 \pmod 7 = 2$. Составим таблицу квадратов по модулю 7:

0	1	2	3	4	5	6
0	1	4	2	2	4	1

   Для того, чтобы и левая часть делилась на 7, требовался остаток от деления какого-либо квадрата на 7, равный пяти. Такого нет. Следовательно, корней больше нет.

   Самый большой вопрос, возникающий при разборе задачи: почему в четвёртом пункте мы решили брать остатки именно по модулю 7? Почему не 8? Почему не 11? К сожалению, при решении подобных задач часто не удаётся сразу найти нужное основание модуля, поэтому приходится перебрать несколько значений. В реальных олимпиадных задачах они не бывают слишком большими и подобрать их за ограниченное время вполне возможно.

Домашнее задание.

Задача 1. Решить уравнение в целых числах: $17x + 7y = 13$.

Задача 2. Решить уравнение в целых числах: $3^m + 7 = 2^n$.

11 Малая теорема Ферма и теорема Эйлера

Малая теорема Ферма: пусть p — простое число и n не делится на p. Тогда $n^{p-1} - 1 \vdots p$. По другому это можно записать как $n^{p-1} \equiv 1(\operatorname{mod} p)$.

Возникает резонный вопрос — как нужно поменять формулировку теоремы, чтобы можно было рассматривать не простые p, а любые натуральные? Ответ на этот вопрос даёт теорема Эйлера. Введём понятие функции Эйлера: $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

Теорема Эйлера: пусть q — любое натуральное число и $(n, q) = 1$. Тогда $n^{\varphi(q)} \equiv 1(\operatorname{mod} q)$.

Для полноты картины, приведём формулу для вычисления функции Эйлера: пусть $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, тогда $\varphi(N) = N(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\ldots(1 - 1/p_n)$. Частный случай этой формулы вы должны были доказать в домашней задаче по теме «комбинаторика».

Задача 1. Пусть p — простое число, $p > 2$. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$.

Решение. Докажем сначала вспомогательный факт:

$$(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{(m,n)} - 1.$$

Пусть, не умаляя общности, $m \geqslant n$. Воспользуемся алгоритмом Евклида: $(2^n - 1, 2^m - 1) = (2^n - 2^m, 2^m - 1) = (2^{n-m} - 1, 2^m - 1)$ — тут мы воспользовались тем, что НОД двух нечётных чисел число нечётное, поэтому можно «убрать» из одного из чисел степень двойки, результат от этого не поменяется. Получается, что один шаг такого модифицированного алгоритма Евклида — это шаг обычного алгоритма Евклида для степеней. Так как в результате работы алгоритма Евклида получается НОД двух чисел, то $(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{(m,n)} - 1$.

Пусть q — некоторый простой делитель числа $2^p - 1$. Тогда с одной стороны $2^p - 1 \,\vdots\, q$ по условию задачи, а с другой стороны, $2^{q-1} - 1 \,\vdots\, q$ по малой теореме Ферма. Если на q делится каждое из этих двух чисел, то на q делится и их НОД: $2^{(p,q-1)} - 1 \,\vdots\, q$. Но p — простое число, значит либо $(p, q-1) = 1$, что невозможно, так так тогда $q = 2$, либо $(p, q-1) = p$, и отсюда $q - 1 \,\vdots\, p$. Но так как $q - 1$ ещё делится и на 2, то $q - 1 = 2pk \Rightarrow q = 2pk + 1$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что для любого простого p разность

$$\underbrace{11\ldots11}_{p}\underbrace{22\ldots22}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots99}_{p} - 123456789$$

делится на p.

Решение. Решим сначала такую задачу: записать число $11\ldots11$ без многоточий. Представим число в виде разложения по степеням десятки: $11\ldots11 = 10^{p-1} + \cdots + 10 + 1 = \dfrac{10^p - 1}{10 - 1}$ — формула для суммы геометрической прогрессии.

Для краткости обозначим $T = 11\ldots11222\ldots22\ldots99\ldots99 = \dfrac{10^p - 1}{10 - 1} \cdot \big(10^{8p} + 2 \cdot 10^{7p} + \cdots + 8 \cdot 10^p + 9\big)$.

Воспользуемся малой теоремой Ферма: $10^p \equiv 10 (\operatorname{mod} p)$, откуда $10^{2p} \equiv 100 (\operatorname{mod} p), \ldots, 10^{8p} \equiv 10^8 (\operatorname{mod} p)$. Отсюда $\dfrac{10^p - 1}{10 - 1} \equiv \dfrac{10 - 1}{10 - 1} = 1 (\operatorname{mod} p)$ и

$$(10^{8p} + 2 \cdot 10^{7p} + \cdots + 8 \cdot 10^p + 9) \equiv 10^8 + 2 \cdot 10^7 + \cdots + 80 + 9 =$$

$$= 123456789 (\operatorname{mod} p)$$

Окончательно,

$$T - 12345789 \equiv 1 \cdot 123456789 - 123456789 = 0 (\operatorname{mod} p),$$

что и требовалось доказать.

Задача 3. Докажите, что для любого нечётного n, число $2^{n!}-1$ делится на n.

Решение. Воспользуемся каноническим разложением числа n на простые множители, пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Для того, чтобы доказать, что число $2^{n!}-1$ делится на n, необходимо и достаточно доказать, что оно делится на каждое из чисел $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k}$. Докажем, что оно делится на первое из них. По теореме Эйлера для чисел 2 и $p_1^{\alpha_1}$:

$$2^{\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)} - 1 \;\vdots\; p_1^{\alpha_1}.$$

Но $\varphi(p_1^{\alpha_1}) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) = s < n$. Поэтому $2^{n!}-1 \,\vdots\, 2^{p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)} - 1$, так как $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot s \cdot \ldots \cdot 1 \;\vdots\; p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)$ (тут мы воспользовались фактом, что если $n \,\vdots\, m$ то $a^n - 1 \,\vdots\, a^m - 1$). Аналогично доказывается, что число $2^{n!}-1$ делится и на остальные $p_j^{\alpha_j}$, что и требовалось доказать.

Домашнее задание.

Задача 1. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

Задача 2. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 (\operatorname{mod} 561)$. Числа, обладающие этим свойством, называются числами Кармайкла.

12 Комбинаторика-3

Рассмотрим три классические задачи комбинаторики:

Задача 1. Имеется 7 ящиков, занумерованных номерами от 1 до 7. Сколькими способами в эти ящики можно разложить 25 одинаковых шаров так, чтобы никакой ящик не оказался пустым?

Решение. Положим все 25 шаров в ряд. Для того, чтобы определить, какие шары в каком ящике лежат, нужно поставить 6 перегородок между шарами. Все шары разобьются на 7 групп: шары первой группы положим в первый ящик, второй группы — во второй, и так далее. Всего есть 24 места, на которые можно поставить перегородки — именно столько промежутков между шарами. Никакие две перегородки нельзя ставить на одно место, иначе тогда в каком-то ящике не будет ни одного шара. Значит, искомое количество способов — C_{24}^6.

Задача 2. Имеется 7 ящиков, занумерованных номерами от 1 до 7. Сколькими способами в эти ящики можно разложить 25 одинаковых шаров (на этот раз ящики могут оставаться пустыми)?

Приведём два решения этой задачи:

Решение 1. Зарезервируем $25 + 6 = 31$ место для шаров и перегородок. На 6 любых мест из этих 31 поставим перегородки. Докажем, что любая такая расстановка будет однозначно определять расположения шаров по ящикам. Действительно, все шары, которые лежат до первой перегородки, положим в первый ящик, находящиеся между первой и второй перегородками — во второй ящик, и так далее. При этом если перегородки стоят рядом, значит, ящик остался пустым, что допускается. Поэтому искомое количество способов — это C_{31}^6 — выбрать 6 мест из 31 для перегородок, а шары ставятся однозначно.

Решение 2. Сопоставим каждому расположению 25 шаров по ящикам такое расположение 32 шаров по тем же ящикам, чтобы при этом не оставалось пустых ящиков: добавим в каждый ящик по одному шару. Такое соответствие будет взаимно-однозначным, поэтому и количество способов у них совпадает. Но количество способов разложить шары, чтобы не было пустых ящиков, мы считали в предыдущей задаче: их C_{31}^6.

Отметим, что построение взаимно-однозначного соответствия используется во многих разделах математики.

Задача 3. Спускаясь каждое утро по лестнице, Вася заметил, что она содержит 10 ступенек (он находится на нулевой, и ему нужно попасть на десятую). Сколькими способами Вася может по ней спуститься, если а) он может перепрыгивать через любое количество ступенек? б) он может наступать только на следующую ступеньку или через ступеньку?

Решение. а) На последней ступеньке Вася обязательно должен побывать. На остальных же ступеньках, а их девять штук, он может как побывать, так и пропустить их - для каждой ступеньки есть 2 способа. Значит всего есть $2^9 = 512$ способов спуститься по лестнице.

б) Попробуем решить более общую задачу: пусть на лестнице n ступенек. Тогда если $n = 1$, то способ спуститься только один. Если $n = 2$, то существует 3 способа спуститься: наступив на промежуточную ступеньку, или не наступив. Пусть X_n — количество способов спуститься с лестницы, содержащей n ступенек. Мы показали, что $X_1 = 1$; $X_2 = 2$. Найдём, чему равно X_n. С первый шагом у Васи есть два выбора:

1. Он может наступить на следующую ступеньку, тогда ему ещё нужно пройти $n - 1$ ступеньку, он может сделать это X_{n-1} способом.

2. Он может пропустить следующую ступеньку, тогда ему нужно пройти ещё $n-2$ ступеньки, это можно сделать X_{n-2} способами.

Получаем, что $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$. Отсюда $X_3 = X_2 + X_1 = 2 + 1 = 3$; $X_4 = X_3 + X_2 = 3 + 2 = 5$, получаем последовательность:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

То есть у Васи есть 89 способов спуститься. Числа, которые получились в этой задаче есть числа Фибоначчи, с одним лишь отличием, числа Фибоначчи начинаются с чисел 1 и 1, и последовательность выглядит так:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} : F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \ldots$$

Нетрудно убедиться, что в общем случае существует F_{n+1} способов спуститься с лестницы, содержащей n ступенек, делая шаги по 1 и по 2 ступенек.

Домашнее задание.

Задача 1. 20 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение, и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

Задача 2. Сколько существует способов разрезать прямоугольник 2 на 15 на прямоугольники размером 1 на 2?

Заключение

Мы рассмотрели несколько интересных тем, иногда простых, иногда сложных. Редко оказывается, что какая-либо задача полностью может быть решена с применением материала из кванта. Это — строительные материалы, из которых собирается большая задача.

Какую из тем применять при решении конкретной задачи? Мы постарались дать необходимые подсказки, какие слова или какие условия могут натолкнуть на нужную тему. Тем не менее, любая из задач имеет множество вариантов решений и выбор нужного из них определяется опытом.

Научное издание

Материалы математического отделения Летней Олимпиадной Школы

ЧАСТЬ 2

В авторской редакции

Отпечатано в ООО «Эдитус»
129515, г. Москва, ул. Академика Королева, 13
8 (800) 775-30-87
www.editus.ru

Подписано в печать 27.09.17
Формат 148x210. Печ. л. 11,25
Печать цифровая. Бумага офсетная
Тираж 66 экз. Заказ № 201708156

ISBN 978-5-00058-677-8
www.editus.ru
9 785000 586778 >

ISBN 978-5-00058-677-8
www.editus.ru
9 785000 586778 >